

## Числове моделювання процесів високотемпературної індукційної обробки нелінійних електропровідних тіл

Богдан Дробенко

к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept13@iapmm.lviv.ua

*З використанням методу скінченних елементів і сім'ї простих однокрокових алгоритмів запропонована методика числового моделювання процесу індукційної обробки електропровідних осесиметричних тіл з урахуванням температурної залежності фізико-механічних властивостей матеріалу, пружно-пластичного характеру деформування та нелінійної залежності індукції магнітного поля від його напруженості. Як приклад розглянуто процес індукційної обробки скінченного сталевого циліндра.*

**Ключові слова:** індукційний нагрів, зв'язані поля, метод скінченних елементів.

**Вступ.** Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують у сучасних технологіях обробки твердих тіл, зокрема, при їх індукційному нагріві з метою підвищення параметрів міцності й надійності. У більшості відомих з літератури сучасних робіт в області індукційного нагріву механічні процеси, як правило, не розглядають [1-5]. У роботах [6, 7] враховано термомеханічні процеси, спричинені індукційним нагрівом, але при цьому характеристики матеріалу приймалися постійними, а процес деформування — пружним. Однак індукційна обробка, зазвичай, відбувається за високих температур, і її характерною особливістю є суттєва нелінійність поведінки матеріалів у діапазоні температур нагрівання-охладження. Так, конструкційні низьковуглецеві сталі внаслідок залежності межі пружності від температури вже при температурах 550-600°C деформуються здебільшого пластично [8]. Їх електропровідність у діапазоні температур від 20°C до 1000°C може змінюватись на порядок [9]. Магнітна проникність феромагнітних тіл різко зменшується в околі температури Кюрі, і тіла втрачають свої феромагнітні властивості, а їхнє нагрівання суттєво сповільнюється. Необхідність врахування вказаних особливостей приводить до складних для аналітичного дослідження математичних моделей. Тому виникає практична потреба у створенні засобів математичного і числового моделювання процесів індукційної обробки нелінійних електропровідних тіл.

У роботі на основі побудованої раніше математичної моделі [10] з використанням методу скінченних елементів і сім'ї простих однокрокових різницевих алгоритмів [11] запропоновано методику числового моделювання зумовлених

дією зовнішнього ЕМП електромагнітних, теплових і механічних полів в електропровідних термочутливих тілах з урахуванням термопружно-пластичного характеру їх деформування і нелінійної залежності між індукцією магнітного поля та його напруженістю. Розроблено відповідне програмне забезпечення і проаналізовано процес високотемпературної індукційної обробки скінченного сталюого циліндра з метою його приповерхневого зміцнення. Досліджено збіжність запропонованих числових схем і достовірність отриманих результатів.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо електропровідне осесиметричне тіло за умов дії квазіусталеного ЕМП, яке збуджує розподілена у скінченній коаксіальній з тілом підобласті зовнішнього середовища система струмів  $\vec{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, j_{\phi}^{(0)}(r, z, t), 0)$  ( $r, \phi, z$  — циліндричні координати). Визначимо зумовлені цією дією електромагнітне й температурне поля та напружений стан тіла. Вважаємо, що в області тіла сторонні електричні заряди й струми відсутні, електромеханічні, термоелектричні й магнітострикційні ефекти несуттєві, а вектори індукції й напруженості магнітного поля — паралельні.

Електромагнітне й температурне поля за визначальних співвідношень

$$\vec{B}^{(1)} = \vec{B}_*(\vec{H}^{(1)}, T), \vec{j}^{(1)} = \gamma \vec{E}^{(1)}, \vec{B}^{(0)} = \mu_0 \vec{H}^{(1)}, \vec{D}^{(0)} = \varepsilon_0 \vec{E}^{(0)} \quad (1)$$

описує така система рівнянь [10]

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\phi}^{(1)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_{\phi}^{(1)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} E_{\phi}^{(1)} + \gamma \frac{\partial E_{\phi}^{(1)}}{\partial t} = F_p, \quad (2)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \gamma E_{\phi}^{(1)2}, \quad (r, z) \in V \quad (3)$$

