

Пряма та обернена задачі томографії тензорного поля у кусково-однорідній смузі

Василь Чекурін¹, Оксана Кравчишин²

¹ д. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

² провідний математик, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

Розглядаються пряма та обернена задачі визначення двовимірного напружено-деформованого стану в кусково-однорідній смузі, обумовленого стрибками переміщень на поверхні контакту різнорідних частин. В оберненій задачі стрибки переміщень априорі невідомі, натомість задані лінійні інтегралі від шуканих компонент напружень вздовж деякої множини напрямків. Значення цих інтегралів можна визначити на основі даних акустичних вимірювань. Реалізовано метод розв'язування задач, який базується на розвиненні шуканих розв'язків за повною системою функцій, що задовольняють рівняння теорії пружності в об'ємі тіла й умови навантаженості сторін смуги. Коефіцієнти розвинень знаходяться з умови мінімуму функціоналів, які визначають середньо-квадратичні відхилення розв'язку на межі півсмуг від заданих умов контакту (пряма задача) або від усіх заданих значень лінійних інтегралів (обернена задача).

Ключові слова: кусково-однорідні тіла, напружено-деформований стан, залишкові напруження, методи акустопружності, томографія тензорного поля, варіаційні методи, обернені задачі.

Вступ. У практичних застосуваннях часто виникає задача визначення напружень у кусково-однорідних тілах за наявності несумісних деформацій на поверхнях контакту різнорідних матеріалів. У випадках, коли умови механічного контакту різнорідних частин складеного тіла та умови навантаження задані, можливі дослідження у рамках відповідних прямих задач механіки. Якщо ж ці умови априорі невідомі, то на практиці часто вдаються до методів фізичних вимірювань. Проте напруження у твердому тілі є параметром, що не піддається безпосередньому вимірюванню. Тому здебільшого експериментально визначають фізичні величини, які пов'язані з напруженнями відомими співвідношеннями, наприклад, деформації. Цей підхід реалізують, застосовуючи різноманітні методи тензометрії (механічної, електричної, оптичної тощо), які дозволяють вимірювати деформації на поверхні твердих тіл. При цьому пряме визначення неоднорідного напружено-деформованого стану у всьому об'ємі тіла можливе лише за умов, коли відомий характер розподілу деформацій за товщинною координатою, наприклад, у тонкостінних елементах. До того ж методи механічної й електричної тензометрії, фотопружних покриттів та інші, які базуються на реєстрації змін стану спеціальних датчиків (вимірювальних перетворювачів), дозволяють визначити

деформацію об'єкта стосовно його стану на момент встановлення на ньому цих вимірвальних перетворювачів, які надалі деформуються разом із досліджуваним тілом [1]. Тож ці методи практично неможливо застосовувати для визначення залишкових напружень, не порушуючи цілісності об'єкта дослідження. У таких випадках доводиться застосовувати руйнівні або часткового руйнівні методи, які реалізують шляхом розділення тіла на окремі частини, видалення поверхневих шарів матеріалу, свердління наскрізних чи глухих отворів, утворення заглибин різної форми тощо [2]. Інформативним параметром при цьому є деформації об'єкта, які виникають внаслідок вивільнення частини пружної енергії при утворенні нової поверхні. Відновлення вихідного напруженого стану тіла на основі даних таких вимірювань можливе шляхом застосування тих чи інших теоретичних моделей, формулювання відповідних задач математичної фізики і використання математичних методів для їх розв'язування.

Неруйнівні методи визначення напружень реалізують шляхом зондування об'єкта зовнішнім фізичним полем, яке, проникаючи в його товщу, змінює свої характеристики внаслідок взаємодії з напружено-деформованим тілом. Реєструючи зміни характеристик зондувального поля, отримуємо певну інформацію про шуканий напружено-деформований стан, яку можна використати як вхідні дані для відповідних обернених задач. Підходи до формулювання таких обернених задач та варіаційний метод їх розв'язування запропоновані в працях [3-6].

У статті розглядаються пряма та обернена задачі визначення двовимірного напружено-деформованого стану в кусково-однорідній смузі, що складається із двох півбезмежних різнорідних смуг, з'єднаних торцями. Приймається, що напружено-деформований стан обумовлений несумісністю деформацій, яка задається стрибками переміщень на поверхні контакту півсмуг. У такий спосіб моделюються залишкові напруження, які виникають при зварюванні. Подібна задача виникає також при описі концентрації напружень у кусково-однорідному тілі за зовнішніх силового навантаження чи нагріву.

