УДК 519.95, 681.3

Траспортні задачі на мережах

Назар Притула[1], Мирослав Притула[2]

[1] аспірант, Львівський національний університет, кафедра теоретичної і прикладної статистики, вул. Університетська, 1, 79000, Львів, e-mail: prytula@Litech.net
[2] к. ф.-м. н., с.н.с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: prytula@Litech.net

У роботі запропоновано постановку задачі оптимального формування потоків кореспонденцій, математичну модель для проведення тягово-енергетичних розрахунків переміщення груп кореспонденцій з мінімальними енергетичними затратами та підхід до розрахунку параметра нагромадження кореспонденцій. Крім цього, у роботі подано опис алгоритму формування потоків кореспонденцій.

Ключові слова: потоки кореспонденцій, зважений граф, параметр нагромадження, матриця кореспонденцій.

Вступ. Дослідження функціонування і розвитку систем, які описуються мережевими структурами (транспортні, енергетичні, гідравлічні, інформаційні тощо), насамперед пов'язане із визначенням завантаження складових елементів структури — ребер і вершин мережі. Робота таких систем може бути представлена через переміщення необхідних кореспонденцій або груп кореспонденцій із заданого пункту відправлення до відповідного пункту призначення. При цьому кожна кореспонденція характеризується багатьма параметрами, які визначаються для конкретних типів мереж і потоків на них. Завантаження елемента мережі є деякою функцією від кількості кореспонденцій, маршрути слідування яких проходять через даний елемент. Методи, які використовуються для знаходження завантаження, значною мірою визначаються способом вибору маршруту слідування кожної кореспонденції. Аналіз практичних задач такого роду показує, що для їх постановки необхідно використовувати значну кількість змінних і враховувати нелінійний характер критеріальних функцій від завантаження елементів мережі. Суттєво нелінійний характер росту затрат при наближенні величини завантаження елемента мережі до межі її пропускної здатності є однією з причин появи нелінійних цільових функціоналів задач. Моделювання достатньо адекватних функцій затрат в кожному випадку є самостійною задачею.

Основним методом формування потоків кореспонденцій є метод аналітичних співставлень [1]. Основою цього методу є вибір критеріїв оцінки оптимальності об'єднання груп кореспонденцій в одну групу. При цьому вважається, що всі групи слідують у різні вершини.

Для знаходження оптимального способу групування кореспонденцій достатньо знайти кращі (згідно критеріїв) комбінації об'єднання струменів. Не дивлячись на те, що існує велика кількість алгоритмів об'єднання наборів кореспонденцій різної складності, на сьогодні не існує алгоритму, який би широко застосовувався на практиці.

Задачі, які виникають при моделюванні процесів розподілу дискретних потоків є багатоекстремальними, великої розмірності, нелінійними і з невипуклими функціями затрат і цілі. Для розв'язування таких задач не існує загальної теорії й універсальних ефективних методів. Запропоновані в літературі методи [2-8] не дають можливість розв'язати поставлені нижче задачі.

1. Постановка задач. Алгоритм формування потоків груп кореспонденцій

1.1. Основні означення. Розглядається частково-орієнтований мультиграф *G*(*X, Y*), де *X* — множина вершин, *Y* — множина ребер. Множина вершин *X* є об'єднанням підмножин X_1, X_2, X_3, X_4 вершин чотирьох типів: базових, проміжкових, граничних та технологічних відповідно. Вершинами зародження та погашення кореспонденцій є вершини, які належать до множин X_1, X_2 відповідно. Граничні вершини розбивають граф *G* на зв'язні підграфи (компоненти) $G_i\ (i=\overline{1,s})$ так, що $\bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i = G$. Технологічні вершини є двох типів. Перший тип технологічних вершин має степінь три. Для цих вершин дві із трьох дуг є вихідними. Тому кореспонденції, залежно від стану вершини, можуть переміщатися в одному із двох можливих напрямків. Технологічні вершини другого типу вважаються інформаційними і мають степінь два.