в області тіла та

$$-\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\phi}^{(0)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_{\phi}^{(0)}}{\partial z} \right) \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_{\phi}^{(0)}}{\partial t^2} = -\frac{\partial j_{\phi}^{(0)}}{\partial t}, \quad (4)$$

в області зовнішнього середовища, де величини з індексом  $m = 0$  стосуються зовнішнього середовища, а з індексом  $m = 1$  — тіла;  $\vec{H} = (H_r(r, z, t), 0, H_z(r, z, t))$ ,  $\vec{E} = (0, E_{\phi}(r, z, t), 0)$  — вектори напруженості, а  $\vec{B} = (B_r(r, z, t), 0, B_z(r, z, t))$ ,  $\vec{D} = (0, D_{\phi}(r, z, t), 0)$  — індукції магнітного й електричного полів;  $\vec{B}_*(\vec{H}^{(1)}, T)$  — функція, яка задає зв'язок між вектором індукції й напруженості магнітного поля у тілі;  $\vec{j}$  — густина струму;  $\mu$  — диференціальна магнітна

проникність тіла;  $\epsilon_0, \mu_0$  — діелектрична та магнітна проникності вакууму;  $\gamma = \gamma(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$  — коефіцієнти електро- і теплопровідності тіла;  $c = c(T)$  — об'ємна теплоємність;

$$F_p = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right).$$

Задача визначення температури в тілі і напруженості електричного поля в системі тіло — зовнішнє середовище зводиться до розв'язування системи рівнянь (2)-(3) для області тіла й (4) для зовнішнього середовища за заданого початкового розподілу температури  $T_0(r, z)$  у тілі, нульових початкових умов на напруженість електричного поля, умов

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} n_r + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) + \beta(T - T_S) = 0, \quad (5)$$

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(0)}, \quad (6)$$

$$\left( \mu^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(1)})}{\partial r} - \mu_0^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} \right) n_r + \left( \mu^{-1} \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} - \mu_0^{-1} \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} \right) n_z = 0 \quad (7)$$

на поверхні розділу тіла і зовнішнього середовища та умов

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} n_r + \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} n_z \xrightarrow{r, z \rightarrow \infty} 0, \quad E_\varphi^{(m)}(0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

відповідно на нескінченості й на осі  $0z$  (останню умову враховуємо лише для точок осі, які належать тілу). Тут  $\beta = \beta(T)$  — коефіцієнт тепловіддачі;  $T_S$  — температура зовнішнього середовища;  $\vec{n} = (n_r, n_z)$  — вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ . Складові вектора індукції магнітного поля у тілі визначаємо за формулами

$$B_r^{(1)} = \int_0^t \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} dt', \quad B_z^{(1)} = - \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(1)})}{\partial r} dt', \quad (9)$$

а напруженість магнітного поля і диференціальну магнітну проникність у тілі — за допомогою феноменологічних співвідношень (1).

Зазначимо, що при формулюванні задачі визначення ЕМП за розрахункову функцію вибрано напруженість  $\vec{E}$  електричного поля. Якщо аналогічно звести рівняння Максвелла до еквівалентних рівнянь відносно напруженості  $\vec{H}$  магнітного поля, замість одного рівняння (2) отримаємо два (відносно компонент  $H_r(r, z, t)$  і  $H_z(r, z, t)$ ). Однак, при розгляді довгого циліндричного тіла, за умов дії незалежного від координати  $z$  усталеного ЕМП, залишається лише одна ненульова складова  $H_z$  вектора  $\vec{H}$ , для визначення якої отримаємо рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} \right) - \mu \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial B_{\kappa z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \left( E_{\varphi}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} \right). \quad (10)$$

За відомого значення  $H_z^{(1)}$  при  $r = R$  визначення температури й параметрів, які описують ЕМП у тілі, зводиться до розв'язування рівнянь (10) та

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \quad (11)$$

за нульових початкових умов на  $H_z^{(1)}$ , початкової температури  $T_0(r, z)$  у тілі, умов конвективного теплообміну (5) на поверхні циліндра (при  $r = R$ ) й умов

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (12)$$

для суцільного циліндричного тіла [12] та

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \beta_a (T - T'_S) = 0, \quad \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} = \frac{R_a \mu_0 \gamma}{2} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_a \quad (13)$$

для порожнистого циліндра ( $R_a$  — внутрішній радіус).

