

УДК 520.3/8

**Дифракционное изображение звезды при аподизации сплайн-диафрагмой**

А. В. Ленский, А. В. Рохленко

Для качественного и количественного анализа аподизирующего влияния формы контура зрачка использован интеграл Кирхгофа в представлении Рубиновича. Рассмотрены дифракционные вклады участков контура различного типа (в порядке возрастания зависимости от угла дифракции): окрестностей точек стационарной фазы, угловых точек и точек возврата. Показано, что контур диафрагмы, не содержащий ни точек стационарной фазы, ни угловых точек, а следовательно, оказывающий в определенном направлении большое аподизирующее действие, может быть построен только с двумя внутренними по отношению к телу диафрагмы точками возврата. Получены уравнения контура такой диафрагмы, образованной двумя упруго изогнутыми линейками, которые касаются друг друга в двух точках краями, формирующими контур. В условиях дифракции Фраунгофера подробно исследованы свойства этой сплайн-диафрагмы. Численные результаты дополнены простыми аналитическими выражениями для главных сечений функции распределения дифрагированного света в случае бесконечно узкой сплайн-диафрагмы и в случае больших значений безразмерной переменной, пропорциональной углу дифракции.

*DIFFRACTION IMAGE OF A STAR WITH APODIZATION BY SPLINE-DIAPHRAGM, by Lenskij A. V., Rokhlenko A. V.*— The Rubinowicz representation of the Kirchhoff diffraction integral is used for both qualitative and quantitative investigation of the pupil contour shape apodizing effect. Diffraction contributions of various types of contour sections are considered in order of the increase of the dependence on diffraction angle: neighbourhoods of stationary phase points, corner points and reversal ones. It is proved that the diaphragm contour having neither stationary phase points nor corners and therefore showing in certain direction great apodizing effect cannot be constructed unless the number of internal (with respect to the diaphragm body) reversal points is equal to two. Equations are obtained for the contour curves of such diaphragm formed by two elastically bent rectilinear strips that touch with one another by the contour-forming edges at two points. The Fraunhofer diffraction properties of this spline-diaphragm are investigated in detail. Numerical results are supplemented with the simple analytical expressions for the main directions of the diffracted light distribution in the case of the infinitely narrow spline-diaphragm and in the other case of large magnitudes of dimensionless variable proportional to the diffraction angle.

В астрономии аподизация (см., например, [7]) может быть использована для улучшения условий обнаружения и наблюдения двойных звезд с большой разностью блеска или спутников планет.

В настоящей работе ограничимся исследованием аподизирующего действия особой формы контура зрачка при одинаковом по всему зрачку пропускании. Эффект аподизации будет иметь место лишь в некотором более или менее ограниченном интервале позиционных углов. И, разумеется, оптическая система, формирующая изображение при наличии исследуемой диафрагмы, будет считаться безаберрационной.

При сложной форме контура зрачка и качественные выводы относительно характера дифракции, и количественные результаты проще получаются с помощью интеграла Кирхгофа в представлении Рубиновича (см. [1, с. 484]). В соответствии с этим представлением комплексная амплитуда  $U'$  дифрагированного света может быть выражена [4] следующим криволинейным интегралом по замкнутому контуру  $\Gamma$  отверстия:

$$U' = \frac{C}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{a}'}{1 - \mathbf{a}\mathbf{a}'} \oint_{\Gamma} d\rho e^{-jk(\mathbf{a}' - \mathbf{a})\rho}, \quad (1)$$

где  $C$  — константа;  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  — единичные векторы нормалей падающей и дифрагированной плоских волн соответственно;  $\mathbf{\rho}$  — радиус-вектор;  $k=2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  — длина волны.

Асимптотическая оценка интеграла (1) при  $k \rightarrow \infty$  для произвольных контуров, составленных из кусков кривых, описываемых аналитическими функциями, позволяет сделать следующие общие выводы, облегчающие поиск благоприятной с точки зрения ожидаемого эффекта аподизации формы контура зрачка.