Пряма задача полягає у знаходженні напружено-деформованого стану при заданих стрибках переміщень. В оберненій задачі стрибки переміщень априорі невідомі, натомість вважаються заданими значення лінійних інтегралів вздовж деякої множини напрямків. Таке формулювання відповідає способам відбору даних, прийнятим у трансмісійній томографії [7], згідно з якими тіло зондується фізичним полем вздовж деякої системи прямих і вимірюються зміни параметрів зондувального поля на кожній прямій, зумовлені взаємодією з полем шуканих напружень (чи деформацій). Для методу фотопружності ці інтеграли отримані у статтях [3-6]. Інтегральні співвідношення акустопружності, з допомогою яких можна реалізувати методи акустичної томографії тензорних полів, отримані у працях [6, 7].

Для отримання наближених розв'язків прямої та оберненої задач використано варіаційний метод, запропонований у статті [3]. Метод полягає у розвиненні шуканих розв'язків за повною системою функцій, що задовольняють рівняння теорії пружності всередині смуги та умови ненавантаженості її бічних сторін. Коефіцієнти розкладу в прямій задачі знаходять із умови мінімуму функціонала, який визначає середньоквадратичне відхилення шуканого розв'язку від заданих

умов контакту півсмуг. В оберненій задачі, натомість, використовується умова мінімуму функціонала, що визначає квадратичне відхилення розв'язку від усіх заданих значень лінійних інтегралів.

1. Пряма задача теорії пружності та варіаційний метод її розв'язування

Розглянемо безмежну кусково-однорідну смугу S , що складається з двох різнорідних півбезмежних смуг $S_1 = \{x < 0, -1 \leq y \leq 1\}$ та $S_2 = \{x > 0, -1 \leq y \leq 1\}$, з'єднаних між собою торцями вздовж відрізка $x = 0$. Нехай смуга перебуває у плоскому деформованому стані, тобто для кожної з її частин S_1 та S_2 виконуються рівняння

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(\alpha)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(\alpha)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(\alpha)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(\alpha)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{11}^{(\alpha)}}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(\alpha)}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial \sigma_{12}^{(\alpha)}}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

а сторони $y = \pm 1$ смуги вільні від навантажень, що накладає такі обмеження на компоненти тензора напружень

$$\sigma_{12}^{(\alpha)}(x, y) \Big|_{y=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{22}^{(\alpha)}(x, y) \Big|_{y=\pm 1} = 0. \quad (2)$$

Тут верхній індекс $\alpha = 1$ для S_1 та $\alpha = 2$ для S_2 , $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ — компоненти тензора напружень Коші для півсмуг S_1 та S_2 .

При з'єднанні матеріалів шляхом зварювання в зоні термічного впливу виникають незворотні деформації, обумовлені фазовими перетвореннями, усадкою матеріалу, пластичністю тощо. Несумісна частина цих деформацій спричиняє появу залишкових напружень. Якщо зварний шов достатньо тонкий, то в деякому наближенні можна знехтувати в математичній моделі шириною області, в якій локалізовані незворотні деформації, задаючи геометричну несумісність стрибками компонент переміщень на поверхні контакту.

Обмежимося тут випадком, коли наявний лише стрибок дотичної компоненти вектора переміщень, тобто на поверхні контакту справджуються умови

$$[\sigma_{11}(0, y)] = 0, \quad [\sigma_{12}(0, y)] = 0, \quad [u_1(0, y)] = 0, \quad [u_2(0, y)] = v(y). \quad (3)$$

Тут квадратними дужками позначені стрибки відповідних функцій на поверхні контакту $x = 0$; $v(y)$ — задана функція стрибка дотичних переміщень.

За таких умов залишкові напруження в тілі швидко згасають із віддаленням від поверхні контакту. Тому, ввівши функцію напружень Ейрі W , для якої компоненти тензора напружень задаються у вигляді

$$\sigma_{11}^{(\alpha)} = \partial^2 W^{(\alpha)} / \partial y^2, \quad \sigma_{22}^{(\alpha)} = \partial^2 W^{(\alpha)} / \partial x^2, \quad \sigma_{12}^{(\alpha)} = -\partial^2 W^{(\alpha)} / \partial x \partial y, \quad (4)$$

замінімо систему рівнянь (1) еквівалентним їй бігармонічним рівнянням

$$\Delta \Delta W = 0, \quad (5)$$

що має розв'язки вигляду [3]

$$W^{(\alpha)}(x, y) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \overline{W}_k^{(\alpha)} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^{(\alpha)} \operatorname{Re} \left(W_k^{(\alpha)} \right) + B_k^{(\alpha)} \operatorname{Im} \left(W_k^{(\alpha)} \right) \right).$$

Тут $C_k^{(\alpha)} = A_k^{(\alpha)} + iB_k^{(\alpha)}$ — комплексні сталі;

$$W_k^{(\alpha)} = \exp(-\gamma_k |x|) F_k(y); \quad F_k = \kappa_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y);$$

$\kappa_k = -\gamma_k \operatorname{tg}(\gamma_k)$; γ_k — комплексні корені рівняння $\sin(2\gamma_k) + 2\gamma_k = 0$; риска над літерою вказує на операцію комплексного спряження.