Відповідно до запропонованої розрахункової схеми силовий вплив ЕМП на тіло зводиться до дії об'ємних (пондеромоторних) сил [6], з яких відмінними від нуля залишаються лише сили Ампера  $\vec{F}^A$  та сили  $\vec{F}^M$  впливу поля на молекулярні струми, компоненти яких визначаємо за формулами

$$F_r^A = \gamma E_{\varphi}^{(1)} B_z^{(1)}; \quad F_r^M = \left( \frac{1}{\mu_0} B_r^{(1)} - H_r^{(1)} \right) \frac{\partial B_r^{(1)}}{\partial r} + \left( \frac{1}{\mu_0} B_z^{(1)} - H_z^{(1)} \right) \frac{\partial B_z^{(1)}}{\partial r}; \quad (14)$$

$$F_z^A = -\gamma E_{\varphi}^{(1)} B_r^{(1)}; \quad F_z^M = \left( \frac{1}{\mu_0} B_z^{(1)} - H_z^{(1)} \right) \frac{\partial B_z^{(1)}}{\partial z} + \left( \frac{1}{\mu_0} B_r^{(1)} - H_r^{(1)} \right) \frac{\partial B_r^{(1)}}{\partial z}. \quad (15)$$

Отримані з розв'язків задачі електродинаміки й теплопровідності температурне поле та об'ємні сили  $\vec{F} = \vec{F}^A + \vec{F}^M$  є вхідними для задачі визначення полів переміщень, деформацій і напружень у тілі.

Напружений стан проаналізуємо з використанням співвідношень неізотермічної пружно-пластичної течії [13], відповідно з якими процес деформування розглядаємо покроково. Пондеромоторні сили й розподіли температури в тілі, починаючи від заданих величин при  $t = 0$ , змінюємо на відповідні прирости на кожному кроці навантаження так, щоби на завершення процесу деформування вони досягли своїх кінцевих значень. На кожному кроці за заданими приростами цих сил і температури визначаємо прирости переміщень, деформацій і напру-

жень, які підсумовуємо з отриманими на попередніх кроках. Проходячи так крок за кроком, як наслідок, отримуємо історію зміни термомеханічного стану тіла.

Прирости переміщень  $\vec{u} = (u_r, u_z)^T$ , деформацій  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{rz})^T$  та напружень  $\vec{\sigma} = (\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz})^T$  на кроці  $[t, t + \Delta t]$  навантаження визначаємо із системи рівнянь [13]

$$d\vec{\sigma} = \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot (d\vec{\varepsilon} - d\vec{\varepsilon}_T) + d\mathbf{C} \cdot (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_T - \vec{\varepsilon}_p) + \vec{Z}dT, \quad (16)$$

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot \vec{u}, \quad (17)$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \vec{\sigma} + \vec{F} = 0 \quad (18)$$

та відомих граничних умов у переміщеннях і напруженнях

$$(\mathbf{S}_n \cdot \vec{\sigma} - \vec{p})|_{S_\sigma} = 0; \vec{u}|_{S_u} = \vec{u}^{(0)}, S_u \cup S_\sigma = S, S_u \cap S_\sigma = \emptyset, \quad (19)$$

де компоненти тензорів деформацій і напружень зібрані у вектори для зручності при числовій реалізації схеми методу скінчених елементів;  $\mathbf{C}$ ,  $d\mathbf{C}$  — матриці “пружно-пластичних” модулів та їхніх приростів за крок навантаження (індекс “ $t + \Delta t$ ” означає, що величини обчислюються в момент часу  $t + \Delta t$ , тобто наприкінці кроку навантаження);  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{\varepsilon}_T$ ,  $\vec{\varepsilon}_p$  — повні, температурні та пластичні деформації;  $\mathbf{A}$  — матриця диференціального оператора геометричних співвідношень осесиметричної теорії пружності (індекс “ $T$ ” означає операцію транспонування);  $\vec{Z}$  — вектор, який характеризує залежність межі пружності матеріалу від температури;  $\mathbf{S}_n$  — матриця напрямних косинусів;  $\vec{p}$ ,  $\vec{u}^{(0)}$  — відповідно вектори зовнішнього силового навантаження на поверхні  $S_\sigma$  і переміщень на поверхні  $S_u$ .