Интенсивность света, дифрагируемого так называемыми активными зонами контура, т. е. окрестностями точек стационарной фазы

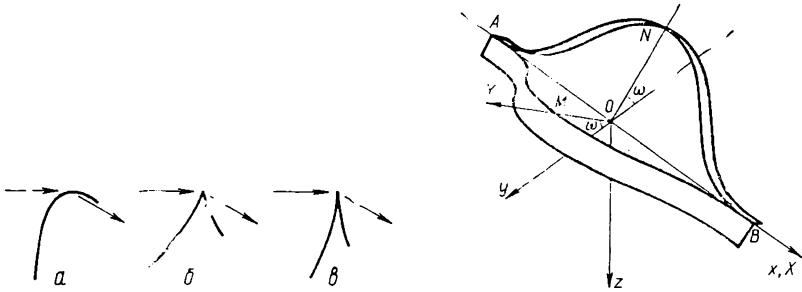


Рис. 1. Характерные точки контуров:  $a$  — точка стационарной фазы;  $b$  — угловая точка;  $в$  — точка возврата; стрелки показывают направления распространения падающей и дифрагированной световых волн

Рис. 2. Слайн-диафрагма  $AMBNA$ , образованная двумя одинаковыми упруго изогнутыми линейками  $AMB$ ,  $BNA$ , и связанные с ней прямоугольные системы координат  $xy$  и  $x'x''$

(рис. 1,  $a$ ), для которых экстремальна сумма расстояний от источника до контура и от контура до исследуемой точки, обратно пропорциональна кубу угла дифракции  $\chi = \arcsin |\mathbf{a} \times \mathbf{a}'| = \arccos (\mathbf{a}\mathbf{a}')$ .

Интенсивность света, дифрагируемого окрестностями угловых точек (если они не совпадают с точками стационарной фазы) при конечном угле между касательными к кривым контура в угловой точке (рис. 1,  $b$ ), пропорциональна  $\chi^{-4}$ .

Наконец, интенсивность света, дифрагируемого окрестностями точек возврата (опять-таки если они не совпадают с точками стационарной фазы; рис. 1,  $в$ ), пропорциональна  $\chi^{-6}$ . Этот вывод относится к случаю касания первого порядка кривых контура в точке возврата. Рост порядка касания приводит к увеличению скорости падения интенсивности дифрагированного света, однако при этом значительно уменьшается открытая площадь зрачка. Поэтому ограничимся рассмотрением точек возврата, в которых имеет место касание первого порядка кривых контура.

Из изложенного следует, что диафрагма с замкнутым контуром, не содержащим точек типов  $a$  и  $b$  (рис. 1), отличалась бы весьма низкой интенсивностью дифрагированного в определенных направлениях света. При построении такой диафрагмы на практике нужно учитывать невозможность материальной реализации внешних по отношению к телу диафрагмы точек возврата (для которых внутренний угол контура равен  $2\pi$ ). В отношении диафрагмы с одними только внутренними по отношению к ее телу точками возврата (для которых внутренний угол контура равен нулю) справедливо (см. Приложение А) следующее утверждение: такая диафрагма может существовать лишь с двумя точками возврата, при любом другом их количестве (0, 1, 3, 4 и т. д.) на замкнутом контуре диафрагмы неизбежно возникают точки стационарной фазы. Эти последние могут быть, конечно, заменены угловыми точками, что, однако, позволит снизить степень зависимости интен-

сивности дифрагированного света от угла дифракции  $\chi$  лишь с  $-3$  до  $-4$ , но не до  $-6$ .