Згідно з формулами (4) отримуємо наступні подання для напружень $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(x, y)$ ($i, j = 1, 2$) і переміщень $u_i^{(\alpha)}(x, y)$ у смугі

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(\alpha)}(x, y) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \exp(-\bar{\gamma}_k |x|) \bar{\chi}_k \right), \\ \sigma_{12}^{(\alpha)}(x, y) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \exp(-\bar{\gamma}_k |x|) \bar{g}_k \right), \\ \sigma_{22}^{(\alpha)}(x, y) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \bar{\gamma}_k^2 \exp(-\bar{\gamma}_k |x|) \bar{F}_k \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_1^{(\alpha)}(x, y) &= \operatorname{Re} \left(1/E_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \exp(-\bar{\gamma}_k |x|) \bar{u}_k \right) + u_0^{(\alpha)}, \\ u_2^{(\alpha)}(x, y) &= \operatorname{Re} \left(1/E_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \exp(-\bar{\gamma}_k |x|) \bar{v}_k \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} \chi_k &= \gamma_k^2 (2 - \kappa_k) \cos(\gamma_k y) - \gamma_k y \sin(\gamma_k y), \\ g_k &= \gamma_k^2 ((1 - \kappa_k) \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y)), \\ u_k &= \gamma_k (\kappa_k (v+1) - 2) \cos(\gamma_k y) + \gamma_k^2 y (v+1) \sin(\gamma_k y), \\ v_k &= -\gamma_k^2 y (v+1) \cos(\gamma_k y) + \gamma_k (\kappa_k (v+1) + 1 - v) \sin(\gamma_k y), \end{aligned}$$

v — коефіцієнт Пуассона.

Зазначимо, що визначені формулами (6) напруження задовольняють рівняння пружності (1), умови ненавантаженості бічних сторін (2), умови самозрівноваженості в кожному перерізі $x = \text{const}$

$$\int_{-1}^1 \sigma_{11}(x, y) dy = 0; \quad \int_{-1}^1 \sigma_{12}(x, y) dy = 0; \quad \int_{-1}^1 y \sigma_{11}(x, y) dy = 0$$

і згасають із віддаллю від межі півсмуг.

Для знаходження розв'язку залишилося визначити коефіцієнти розвинень $C_k^{(\alpha)}$ у формулах (6), (7). Виберемо дійсну $A_i^{(\alpha)}$ та уявну $B_i^{(\alpha)}$ частину цих коефіцієнтів таким чином, щоб забезпечити мінімум функціоналові

$$\begin{aligned} \Phi = & \left(\int_{-1}^1 [\sigma_{11}^{(1)}(0, y) - \sigma_{11}^{(2)}(0, y)] dy \right)^2 + \left(\int_{-1}^1 [\sigma_{12}^{(1)}(0, y) - \sigma_{12}^{(2)}(0, y)] dy \right)^2 + \\ & + \int_{-1}^1 [u_2^{(1)}(0, y) - u_2^{(2)}(0, y) - v(y)]^2 dy + \int_{-1}^1 [u_1^{(1)}(0, y) - u_1^{(2)}(0, y)]^2 dy \end{aligned} \quad (8)$$

Тут компоненти напружень та переміщень визначаються згідно формул (6), (7). Легко переконатися, мінімум функціонала (8) забезпечує справдження співвідношень (3) за нормою L_2 .

У результаті приходимо до такої матричної системи рівнянь стосовно чотирьох безмежних векторів-стовпчиків коефіцієнтів розвинення

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(\alpha)T} = & (A_1^{(\alpha)}, A_2^{(\alpha)}, A_3^{(\alpha)}, \dots), \quad \mathbf{B}^{(\alpha)T} = (B_1^{(\alpha)}, B_2^{(\alpha)}, B_3^{(\alpha)}, \dots) \\ & (\mathbf{M}^{11} + \mathbf{N}^{11}/E_1^2) \mathbf{A}^{(1)} + (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/E_1^2) \mathbf{B}^{(1)} - \\ & - (\mathbf{M}^{11} + \mathbf{N}^{11}/(E_1 E_2)) \mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/(E_1 E_2)) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{D}^{(11)}, \\ & (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/E_1^2) \mathbf{A}^{(1)} + (\mathbf{M}^{22} + \mathbf{N}^{22}/E_1^2) \mathbf{B}^{(1)} - \\ & - (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/(E_1 E_2)) \mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{M}^{22} + \mathbf{N}^{22}/(E_1 E_2)) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{D}^{(12)}, \\ & - (\mathbf{M}^{11} + \mathbf{N}^{11}/(E_1 E_2)) \mathbf{A}^{(1)} - (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/(E_1 E_2)) \mathbf{B}^{(1)} + \\ & + (\mathbf{M}^{11} + \mathbf{N}^{11}/E_2^2) \mathbf{A}^{(2)} + (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/E_2^2) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{D}^{(21)}, \\ & - (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/(E_1 E_2)) \mathbf{A}^{(1)} - (\mathbf{M}^{22} + \mathbf{N}^{22}/(E_1 E_2)) \mathbf{B}^{(1)} + \\ & + (\mathbf{M}^{12} + \mathbf{N}^{12}/E_2^2) \mathbf{A}^{(2)} + (\mathbf{M}^{22} + \mathbf{N}^{22}/E_2^2) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{D}^{(22)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут E_1, E_2 — модулі Юнга для півсмуг.