Розглянемо матрицю кореспонденцій $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, у якій елемент a_{ij} позначає кількість кореспонденцій, які треба доставити з *i*-ої вершини графа *G* до його *j*-ої вершини упродовж заданого інтервалу часу. Матрицю **A** можна однозначно побудувати за допомогою *s* + 1 матриць виду $\{a_{i_k j_k}\}, \{a_{i_{s+1} j_{s+1}}\}$, де $i_k j_k$ $\left(i, j=\overline{1,s}\right)$ — індекси (номери) вершин, які належать *k*-ій компоненті графа *G*, а $i_{s+1} j_{s+1}$ — індекси, які належать різним компонентам. Під компонентою графа *G* будемо розуміти його зв'язний підграф. Спільними у двох компонент можуть бути тільки граничні вершини.

Ребро (*i, j*), де *i* та *j* — інформаційні вершини, називається блок-ділянкою. Для безпеки переміщення встановлюється найменша кількість блок-ділянок, які повинні розмежовувати групи кореспонденцій протягом їх переміщення. Кожне ребро характеризується параметрами плану і профілю, які складаються з елементів (*a, b, i, r, l*), де *a*, *b* — координати початку та кінця елемента, *i* — ухил, *r* — радіус кривини, *l* — довжина.

1.2. Оптимальний спосіб розподілу кореспонденцій. Критерієм для виділення базових вершин є значення величини $A_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a_{ji})$. У множину базових вершин включаємо ті вершини, для яких $A_i \geq C$. Величина C є параметром задачі. Значення параметра визначається у процесі розв'язання задачі. Після цього будуємо матрицю базових вершин $B = \{b_{ij}\}$, де i, j — номери базових вершин. Це можна зробити таким чином. Кореспонденції небазових вершин об'єднуємо з кореспонденціями найближчих (за віддаллю) базових вершин, або з базовими, які є першими на найкоротшому шляху до вершин їх погашення. Якщо на найкоротшому шляху від зародження кореспонденції до її погашення не існує базових вершин і віддаль руху кореспонденції через базову вершину значно перевищує найкоротший шлях, то її залишаємо на місці для проведення додаткового аналізу.

Вважаємо, що кожна базова вершина i має обов'язкову переробку кореспонденцій B_i та додаткову N_i, яка визначається в процесі розв'язування задачі. У загальному випадку приведені затрати, які пов'язані з кількістю переробки кореспонденцій і кількістю призначень k_i, описуються функцією $E_i = g_i(N_i, k_i)$. Таким чином, вибір оптимального способу розподілу кореспонденцій між p вершинами переробки зводиться до мінімізації функції двох змінних

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(N_i, k_i) \to \min ,$$

за умови, що $B_i + N_i \leq N_{m_i}$, $k_i \leq n_{m_i}$, $\sum_{i=1}^{p} k_i = k$, де N_{m_i} — переробна здатність вершини i; n_{m_i} — максимальна кількість призначень з вершини i; k — кількість призначень на станції.

1.3. Тягово-енергетичні розрахунки. Кожна i-а кореспонденція має масу m_i, довжину l_i, тип s_i. Кореспонденція характеризується функцією основного опору переміщенню кореспонденції $F_{on} = f(v, m_i, s_i)$, де v — швидкість руху кореспонденції вздовж ребра, f — відома функція. На кожному ребрі задається обмеження зверху для швидкості, яка є кусково-неперервною функцією. Модель тяги описується трьома дискретно-неперервними функціями: силою тяги $F_m(v, K, S)$, яка залежить від швидкості переміщення v, режимів тяги K і типу тяги S, затратами енергії $I(v, K, S)$ або затратами палива $G(v, K, S)$.

Окрім того, на основі значення величини $I(v, K, S)$ і температури зовнішнього середовища розраховують температуру перегріву T_p та значення теплових коефіцієнтів тягових двигунів і генераторів.