До сих пор речь шла о характерных точках контура диафрагмы и их вкладах в интенсивность дифрагированного света. Напомним, что освещенность вне центра дифракционной картины будет (с учетом интерференции) определяться этими вкладами, если кривые контура описываются аналитическими функциями или, по крайней мере, функциями, имеющими несколько непрерывных низших производных. Выполнение этого требования на практике в случае плоского контура диафрагмы с двумя внутренними точками возврата может представить определенные трудности из-за «нетехнологичности» кривых контура.

Возможно, наиболее простым способом образования подобной диафрагмы является ее построение с помощью двух упруго изогнутых линеек, касающихся друг друга краями в точках возврата. Неплоский контур диафрагмы в этом случае формируют две кривые, описываемые аналитическими функциями, причем последнее выполняется автоматически, поскольку аналитической функцией (прямой) описываются края недеформированных линеек. Подобная диафрагма впервые предложена для высокоэффективной внешней затмевающей системы сканирующего коронографа в работе [5], в которой на рис. 4 изображен ее макет и оценена освещенность наиболее темных мест дифракционной картины на конечном расстоянии от диафрагмы (дифракция Френеля). Эта асимптотическая оценка выполнялась по значениям радиусов кривизны кривых контура в точках возврата без учета точной формы самих кривых.

Предложенная диафрагма, которую для краткости будем называть сплайн-диафрагмой, подробно исследована ниже в условиях дифракции Фраунгофера с тем, чтобы количественно оценить присущее ей значительное аподизирующее воздействие на дифракционное изображение точечного источника.

Выражаемую интегралом (1) комплексную амплитуду  $U'$ , представляющую в бесконечно удаленных от отверстия точках результат дифракции на нем плоской волны, удобно нормировать к 1 для  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$  (т. е. при  $\chi = 0$ ) делением на

$$U'_0 = \lim_{\mathbf{a}' \rightarrow \mathbf{a}} U' = -jCS_a/\lambda, \quad (2)$$

где  $S_a$  — площадь проекции отверстия на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{a}$ .

Пусть далее прямоугольная система координат  $xuz$  выбрана так, что

$$\mathbf{a} = \{0, 0, 1\};$$

$$\mathbf{a}' = \{\sin \chi \cos \psi, \sin \chi \sin \psi, \cos \chi\}, \quad (3)$$

где  $\chi$  — угол дифракции;  $\psi$  — позиционный угол. Если теперь радиус-вектор

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\varphi) = \{x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)\} \quad (4)$$

параметрически задает кривую контура  $\Gamma$  отверстия, то в предположении небольших углов дифракции  $\chi$

$$u' = \frac{U'}{U'_0} = \frac{j}{S_a k \chi} \int \left( \frac{dy}{d\varphi} \cos \psi - \frac{dx}{d\varphi} \sin \psi \right) e^{-jk(x \cos \psi + y \sin \psi) \chi} d\varphi, \quad (5)$$

где интегрирование по  $\varphi$  обеспечивает спрямление всего замкнутого контура  $\Gamma$ . Старшее из отброшенных слагаемых аргумента подынтегральной экспоненты в (5) равно  $jkz\chi^2/2$ , его колебания по модулю, например при  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см,  $\chi = 10''$  и  $z$ , изменяющемся в пределах 1 м, не превышают  $5 \cdot 10^{-3}\pi$ .

На рис. 2 схематически изображена сплайн-диафрагма, образованная двумя одинаковыми линейками, а также связанная с ней прямоугольная система координат  $x y z$ . Диафрагма расположена относительно системы так, что координатные плоскости  $y z$  и  $z x$  являются плоскостями симметрии сплайн-диафрагмы, а ось  $x$  касается кривых контура  $A M B$  и  $B N A$  в обеих точках возврата  $A$  и  $B$ .