Коефіцієнти системи (9) є безмежними квадратними матрицями з компонентами

$$M_{km}^{ij} = \int_{-1}^1 (\chi_k^i \chi_m^j + g_k^i g_m^j) dy,$$

$$N_{km}^{ij} = \int_{-1}^1 (u_k^i u_m^j + v_k^i v_m^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_k^i dy \int_{-1}^1 u_m^i dy,$$

а елементи векторів-стовпчиків правої частини визначаються як

$$D_m^{(1i)} = \frac{1}{E_1} \int_{-1}^1 v(y) v_m^i dy, \quad D_m^{(2i)} = -\frac{1}{E_2} \int_{-1}^1 v(y) v_m^i dy. \quad (10)$$

У формулах (9) використано позначення

$$\chi_k^1 = \text{Re}(\chi_k), \chi_k^2 = \text{Im}(\chi_k); \quad g_k^1 = \text{Re}(g_k), g_k^2 = \text{Im}(g_k);$$

$$F_k^1 = \text{Re}(F_k), F_k^2 = \text{Im}(F_k);$$

$$u_k^1 = \text{Re}(u_k), u_k^2 = \text{Im}(u_k); \quad v_k^1 = \text{Re}(v_k), v_k^2 = \text{Im}(v_k).$$

Розв'язавши систему рівнянь (9), за формулами (6), (7) знайдемо компоненти напружень та переміщень у смугі.

Числові дослідження розв'язків прямої задачі здійснювали для випадку, коли функція стрибка переміщень має вигляд

$$v(y) = py; \quad (p = \text{const}). \quad (11)$$

Систему рівнянь (9) розв'язували методом редукції [10], обмежуючись кількістю членів у сумах $N = 10$.

Графіки на рис. 1 ілюструють залежності від координати y значень компонент тензорів напружень у півсмугі S_1 , віднесених до модуля Юнга, на різних відстанях від поверхні контакту $x = 0$. Криві 1, 2 та 3 відповідають значенням функцій при $x = 0,1$; $x = 0,4$ та $x = 0,7$.

Проведені числові дослідження показали, що напруження та переміщення, зумовлені стрибком переміщень, який діє на межі контакту півсмуг, практично згасають на віддальх від лінії контакту дещо більших половини ширини смуги. Така їх поведінка узгоджується з результатами досліджень, проведеними в роботі [3] для півбезмежної смуги із заданими на торці переміщеннями або самозрівноваженими силами. Це означає, що розвинений тут метод визначення напружень можна застосовувати на практиці до складених об'єктів, розміри кожної із частин яких в напрямку перпендикулярному до межі контакту не менші за їх товщину. Зокрема, пряма задача теорії пружності в такій постановці дозволяє оцінити для деяких видів зварювання розподіли залишкових зварювальних напружень в околі шва як за поперечною, так і за товщинною координатами. Крім того на основі отриманого розв'язку можна розрахувати параметри, які використовуються як вхідні дані в методах неруйнівного визначення напружень у таких