Таким чином, напружений стан електропровідного тіла за умов дії зовнішнього ЕМП визначаємо за два етапи. На першому — зі зв’язаної задачі електродинаміки й теплопровідності визначаємо температуру й параметри, які характеризують ЕМП у тілі. На другому етапі при відомій температурі та пондеромоторних силах (обчислених на основі параметрів, які характеризують ЕМП) із системи рівнянь рівноваги (18), геометричних співвідношень (17), рівнянь стану (16) та граничних умов (19) визначаємо переміщення, деформації й напруження.

## 2. Методика розв’язування

Побудуємо розв’язок сформульованої задачі з використанням методу скінчених елементів у варіанті методу зважених залишків [14]. Запишемо визначальні співвідношення методу для задачі (1)-(9). Для цього домножимо рівняння (3) на довільну вагову функцію  $w$  з простору Соболева  $H^1(V)$  і проінтегруємо отримане співвідношення по області  $V$ , яку займає електропровідне тіло. Після використання формули Гріна з урахуванням умови теплообміну (5) отримаємо

$$\int_V \left( c \frac{\partial T}{\partial t} w + \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - j_\varphi^{(1)} E_\varphi^{(1)} w \right) r dr dz + \int_S \beta (T - T_c) w r d\xi = 0. \quad (20)$$

Застосуємо цей підхід також до рівнянь (2) і (4), попередньо замінивши нескінченний простір на скінченну область  $V_*$  ( $V \subset V_*$ ), обмежену поверхнею  $S_*$  достатньо віддаленою від тіла й заданих струмів. Після використання формули Гріна з урахуванням умов (6) і (7) отримуємо для області  $V_*$  співвідношення [10]

$$\int_{V_*} \mu_c^{-1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_1)}{\partial r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{V_*} \left( \gamma_t E_\varphi + F_c \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \varepsilon_c \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} + F_d \right) w_1 r dr dz = 0 \quad \forall w_1 \in H^1(V_*), \quad (21)$$

де  $H^1(V_*) = \{w \in H^1(V_*): w = 0 \quad \forall (0, z) \in V_*\}$ ;

$$\mu_c = \mu; \varepsilon_c = 0; \gamma_t = \frac{\partial \gamma}{\partial t}; F_c = \gamma; F_d = -F_p; E_\varphi = E_\varphi^{(1)}, \text{ якщо } (r, z) \in V;$$

$$\mu_c = \mu_0; \varepsilon_c = \varepsilon_0; \gamma_t = 0; F_c = 0; F_d = \frac{\partial j_\varphi}{\partial t}; E_\varphi = E_\varphi^{(0)}, \text{ якщо } (r, z) \in V_* \setminus V.$$

Виконаємо стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації співвідношень (20) і (21) за просторовими змінними [14]. Як наслідок, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{L}_1 \cdot \{\dot{T}_h(t)\} + \mathbf{L}_0 \cdot \{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}, \quad (22)$$

$$\mathbf{M}_2 \cdot \{\ddot{E}_h(t)\} + \mathbf{M}_1 \cdot \{\dot{E}_h(t)\} + \mathbf{M}_0 \cdot \{E_h(t)\} = \{f_E\}, \quad \{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0 \quad (23)$$

відносно значень температури  $\{T_h\}$  і напруженості електричного поля  $\{E_h\}$  у вузлах поділу. Матрично-векторні характеристики записаної системи рівнянь обчислюються шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих елементів [10].