Задача полягає у знаходженні таких швидкостей $v = g(s)$ та затрат енергії $I = f(s)$, які б задовольняли рівняння

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta(F_m \pm W_k - B)}{(Q+P)},$$

за обмеження $v \le v_m(x,y,z)$, $T_p < T_m$, при цьому

$$\int_0^t I(v,K,S)d\tilde{t} \to \min,$$

Тут t — час переміщення; s — шлях; B — гальмівна сила; Q — вага кореспонденцій; P — вага локомотиву; T_m — максимально допустима температура нагрівання обмоток тягових двигунів; $W_k = F_{on} + F_{дод.}(i_k, r, T, V_b, n)$; $F_{дод}$ — додатковий опір, який залежить від ухилу i_k, радіуса кривини траєкторії переміщення r, температури повітря T, швидкості вітру V_b, кількості включених генераторів n.

1.4. Розрахунок параметра нагромадження кореспонденцій. При розрахунку параметра нагромадження розрізняють дві схеми процесу нагромадження кореспонденцій: рівними наборами через однакові проміжки часу; різними наборами через різні проміжки часу. Розглянемо другу схему нагромадження. Надходять набори кореспонденцій m_i $(i = \overline{1, j})$ в моменти часу τ_i, які вважаються не залежними, випадково розподіленими величинами з густинами розподілу $f(m)$, $f(\tau)$ відповідно.

При нагромадженні кореспонденцій (приймаємо, що залишкової групи немає) проміжні групи $(m_1, m_2, ...)$ незалежні і однаково розподілені випадкові числа з густиною розподілу $f(m)$, за винятком замикаючої групи, густина розподілу якої $f(m_{зам})$ відмінна від $f(m)$.

Оскільки m_i, τ_i — незалежно розподілені випадкові величини з однаковою густиною розподілу, то і $b_1^* = m_1\tau_1, b_2^* = m_2\tau_2, ...$ є послідовністю незалежно розподілених випадкових величин з однією і тією ж густиною розподілу $f(b^*)$.

Процес нагромадження може відбуватися з перервами, частково з перервами, або бути неперервним.

У першому випадку групи нагромаджуються без залишкових груп і завершальний набір повністю включається у групу, яка відправляється. У другому випадку після частини груп утворюються перехідні залишки кореспонденцій, а в третьому — кореспонденції залишаються після завершення кожної групи.

Різновиди процесу нагромадження з перервами є такими:

— групи нагромаджуються до встановленої норми (за кількістю кореспонденцій чи маси);

— групи нагромаджуються до певного часу і відправляються ;

— комбінований випадок — частина кореспонденцій одного і того ж потоку відправляється згідно розкладу, а друга — за фактом нагромадження до певної величини.

Зі сказаного вище випливає, що кореспонденції-години нагромадження на відправну групу кореспонденцій можна розглядати як суму випадкового числа елементо-кореспонденцій-годин b_i^*, кожна із яких $b_i^* = m_i \tau_i$.

Нехай група кореспонденцій нагромаджується до деякої норми m і кількість проміжних груп у ній є випадковою величиною $\xi = k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Ймовірність такої події рівна P_k.

Математичне сподівання кореспонденцій-годин нагромадження у групу при $\xi = k$ знаходиться за формулою

$$M\left[B_k\right] = \overline{b^*}\frac{1+k}{2}k,$$

де $\overline{b^*}$ — математичне сподівання елементо-кореспонденцій-годин нагромадження, B_k — вагоно-години нагромадження на склад із k групи вагонів. Повне математичне сподівання кореспонденцій-годин нагромадження для відправної групи дорівнює

$$B_C = \sum_{k=1}^{n} M[B_k]P_k = \frac{\overline{b^*}}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=1}^{n} k^2 P_k\right).$$

Перша і друга суми у виразі є, відповідно, математичним сподіванням кількості проміжних груп і другим початковим моментом кількості груп. Математичне сподівання B_C можна подати так

$$B_C = \overline{b^*}(S_B + \frac{D_k}{2}),$$

де S_B — середня кількість елементо-кореспонденцій-годин на відправну групу; D_k — дисперсія кількості груп.

Знайдені величини дають змогу розрахувати параметри нагромадження.

2. Задача формування потоків кореспонденцій на мережі

Для вибраного графа мережі задається матриця її кореспонденцій-потоків $\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}$, формулюються критерії оптимальності об’єднання потоків і обмеження по ребрах та вершинах.