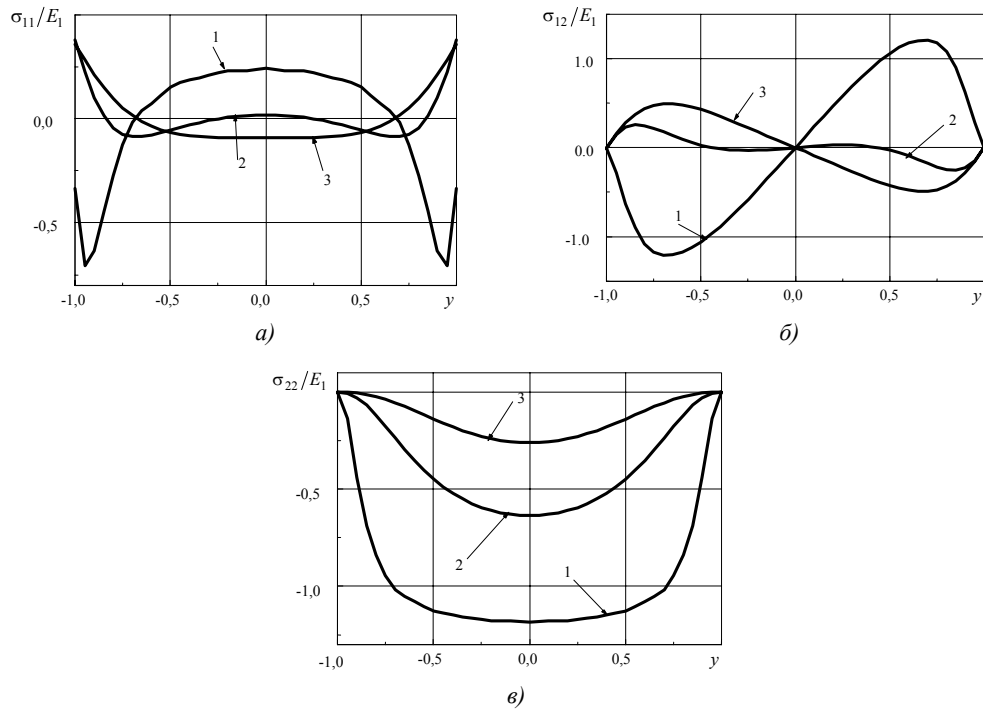


Рис. 1. Розподіл безрозмірних компонент напружень $\sigma_{11}^{(1)}$ — а), $\sigma_{12}^{(1)}$ — б) та $\sigma_{22}^{(1)}$ — в) у півсмузі $x > 0$

об'єктах, що базуються на застосуванні різних фізичних ефектів — фотопружності, акустопружності, магнітопружності тощо.

2. Обернена задача акустичної томографії напружень

Коли функція $v(y)$, що задає стрибок переміщень на лінії з'єднання півсмуг, наперед невідома, коректна постановка прямої контактної задачі теорії пружності неможлива. Тому розглянемо далі постановку оберненої задачі, яка моделює у деякому наближенні реалізацію неруйнівного ультразвукового методу визначення залишкових зварювальних напружень.

Виходитимемо зі спрощеної схеми зондування кусково-однорідної смуги імпульсами ультразвуку, які поширюються в напрямках, що лежать у площині плоскої симетрії, під деяким кутом φ до осі Ox_1 (рис. 2). При цьому напрям поширення імпульсу задається абсцисою ξ його входження в тіло та кутом φ .

Відомо [8, 9], що у цьому випадку час проходження $\Delta\tau(\xi, \varphi)$ імпульсу ультразвуку, поляризованого в напрямку осі Ox_3 , вздовж відрізка $L(\xi, \varphi)$ в напружено-деформованій смузі, пов'язаний із розподілом напружень на цьому напрямку інтегральним співвідношенням

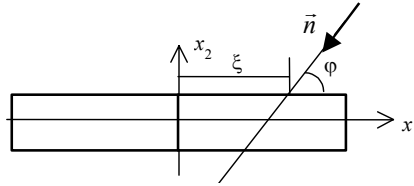


Рис. 2. Схема зондування кусково-однорідної смуги

$$A_1(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) + A_2((\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})\cos 2\varphi + 2\bar{\sigma}_{12}\sin 2\varphi) = \Delta\tau(\xi, \varphi), \quad (12)$$

де $\bar{\sigma}_{ij}$ — середньоінтегральні на відрізку $L(\xi, \varphi)$ компоненти напружень

$$\bar{\sigma}_{ij} \equiv \bar{\sigma}_{ij}(\xi, \varphi) = \frac{1}{L} \int_{-1/\sin\varphi}^{1/\sin\varphi} \sigma_{ij}(\xi + t\cos\varphi - ctg\varphi, t\sin\varphi) dt,$$

A_1, A_2 — акустопружні коефіцієнти, які визначаються через пружні модулі другого λ, μ та третього a, b, c порядків

$$A_1 = (2\mu(b + c/4) - \lambda c/4) / 4\mu^2(3\lambda + 2\mu), \quad A_2 = c/16\mu^2$$

$L(\xi, \varphi) = 2/\sin\varphi$ — безрозмірна довжина шляху, пройденого імпульсом у досліджуваному об'єкті.

У частковому випадку, коли зондування здійснюється лише у напрямках осі $0x_2$, інтегральне співвідношення (12) набуде вигляду

$$P^{(\alpha)} \int_{-1}^1 \sigma_{22}^{(\alpha)}(x, y) dy = \Delta\tau^{(\alpha)}(x), \quad (13)$$

де $P^{(\alpha)} = (4b^{(\alpha)}\mu^{(\alpha)} - \lambda^{(\alpha)}c^{(\alpha)}) / 16(\mu^{(\alpha)})^2(\lambda^{(\alpha)} + \mu^{(\alpha)})$.