В Приложении Б (см. выражения (Б4) — (Б6)) получено параметрическое определение кривой края  $A M B$  (а значит, и  $B N A$ ) в прямоугольной системе  $X Y$  (рис. 2), лежащей в плоскости кривой  $A M B$ . Учитывая то, что ось  $Y$  образует с осью  $y$  угол  $\omega$ , а оси  $X$  и  $x$  совпадают, нетрудно перейти к параметрическому заданию кривых контура сплайн-диафрагмы в системе  $x y z$ :

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi) = Q [2E(\varphi \setminus \alpha) - F(\varphi \setminus \alpha)]; \\ y &= y(\varphi) = \pm 4Q \sin \alpha \cos \omega \cos^2(\varphi/2); \\ z &= z(\varphi) = -4Q \sin \alpha \sin \omega \cos^2(\varphi/2), \end{aligned} \quad (6)$$

где координата  $x$  выражается через неполные эллиптические интегралы  $F(\varphi \setminus \alpha)$  и  $E(\varphi \setminus \alpha)$  первого и второго рода соответственно (см., например, [6, с. 401]); знак «+» в выражении для  $y$  относится к ветви  $A M B$ , знак «-» — к  $B N A$ ; определения параметров  $Q$  и  $\alpha$  изогнутой линейки, а также переменной  $\varphi$  вместе с областью изменения последней представлены в Приложении Б. Оттуда же (см. (Б9)) следует, что в данном случае площадь

$$S_a = 16Q^2 [2E(\alpha) - K(\alpha)] \sin \alpha \cos \omega, \quad (7)$$

где  $K(\alpha)$ ,  $E(\alpha)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно (см. [6, с. 401]).

Наиболее интересны в исследуемой дифракционной картине направления, параллельные осям  $x$  и  $y$ . В первом из них ( $\psi=0$ ) эффект аподизации максимален, во втором ( $\psi=\pi/2$ ) — этот эффект, на первый взгляд, отсутствует. Соответствующие выражения для нормированной комплексной амплитуды  $u'$  можно получить в этих случаях из (5) с учетом (6) и (7). Они имеют следующий вид:

$$u' = u'(v, \alpha) = \frac{\sin(v/2)}{v/2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \left\{ \frac{v}{2} \left[ 1 - \frac{2E(\varphi \setminus \alpha) - F(\varphi \setminus \alpha)}{2E(\alpha) - K(\alpha)} \right] \right\} d\varphi, \quad (8)$$

где

$$v = kX_0 \gamma, \quad (9)$$

а  $2X_0 = |AB|$  (рис. 2);

для  $\psi = \pi/2$

$$u' = u'(\omega, \alpha) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \cos \left( \frac{\omega}{2} \cos \varphi \right) d\varphi, \quad (10)$$

где

$$\omega = kY_0 \gamma \cos \omega, \quad (11)$$

а  $2Y_0 \cos \omega = |MN|$  (рис. 2).

Интеграл (10) может быть представлен в виде малоприспособленного для аналитических исследований ряда, содержащего функции Бесселя. В то же время интеграл (8), по-видимому, вообще нельзя выразить через известные функции, в том числе и специальные. Поэтому выражения (8) и (10) исследовались нами посредством численного интегрирования с помощью трехкратного повторения формулы квадратур замкнутого типа Ньютона—Котеса с семью равноотстоящими узлами (см. [6, с. 683]). Таким образом, область интегрирования разбивалась

на 18 частей (по  $5^\circ$  каждая). Погрешность вычисления амплитуды  $u'$  не превышала нескольких единиц пятого знака после запятой.

Расчеты выполнены для четырех значений угла  $\alpha$ :  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $40^\circ$ . В последнем случае ( $\theta=2\alpha=80^\circ$ , см. рис. 4), как и следовало ожидать, эффект аподизации, по крайней мере в области ближайших вторичных максимумов, незначителен. Поэтому, чтобы не загромождать рисунки, мы не приводим результаты для  $\alpha=40^\circ$ . Остальные результаты представлены на рис. 3 в виде графиков зависимости десятичного