Встановлені критерії об’єднання потоків дозволяють їх групувати. Групування потоків дає змогу зменшити час простоювання кореспонденцій на етапі формування груп потоків, але при цьому втрачається час на переформування потоків у деяких проміжних вершинах.

Задача полягає в тому, щоб доставити усі кореспонденції до місця призначення за мінімальний сумарний час. Для її розв'язування пропонується мінімізувати сумарні затрати на доставку кореспонденцій шляхом максимізації транзитних потоків та мінімізації кількості переформувань груп кореспонденцій. При цьому потрібно врахувати взаємопов'язані обмеження:

— кореспонденції необхідно відправити з використанням мінімальної кількості груп;

— групи кореспонденцій повинні бути доставлені найкоротшими (або близьких до них) шляхами;

— кожна кореспонденція повинна на шляху до вершини погашення перебувати в мінімальній кількості груп.

У матриці $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, як правило, є значна відмінність між окремими величинами її елементів та між сумами окремих стрічок чи стовбців. Якщо з вершини i у вершину j потрібно відправити неповну групу кореспонденцій, то цю групу необхідно якомога раніше об'єднати з кореспонденціями деяких сусідніх вершин. Переформування групи можна робити на довільній проміжній вершині, але доцільно робити його на вершинах, що входять в перелік основних.

Запропонований нами алгоритм передбачає такі шляхи переміщення кореспонденцій: вершина — вершина; вершина компоненти k_j — основна вершина компоненти k_i — вершина компоненти k_i; вершина компоненти k_j — основна вершина — вершина компоненти k_s або основна вершина компоненти k_s — вершина компоненти k_i; вершина — вершина — вершина.

При формуванні груп встановлюються параметри керування n_1, n_2, n_3. Алгоритм працює з максимально незалежними наборами груп і тому немає принципових труднощів при використанні його для формування розкладу руху. Алгоритм передбачає рух груп кореспонденцій між підграфами через треті підграфи.

На шляху переміщення кореспонденцій можливі такі ситуації.

1. Групи кореспонденцій переміщуються у вершини погашення без переробки в інших вершинах .

2. Кореспонденції переміщуються у вершини погашення в двох групах, тобто з однією переробкою.

3. Кореспонденції переміщаються у вершини погашення в трьох групах, тобто з двома переробками.

Варто відзначити, що розгляд відмінного від наведених вище способу розподілу кореспонденцій може суттєво ускладнити алгоритм і, в багатьох випадках, унеможливити узгодження руху груп кореспонденцій у часі.

При врахуванні часу вважатимемо його дискретним і виділимо три моменти часу T_1, T_2, T_3. Певні кроки алгоритму прив'язуються до певних моментів часу. Запропонований алгоритм складається з наступних кроків (не обов'язково у вказаному порядку).

Крок 1. У матриці **A** виділимо елементи $a_{ij} \geq n_1 \quad (n \leq n_1 \leq N)$. Такі елементи позначимо $a_{ij}(n_1)$. Знайдемо $\min\limits_{n_1}\left\{a_{ij}(n_1) - \left[\frac{a_{ij}(n_1)}{n_1}\right]\cdot n_1\right\}$, де $[x]$ — ціла частина величини x. Тут $k_{ij} = \left[a_{ij}(n_1)/n_1\right]$ — кількість груп кореспонденцій, які потрібно перемістити з вершини i у вершину j. Ці групи назвемо прямими. Після цього замінюємо елементи матриці $a_{ij}(n_1)$ на $a_{ij} - k_{ij}\cdot n_1$.

Крок 2. Для всіх пар вершин (i, j) на найкоротшому шляху з i в j знаходимо таке k, при якому

$$\min\{a_{ik} + a_{ij}; a_{ij} + a_{kj}\} \geq n_2 \quad (n \leq n_2 \leq N).$$

Тоді формується група з вершини i до вершини k. Та частина кореспонденцій з кількості a_{ik} (позначимо її a'_{ik}), для якої $a_{ik} + a'_{ik} \leq N$, погашається у вершині k. Частина a_{kj} (позначимо її a'_{kj}), для якої $a_{kj} + a'_{kj} \leq N$, в іншій групі відправляється у вершину j.