Таким чином, визначаючи на основі даних акустичних вимірювань часи поширення $\Delta\tau(\xi, \varphi)$ імпульсів ультразвуку для деякої множини напрямків, які задаються параметрами (ξ_k, φ_k) , $k = \overline{1, n}$, де n — кількість напрямків зондування, отримуємо на основі формули (12) n інтегральних співвідношень на шукані компоненти тензора напружень

$$A_1(\bar{\sigma}_{11}(k) + \bar{\sigma}_{22}(k)) + A_2[(\bar{\sigma}_{11}(k) - \bar{\sigma}_{22}(k))\cos 2\varphi_k + 2\bar{\sigma}_{12}(k)\sin 2\varphi_k] = \Delta\tau(k), \quad (14)$$

де $\bar{\sigma}_{ij}(k) = \bar{\sigma}_{ij}(\xi_k, \varphi_k)$, $\Delta\tau(k) = \Delta\tau(\xi_k, \varphi_k)$, $(k = \overline{1, n})$.

Дані фізичних вимірювань, подані у вигляді (14), характерні для методів трансмісійної томографії скалярних полів [7]. Однак цих даних, вочевидь, недостатньо для відновлення напружено-деформованого стану смуги у всій повноті. Тому розглядатимемо їх разом із рівняннями (1) та частиною умов контакту (3), які априорі відомі

$$[\sigma_{11}(0, y)] = 0, [\sigma_{12}(0, y)] = 0, [u_1(0, y)] = 0. \quad (15)$$

За належного вибору множини напрямків зондування (ξ_k, φ_k) можна сподіватися, що отримана інформація, у поєднанні з інтегральними співвідношеннями акустопружності (14), буде достатньою, щоб компенсувати недоозначеність умов спряження (15) двох частин S_1 і S_2 кусково-однорідної смуги. Зрозуміло, що визначити функцію стрибка $v(y)$ безпосередньо із співвідношень (14) і в такий спосіб доозначити умови спряження (15) неможливо, тому розглянемо обернену задачу, яку сформулюємо так: знайти компоненти тензорів напружень $\sigma_{11}^{(\alpha)}, \sigma_{12}^{(\alpha)}, \sigma_{22}^{(\alpha)}$ та переміщень $u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}$ як функцій координат (x, y) , які згасають при $x \rightarrow \pm\infty$, задовольняють рівняння пружності (1) та умови (15) і узгоджуються в смислі найменших квадратів з інтегральними співвідношеннями (14). За розв'язок сформульованої оберненої задачі можна прийняти функції (6), (7), вибравши коефіцієнти розвинення в них так, щоб забезпечити мінімум функціонала [6]

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \int_{-1}^1 [\sigma_{11}^{(1)}(0, y) - \sigma_{11}^{(2)}(0, y)]^2 dy + \int_{-1}^1 [\sigma_{12}^{(1)}(0, y) - \sigma_{12}^{(2)}(0, y)]^2 dy + \\ & + \int_{-1}^1 [u_1^{(1)}(0, y) - u_1^{(2)}(0, y)]^2 dy + \int_{-\infty}^0 \left(P^{(1)} \int_{-1}^1 \sigma_{22}^{(1)}(x, y) dy - \Delta\tau^{(1)}(x) \right)^2 dx + \\ & + \int_0^{\infty} \left(P^{(2)} \int_{-1}^1 \sigma_{22}^{(2)}(x, y) dy - \Delta\tau^{(2)}(x) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (16)$$

У результаті знову приходимо до системи рівнянь, подібної до (9)

$$\begin{aligned} & (\mathbf{D}^{11} + \mathbf{R}^{11} + \mathbf{T}^{11} + \mathbf{U}^{11}/E_1^2) \mathbf{A}^{(1)} + (\mathbf{D}^{21} + \mathbf{R}^{21} + \mathbf{T}^{21} + \mathbf{U}^{21}/E_1^2) \mathbf{B}^{(1)} - \\ & - (\mathbf{R}^{11} + \mathbf{T}^{11} + \mathbf{U}^{11}/(E_1 E_2)) \mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{R}^{21} + \mathbf{T}^{21} + \mathbf{U}^{21}/(E_1 E_2)) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(11)}, \\ & (\mathbf{D}^{12} + \mathbf{R}^{12} + \mathbf{T}^{12} + 1/E_1^2 \mathbf{U}^{12}) \mathbf{A}^{(1)} + (\mathbf{D}^{22} + \mathbf{R}^{22} + \mathbf{T}^{22} + 1/E_1^2 \mathbf{U}^{22}) \mathbf{B}^{(1)} - \\ & - (\mathbf{R}^{12} + \mathbf{T}^{12} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{12}) \mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{R}^{22} + \mathbf{T}^{22} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{22}) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(12)}, \\ & - (\mathbf{R}^{11} + \mathbf{T}^{11} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{11}) \mathbf{A}^{(1)} - (\mathbf{R}^{21} + \mathbf{T}^{21} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{21}) \mathbf{B}^{(1)} + \\ & + (\mathbf{R}^{11} + \mathbf{T}^{11} + \mathbf{H}^{11} + 1/E_2^2 \mathbf{U}^{11}) \mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{R}^{21} + \mathbf{T}^{21} + \mathbf{H}^{21} + 1/E_2^2 \mathbf{U}^{21}) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(21)}, \\ & - (\mathbf{R}^{12} + \mathbf{T}^{12} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{12}) \mathbf{A}^{(1)} - (\mathbf{R}^{22} + \mathbf{T}^{22} + 1/(E_1 E_2) \mathbf{U}^{22}) \mathbf{B}^{(1)} - \\ & - (\mathbf{R}^{12} + \mathbf{T}^{12} + \mathbf{H}^{12} + 1/E_2^2 \mathbf{U}^{12}) \mathbf{A}^{(2)} - \\ & - (\mathbf{R}^{22} + \mathbf{T}^{22} + \mathbf{H}^{22} + 1/E_2^2 \mathbf{U}^{22}) \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(22)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут введено наступні позначення для елементів матриць коефіцієнтів системи та векторів правих частин