Задачу Коші (22)-(23) розв'язуємо з використанням сім'ї простих однокрокових багатопараметричних алгоритмів, відомих як метод Зенкевича-Вуда [11]. При цьому залежності електрофізичних і теплофізичних характеристик від температури, а також залежності індукції магнітного поля від напруженості апроксимуємо інтерполяційними сплайнами, побудованими на основі реальних кривих, які описують поведінку тіла в ЕМП.

Скінченно-елементні співвідношення задачі пружно-пластичності отримуємо після підстановки фізичних (16) і геометричних (17) співвідношень у рівняння рівноваги (18) і застосування стандартної процедури методу зважених залишків та введення відповідних скінченно-елементних апроксимацій. Остаточні ці рівняння відносно приростів  $d\vec{q}$  вузлових переміщень мають вигляд [10]

$$\mathbf{K} \cdot d\vec{q} = d\vec{F} + d\vec{P} + d\vec{R}, \quad (24)$$

де матрично-векторні характеристики  $\mathbf{K}$ ,  $d\vec{F}$ ,  $d\vec{P}$ ,  $d\vec{R}$  отримуємо шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих елементів

$$\mathbf{K}^{el} = \int_{V^{el}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}^{t_j + \Delta t_j} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} r dr dz \quad (\mathbf{N} - \text{матриця функцій форми елемента});$$

$$d\vec{P}^{el} = \int_{V^{el}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot (d\mathbf{C} \cdot (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}_T - \vec{\varepsilon}_p) + \vec{Z}dT) r dr dz + \int_{S_\sigma^{el}} \mathbf{N}^T d\vec{p} r d\xi;$$

$$d\vec{R}^{el} = \int_{V^{el}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \cdot d\vec{\varepsilon}_T r dr dz; \quad d\vec{F}^{el} = \int_{V^{el}} \mathbf{N}^T \cdot d\vec{F} r dr dz.$$

Рівняння (24) розв'язуємо методом змінних параметрів жорсткості [14].

На основі запропонованої методики створено відповідне програмне забезпечення і розв'язано низку задач.

### 3. Індукційна обробка скінченного циліндра

Розглянемо, як приклад, процес індукційного нагріву вільного від зовнішнього механічного навантаження циліндра радіуса  $R$  й довжини  $2L$ . Циліндр перебуває у коаксіальному з ним індукторі, який моделює циліндрична поверхня радіуса  $R_i$  й довжини  $2L_i$  за заданою в ній густини струму частоти  $\omega$

$$\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, J_0 \sin(2\pi\omega t), 0); \quad r = R_i, |z| \leq L_i. \quad (25)$$

Відповідно до запропонованої методики вводимо скінченну циліндричну область  $V_*$  радіуса  $R_0 > R_i$  й довжини  $2L_0 > 2L_i$  ( $2L_0 > 2L$ ), для якої будемо відповідну скінченно-елементну модель із використанням ізопараметричних біквадратичних кільцевих елементів [14]. Для дослідження впливу величини цієї області на отримувані розв'язки проведено обчислювальний експеримент для різних значень  $R_0$  та  $L_0$ . Для оцінки збіжності й точності числових схем, достовірності отриманих результатів і визначення раціональних параметрів дискретної моделі використовувались різні за густиною скінченно-елементні поділи та кроки інтегрування за часом. Отримані результати порівнювались між собою, а також із відомими аналітичними розв'язками.

**3.1. Циліндр з магнітної сталі X18H9T.** У роботі [7] розв'язано задачу про індукційний нагрів довгого циліндра зі сталі X18H9T. Розглянемо цю ж задачу для скінченного циліндра ( $R = 0,01$  м;  $L = 0,04$  м), який нагрівається струмом (25) із параметрами  $J_0 = 6 \cdot 10^4$  А/м<sup>2</sup>;  $\omega = 3 \cdot 10^5$  Гц ( $R_i = 0,015$  м;  $L_i = 0,042$  м).