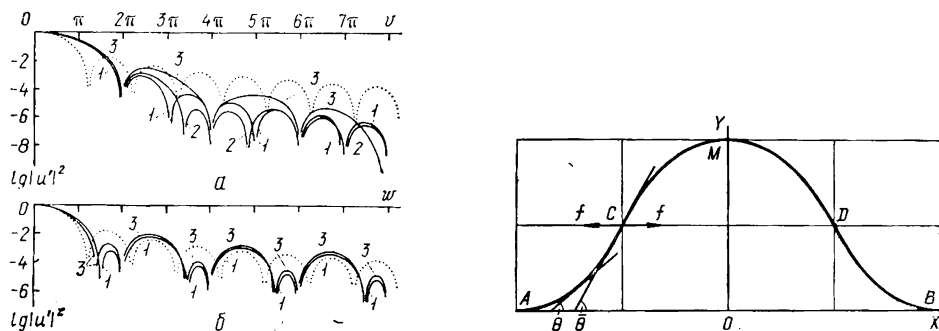


Рис. 3. Кривые десятичного логарифма нормированной интенсивности света в главных сечениях дифракционной картины Фраунгофера, образуемой сплайн-диафрагмой (рис. 2): *a* — в направлении оси  $x$  ( $\psi=0$ ); *b* — в направлении оси  $y$  ( $\psi=\pi/2$ ); 1 —  $\alpha=10^\circ$ ; 2 —  $\alpha=20^\circ$ ; 3 —  $\alpha=30^\circ$  (кривая 2 не нанесена там, где она проходит между близко расположенными кривыми 1 и 3). Пунктирные кривые соответствуют картине Эйри (в этом случае  $\nu = \omega = krx$ , где  $r$  — радиус круглого отверстия)

Рис. 4. Форма упруго изогнутой без кручения тонкой однородной линейки, концы которой жестко закреплены, так что конечные элементы линейки касаются одной и той же плоскости, содержащей ось  $X$  и проходящей перпендикулярно плоскости рисунка

логарифма нормированной интенсивности  $|u'|^2$  дифрагированного света от пропорциональных углу дифракции  $\chi$  безразмерных переменных  $\nu$  (для  $\psi=0$ , рис. 3, *a*) и  $w$  (для  $\psi=\pi/2$ , рис. 3, *b*).

Так как аподизация должна способствовать улучшению условий наблюдения слабых объектов в непосредственной близости от значительно более ярких, важно, чтобы эффект аподизации проявлялся в области первого же побочного максимума дифракционной картины. Из рис. 3, *a* следует, что по сравнению с картиной Эйри первый побочный максимум в направлении наибольшего аподизирующего действия сплайн-диафрагмы оказывается существенно подавленным: при  $\alpha=30^\circ$  — в 6 раз, при  $\alpha=20^\circ$  — в 13,5 раза, при  $\alpha=10^\circ$  — в 21 раз. Эти числа стремятся к своему пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , который равен 25. Для полноты картины укажем, что при  $\alpha=40^\circ$  выигрыш составляет всего 1,9 раза.

В направлении оси  $y$  ( $\psi=\pi/2$ , рис. 3, *b*) освещенность дифракционной картины асимптотически убывает пропорционально  $\chi^{-3}$  так же, как в случае круглого отверстия, и в этом смысле сплайн-диафрагма в данном направлении аподизирующего действия не оказывает. Однако локальные особенности распределения освещенности и здесь могут представить определенный интерес. Как видно из рис. 3, *b*, более узкие и более слабые нечетные вторичные максимумы чередуются с более широкими и более сильными четными. Первые значительно уступают соответствующим (нечетным) светлым кольцам картины Эйри, тогда как вторые несколько ярче четных светлых колец. (Разумеется, речь идет о нормированных к 1 для  $\chi=0$  распределениях освещенности в обеих дифракционных картинах.)