$$\begin{aligned}
 H_{km}^{ij} &= \int_0^{\infty} \xi_k^i(y) \xi_m^j(y) dy, & D_{km}^{ij} &= \int_{-\infty}^0 \zeta_k^i(y) \zeta_m^j(y) dy, & T_{km}^{ij} &= \int_{-1}^1 g_k^i(y) g_m^j(y) dy, \\
 R_{km}^{ij} &= \int_{-1}^1 \chi_k^i(y) \chi_m^j(y) dy, & U_{km}^{ij} &= \int_{-1}^1 u_k^i(y) u_m^j(y) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_k^i dy \int_{-1}^1 u_m^j dy, \\
 Q_m^{(1i)} &= \int_{-\infty}^0 \tau^{(1)}(x) \zeta_m^i(y) dy, & Q_m^{(2i)} &= \int_0^{\infty} \tau^{(2)}(x) \xi_m^i(y) dy, \\
 \zeta_k(x) &= P^{(1)} \exp(\gamma_k x) \int_{-1}^1 F_k(y) dy, & \zeta_k^1(x) &= \operatorname{Re}(\zeta_k(x)), & \zeta_k^2(x) &= \operatorname{Im}(\zeta_k(x)), \\
 \xi_k(x) &= P^{(2)} \exp(-\gamma_k x) \int_{-1}^1 F_k(y) dy, & \xi_k^1(x) &= \operatorname{Re}(\xi_k(x)), & \xi_k^2(x) &= \operatorname{Im}(\xi_k(x)). \quad (18)
 \end{aligned}$$

При числовому дослідженні оберненої задачі обмежувалися випадком зондування в напрямках осі $0x_2$ і використовували числовий експеримент. З цією метою на основі розв'язку прямої задачі, отриманого для умов (3), (11), за формулами (13) розраховувались значення часів затримки $\Delta\tau^{(\alpha)}(k)$, ($k=\overline{1, n}$; $\alpha=1, 2$) для заданих напрямків просвічування x_k . Отримані у такий спосіб результати використовувалися як вхідні дані для оберненої задачі.

Система рівнянь (17) розв'язувалась методом редукції. Збіжність розв'язку оцінювалась за значенням функціонала Φ_I . Для оцінки істинної похибки обчислювали значення функціонала (8) на знайденому розв'язку оберненої задачі. При цьому параметр $\varepsilon = (\Phi)^{1/2}$ визначає середньоквадратичне відхилення на межі $x=0$ знайденого розв'язку оберненої задачі від розв'язку відповідної прямої задачі, за яким розраховувались вхідні дані для оберненої задачі. Проведені числові дослідження показали, що зі зростанням кількості членів у розвиненнях (6), (7) похибка $\varepsilon_I = (\Phi_I)^{1/2}$ спадає значно швидше, ніж істинна похибка ε . Так для $n=7$ похибка $\varepsilon_I = 0,0002$, а $\varepsilon = 0,045$.

Висновки. Розвинений у праці [3] варіаційний підхід до розв'язування прямих і обернених задач для півбезмежної смуги з ненавантаженими сторонами та заданими на торці переміщеннями або самозрівноваженими силами реалізований тут для кусково-однорідної смуги у випадку, коли на межі контакту двох півсмуг заданий стрибок дотичних переміщень. До такої задачі можна звести, наприклад, задачі про нагрів кусково-однорідної смуги або поздовжній розтяг силами, прикладеними на безмежності. У певному наближенні пряма та обернена задачі,