Аналіз отриманих результатів показує, що у центральній частині циліндра розв'язки практично не залежать від координати  $z$ ; крайовий ефект найбільш

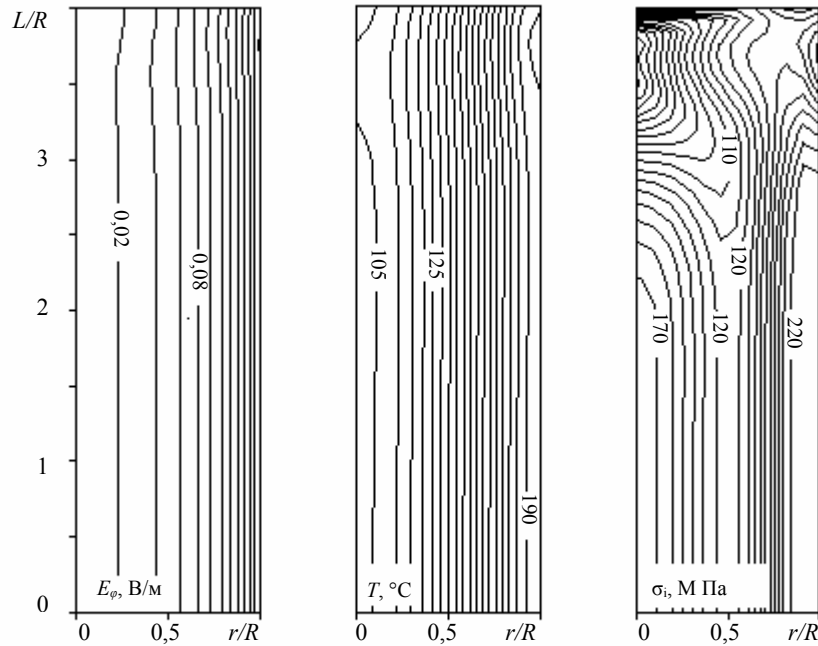


Рис. 1. Ізолнії напруженості електричного поля, температури та інтенсивності напружень у момент вимкнення індуктора [7] ( $t = 7,1$  с)

виражений для напружень і охоплює область порядку  $1,5R$  (див. рис. 1). На рис. 2 приведені графіки радіальних  $\sigma_{rr}$ , осевих  $\sigma_{zz}$  та кільцевих  $\sigma_{\varphi\varphi}$  напружень у центральній частині циліндра. Для порівняння штриховими лініями на цьому ж рисунку показано розподіли напружень, отримані аналітично в роботі [7]. Таке узгодження результатів отримано вже при п'яти біквадратичних ізопараметричних елементах [14] уздовж радіуса циліндра й кроку інтегрування рівнянь електродинаміки за часом  $\Delta t_E = \omega^{-1}/16$ .

Зазначимо, що при  $R_0 > 2,5R, L_0 > 2L$  всі розв'язки співпадають між собою, а також практично тотожні (в межах 1%) у перерізі  $z=0$  з розв'язками одновимірної задачі [7] і задачі (10)-(12) для довгого циліндра у разі задання на його поверхні граничної умови  $H_z = J_0 \sin(2\pi\omega t)$  А/м. Із зменшенням параметрів  $R_0 < 2,5R, L_0 < 2L$  розв'язки починають відрізнятись.

**3.2. Циліндр із феромагнітної сталі С30.** Фізико-механічні характеристики сталі та їх залежності від температури приведені у [9, 12, 15, 16]. Циліндр із тими ж геометричними розмірами, що і в підпункті 3.1, і початковою температурою  $T_0 = T_S = 20^\circ\text{C}$  нагрівали струмом (25) ( $J_0 = 10^6$  А/м<sup>2</sup>;  $\omega = 8 \cdot 10^3$  Гц). Коли у перерізі  $z=0$  зовнішній шар циліндра товщиною 1,5 мм нагрівся до температури