Тоді у матриці **A** елементи a_{ij}, a_{ik}, a_{kj} заміняємо відповідними величинами $0, a_{ik} - a'_{ik}, a_{kj} - a'_{kj}$. Цей крок, як і попередній, може відбуватися в один із моментів часу T_1, T_2, T_3. Тобто ці кроки не пов'язані в часі з наступними.

Крок 3. У матриці **A** виділимо ті стрічки i, для яких $\sum\limits_j a_{ij} > n_3$. Позначимо їх $a_i(n_3)$. Для кожного $a_i(n_3) \quad (n \leq n_3 \leq M)$ знаходимо суму $\sum\limits_j a_{ij}$ (j набуває значень $g_1,...,g_{l_j}$). Якщо сума є більшою, ніж m_3, то формуємо групу з вершини i до основної вершини s_{1j} підграфа G_j, яка є найближчою до вершини i. Така група може бути не єдиною.

Тоді в матриці кореспонденцій від відповідних елементів $a_i(n_3)$ віднімаємо, а до $s_{1j} \quad (1 < j < l_j)$ — додаємо сумарну кількість кореспонденцій, відправлених з вершини i.

Нехай відправлення груп кореспонденцій здійснюється в час T_1 або T_2. Це залежить від порядку кроків алгоритму.

Крок 4. Після *кроку 3* виділяються вершини i, для яких $a_{ij} > N$. З даних вершин відправляються групи у найближчі основні вершини інших підграфів. Цей крок можна виконати в момент часу T_2.

У виділених вершинах кожного підграфа зібрано кореспонденції для відправлення з вершини цього ж підграфа.

Робота алгоритму завершена.

Висновки. У роботі запропоновано клас взаємопов'язаних транспортних задач. Розв'язаними (в дещо спрощеній постановці) й апробованими є дві із них — тягово-енергетичні розрахунки та формування потоків груп кореспонденцій. Для усіх сформульованих задач створюється єдина інтегрована інформаційна база. В основу більшості алгоритмів покладено фундаментальні алгоритми на зважених графах [2-6].

Література

[1] *Акулиничев В. М.* Организация вагонопотоков. — М.: Транспорт, 1980.
[2] *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.
[3] *Финкельштейн Ю. Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М.: Мир, 1976.
[4] *Ермольев Ю. М., Мельник И. М.* Экстремальные задачи на графах. — К.: Наук. думка, 1968.
[5] *Пападимитриц Х., Ситайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 510 с.
[6] *Ріхтер К.* Динамические задачи дискретной оптимизации. — Л.: Радио и связь, 1985. — 136 с.
[7] *Потткофф Г.* Учение о транспортных потоках. Пер. с нем. под ред. *Нестерова Е. П.* . — 1975. — 343 с.
[8] *Васильева Е. М., Левит Б. Ю., Ливши В. Н.* Нелинейные транспортные задачи на сетях. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 104 с.
[9] *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая шк., 2003. — 614 с.
[10] *Деев В. В., Ильин Г. А., Афонин Г. С.* Тяга поездов. — М.: Транспорт, 1987. — 264 с.
[11] *Каретников А. Д., Воробьев Н. А.* График движения поездов. — М.: Транспорт, 1979. — 301 с.

Transport Problems on Networks

Nazar Prytula, Myroslav Prytula

The statement of the problem for optimal formation of correspondence streams, mathematical model for evaluating traction and power calculations for movement of correspondence groups with the minimal power expenses and the approach to calculation of accumulation parameter for correspondence are proposed in the paper. Moreover the algorithm description of formation of correspondence streams is presented.

Транспортные задачи на сетях

Назар Притула, Мирослав Притула

В работе предложена постановка задачи оптимального формирования потоков корреспонденций, математическая модель для проведения тягово-энергетических рассчетов перемещения групп корреспонденций с минимальными энергетическими затратами и подход к рассчету параметров накопления корреспонденций. Кроме этого, в работе представлено описание алгоритма формирования потоков корреспонденций.

Отримано 12.09.05