що розглядалися, моделюють залишкові напруження, які виникають у пластинах при деяких видах зварювання, для яких характерною є достатньо вузька зона термічного впливу. Тож, отримані розв'язки прямої задачі дозволяють оцінити розподіли залишкових напружень в околі зварного шва для таких випадків як за поздовжньою, так і за поперечною координатами. Важливе значення має отриманий розв'язок прямої задачі теорії пружності для кількісної оцінки параметрів, які використовуються як вхідні дані для обернених задач у різних методах неруйнівного визначення полів напружень і деформацій, що реалізуються на основі фізичних ефектів фотопружності, акустопружності, магнітопружності тощо. Тут, зокрема, була розв'язана так звана пряма задача акустичної томографії двовимірного тензорного поля напружень — на основі розв'язку прямої задачі теорії пружності обчислені значення часів поширення імпульсів ультразвуку вздовж заданих напрямків. Проведені числові дослідження розв'язків прямої та оберненої задач показали, що запропоновані формулювання цих задач та розвинені варіаційні методи їх розв'язування можна використовувати для створення засобів неруйнівного визначення розподілів компонент тензорів напружень і деформацій у кусково-однорідних об'єктах на основі даних їх зондування імпульсами ультразвуку.

Розвинені тут методи розв'язування прямої та оберненої задач можна поширити і на випадки, коли на межі півсмуг задані інші умови, зокрема, — задані стрибки не дотичних, а нормальних складових переміщень, стрибки компонент напружень або їх комбінації, можна також розглядати відповідні антисиметричні задачі тощо. Для практичного застосування розробленого математичного апарату важливо дослідити збіжність методу за різних умов на межі півсмуг.

Література

- [1] Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочник / Клюев В. В., Соснин Ф. Р., Филинов В. Н. и др. Под ред. Клюева В. В. — М.: Машиностроение, 1995. — 488 с.
- [2] Биргер И. А. Остаточные напряжения. — М.: Машгиз., 1963. — 232 с.
- [3] Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Механика твердого тела. — 1999. — № 2. — С. 58-69.
- [4] Чекурин В. Ф. Вариационный метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1999. — Т. 35, № 5.— С. 23-32.
- [5] Чекурин В. Ф. Об одном подходе к решению задач томографии напряженного состояния упругих тел с несовместными деформациями // Изв. РАН: Механика твердого тела. — 2000. — № 6.— С. 38-48.
- [6] Чекурин В. Ф. Математичні проблеми томографії тензорних полів у твердих тілах із залишковими напруженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 133-148.
- [7] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990. — 280 с.
- [8] Чекурин В. Ф., Кравчишин О. З. Обернена задача неруйнівного визначення залишкових напружень у кусково-однорідній смузі методом акустопружності // Мате-

- ріали конф. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”. — Львів: 2003. — С. 396-397.
- [9] Chekurin V. F., Kravchyshyn O. Z. Inverse problem for acoustical tomography of stress fields in piecewise-homogeneous strip // Proc. of VIII–Th Intern Seminar / Workshop on Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED — 2003). — Lviv: 2003. — P. 194-198.
- [10] Кантарович А. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: ГИЗФМЛ, 1962. — 708 с.

Direct and Inverse Problems of Tensor Fields Tomography in Piecewise-Homogeneous Strip

Vasyl Chekurin, Oksana Kravchyshyn

Direct and inverse problem of tomography of 2D tensor fields of strains and stresses in piecewise elastic strip have been considered. It is assumed that the stress-strained state in the strip is caused by displacements jumps localized on the interface boundary divided in to semistrips having different elastic properties. In the inverse problem the displacement jumps are not a priori known, instead values of linear integrals for a set off directions across the strip are given. These values can be determined on the base of acoustic measurement data. A method to solve the problems based on expansion the solutions in full system of functions which satisfy the equations of elasticity in the body volume and the free boundary conditions on the strip sides has been realized. The expansion coefficients are chosen to minimize the functionals that determine the mean-square deviation of the solution from the jump conditions given on the interface boundary (in the case of direct problem) or from measured data (in the case of inverse problem).

Прямая и обратная задачи томографии тензорного поля в кусочно-однородной полосе

Василий Чекурин, Оксана Кравчишин

Рассматриваются прямая и обратная задачи определения двухмерного напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной полосы, обусловленного скачками перемещений на поверхности контакта разнородных частей. В обратной задаче скачки перемещений априори неизвестны, вместо этого заданы линейные интегралы от искомого компонента напряжений вдоль некоторого множества направлений. Значения этих интегралов можно определить, основываясь на данных акустических измерений. Реализован метод решения задач, который базируется на представлении искомого решения по полной системе функций, которые удовлетворяют уравнения теории упругости в объеме тела и условия ненагружения сторон полосы. Коэффициенты разложений находятся из условия минимума функционалов, которые определяют среднеквадратические отклонения полученного решения на границе двух полуполос от заданных условий контакта (прямая задача) или от всех заданных значений линейных интегралов (обратная задача).

Отримано 20.08.04