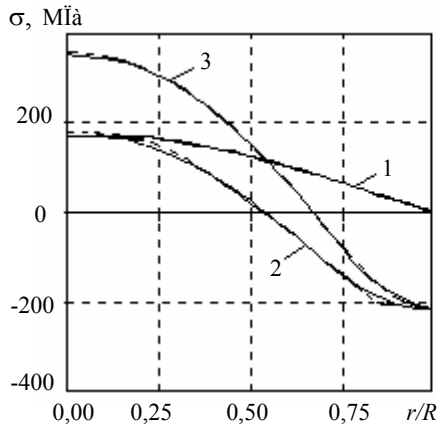


Рис. 2. Розподіл напружень у циліндрі вздовж радіусу (у перерізі  $z = 0$ ) у момент вимкнення індуктора

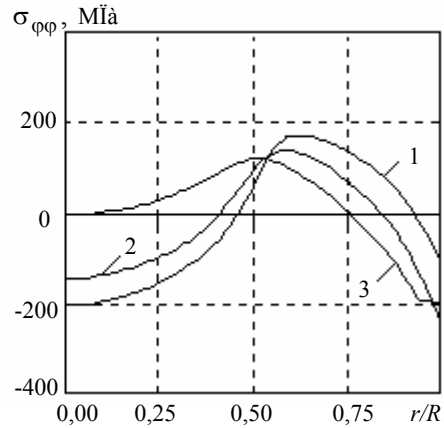


Рис. 3. Залишкові напруження у циліндрі з врахуванням термочутливості й феромагнітних властивостей і без

$T \geq 970^\circ\text{C}$ , струм вимкнули, і тіло охолоджувалося через теплообмін із зовнішнім середовищем з коефіцієнтом  $\beta = 10^4 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$  (при нагріванні  $\beta = 13 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ).

Аналіз результатів показав, що з нагріванням зовнішніх шарів циліндра до температури Кюрі ( $770^\circ\text{C}$ ) і втратою ними феромагнітних властивостей максимальні значення питомої потужності джерел зміщуються в глибину циліндра, і основне тепловиділення відбувається там, де матеріал ще не втратив феромагнітних властивостей. При цьому з нагріванням тіла глибина проникнення магнітного поля зростає, а швидкість нагрівання падає. Розподіли температури, отримані з врахуванням температурної залежності електрофізичних характеристик, вже при  $300^\circ\text{C}$  починають відрізнятися від розподілів, обчислених для середніх за проміжок нагрівання характеристик. З подальшим нагріванням ця відмінність зростає ще більше.

На початку нагрівання в поверхневому шарі виникають стискаючі напруження, які швидко досягають межі пружності. З нагріванням поверхні до температури Кюрі область максимальних стискаючих напружень пересувається всередину циліндра. За цих умов поверхневий шар починає розвантажуватися. З досягненням необхідної глибини прогрівання, струм вимикаємо і поверхневий шар починає швидко охолоджуватися. У ньому виникають напруження розтягу. Внутрішні шари охолоджуються повільніше. При охолодженні вони скорочуються у розмірах і стягають швидко охолоджений поверхневий шар, послаблюючи в ньому напруження розтягу, максимум яких зміщується від поверхні в глибину циліндра. У поверхневому шарі внаслідок цього формуються стискаючі залишкові напруження (рис. 3, крива 1). На рис. 3 для порівняння приведені залишкові напруження, обчислені без врахування феромагнітних властивостей сталі (з усередненою магнітною проникністю; крива 2), а також із постійними, усередненими

ми на інтервалі температур нагрівання-охолодження, механічними характеристиками (крива 3).

Зазначимо, що у разі інтенсивних магнітних полів (з амплітудою більшою за  $10^5$  А/м), впливом пондеромоторних сил можемо знехтувати. За цих умов максимальні значення силових напружень, зумовлених об'ємними (пондеромоторними) силами, складають величину менше 1% від аналогічних температурних.

Отримані результати узгоджуються з відомими експериментальними даними про сповільнення нагрівання з досягненням температури Кюрі й кінетику формування залишкових напружень за умов індукційного нагріву сталевих тіл [8].

**Висновки.** Розглянута у роботі методика моделювання електромагнітних, теплових і термомеханічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП дозволяє адекватно прогнозувати реальну поведінку виробів із магнітних матеріалів у широкому температурному діапазоні і враховувати її для автоматизації індукційної обробки, зокрема, отримати оцінку залишкових напружень, які є вихідними для розробки режимів експлуатації виробів.

При моделюванні процесів високотемпературного індукційного нагріву виробів із феромагнітних сталей необхідно враховувати температурну залежність характеристик матеріалу. Нехтування такою залежністю може призвести до суттєвої відмінності отриманих розподілів параметрів процесів від аналогічних, обчислених із врахуванням термочутливості матеріалу виробів.

### Література

- [1] *Chaboudez C., Clain S., Glardon R., Mari D.* Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries // IEEE Trans.Magn. — 1997. — Vol. 33, № 1. — P. 735-745.
- [2] *Favenec Y., Labbe V., Bay F.* Induction heating processes optimization a general optimal control approach // Journal of Computational Physics. — 2003. — Vol. 187. — P. 68-94.
- [3] *Nemkov V., Goldstein R.* Computer simulation for fundamental study and practical solutions to induction heating problems // International Journal of Computations and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. — 2003. — Vol. 22, № 1. — P. 181-191.
- [4] *Rappaz J., Swierkosz M.* Mathematical modeling and simulation of induction heating processes // Appl. Math. Comp. Sci. — 1996. — Vol. 6, № 2. — P. 207-221.
- [5] *Turowski J.* Elektrodynamika techniczna. — Warszawa: WNT, 1993. — 463 s.
- [6] *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termo-mechaniki ciał przewodzących. — Opole: OW, Politechnika Opolska, 1999. — 368 s.
- [7] *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. — К.: Наук. думка, 1977. — 248 с.
- [8] *Головин Г. Ф., Замятин М. М.* Высокочастотная термическая обработка. — Л.: Машиностроение, 1990. — 240 с.
- [9] *Преображенский А. А.* Магнитные материалы и элементы. — М.: Высшая шк., 1976. — 336 с.

- [10] *Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д.* Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісник Львівського університету. — Сер. прикл. мат. та інформ. — 2004. — Вип. 8. — С. 97-111.
- [11] *Zienkiewicz O. C., Wood W. L., Nine N. W.* A unified set of single step algorithm // IJNME. — 1984. — Vol. 20. — P. 1529-1552.
- [12] *Skoczkowski T., Kalus M.* The Mathematical Model of Induction Heating of Ferromagnetic Pipes // IEEE Trans. on magnetics. — 1989. — № 3. — P. 2745-2750.
- [13] *Allen D. H. Heisler W. E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // Computers & Structures. — 1981. — Vol. 13. — P. 129-135.
- [14] *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* Finite Element Method // V. 1. The Basis. — London: Butterworth Heinemann, 2000. — 689 с.
- [15] Сосуды и трубопроводы высокого давления / Справочник. Под. ред. *Хисматулина Е. Р.* — М.: Машиностроение, 1990. — 334 с.
- [16] Таблицы физических величин / Справочник. Под ред. акад. *И. К. Кикоина.* — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.

## **Numerical Simulation of High Temperature Induction Treatment Process of Electrically Conductive Solid**

Bohdan Drobenko

*This paper presents a numerical model developed for axisymmetrical induction heating of electrically conductive solid on the bases of finite element method and unified set of single step algorithm. The mathematical model takes into account the temperature dependence of all material coefficients, elasto-plastic character of deformation and non-linear dependence of magnetic induction depend on strength of magnetic field. As an example the process of high frequency temperature treatment of steel solid is considered.*

## **Численное моделирование процесса высокотемпературной индукционной обработки электропроводных тел**

Богдан Дробенко

*С использованием метода конечных элементов и семейства одношаговых алгоритмов предложена методика численного моделирования процесса индукционной обработки электропроводных осесимметричных тел с учетом температурной зависимости физико-механических свойств материала, упругопластического характера деформирования и нелинейной зависимости индукции магнитного поля от его напряженности. В качестве примера рассмотрен процесс индукционной обработки конечного цилиндра.*

Отримано 31.08.2004