Таким образом, в дифракционной картине Фраунгофера от сплайн-диафрагмы в направлении оси  $y$  ( $\psi=\pi/2$ ) периодически возникают сравнительно протяженные (гораздо шире темных колец картины Эй-

ри) зоны пониженной освещенности, т. е. зоны более благоприятных условий обнаружения и наблюдения слабых объектов вблизи сильных. Этот факт тем более примечателен, что положение указанных зон можно легко изменять, растягивая или сжимая всю дифракционную картину в направлении оси  $y$ , как гармошку, посредством изменения угла  $\omega$  (см. выражение (11) для переменной  $\omega$ , а также рис. 2). При этом в направлении оси  $x$  ( $\psi=0$ ) распределение освещенности в дифракционной картине остается неизменным, так как переменная  $v$  (см. (9)) не зависит от  $\omega$ .

Как и в случае  $\psi=0$ , наибольший практический интерес представляет соотношение между высотами первых побочных максимумов нормированных распределений освещенности в дифракционных картинах Фраунгофера от круглого отверстия и от сплайн-диафрагмы для сечения  $\psi=\pi/2$ . Отношение этих высот равно 3 для  $\alpha=40^\circ$ , 9,2 для  $\alpha=30^\circ$ , 20 для  $\alpha=20^\circ$ , 30 для  $\alpha=10^\circ$  и 34 для  $\alpha=0$ .

Ограничение представленных на рис. 3 областей дифракционной картины значением переменных  $v=\omega=8\pi \approx 25$  в какой-то мере произвольно. Все же эти области при всех значениях параметра  $\alpha$  содержат по несколько первых наиболее сильных и поэтому практически наиболее важных побочных максимумов и почти во всех случаях перекрывают интервал «средних» значений переменных, в котором уже не действуют ряды Маклорена, а асимптотические оценки еще не дают требуемой точности. (Лишь для  $\alpha=30^\circ$  и  $\alpha=40^\circ$  при  $\psi=0$  ход кривых в рассмотренной области  $v$  не успевает приобрести даже качественного соответствия своему асимптотическому закону. Однако с точки зрения эффекта аподизации эти случаи, по-видимому, наименее интересны.)

Полученные численным путем и представленные на рис. 3 результаты дополним несколькими простыми аналитическими выражениями.

Вполне удовлетворительную количественную оценку распределения освещенности в главных сечениях дифракционной картины Фраунгофера от сплайн-диафрагмы при небольших значениях угла  $\alpha$  можно получить, полагая в выражениях (8) и (10)  $\alpha=0$ . С учетом известных свойств эллиптических интегралов [6, с. 401] и интегрального представления функций Бесселя [6, с. 177] это дает:

для  $\psi=0$

$$u'(v, 0) = \frac{\pi^2 \sin v}{(\pi^2 - v^2)v}; \quad (12)$$

для  $\psi = \pi/2$

$$u'(\omega, 0) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} J_0(\omega/2), \quad (13)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка [6, с. 182].

Перейдем далее к асимптотической оценке распределения освещенности в дифракционной картине. Вначале — для направлений, в которых основной вклад в освещенность вносят точки возврата  $A$  и  $B$  контура сплайн-диафрагмы (рис. 2).

Уже отмечалось, что в этих направлениях освещенность в среднем убывает обратно пропорционально шестой степени угла дифракции  $\chi$ , чем и обуславливается значительный эффект аподизации. Теперь дадим явное выражение главного члена соответствующего асимптотического разложения. Общий вид последнего при отсутствии точек стационарной фазы приведен в работе [5]. Оно получается повторным интегрированием по частям (см. [2, с. 46]).

Этому разложению может быть подвергнут сразу интеграл (8), но можно начать с интеграла (1), ограничиваясь минимальными требованиями (симметрии контура и равенства двум числу точек возврата при отсутствии точек других типов), а затем лишь в конце подставить

значение радиуса кривизны  $R_0$  линий контура в точках  $A$  и  $B$  (см. (Б8)). В обоих случаях конечный результат формально получается одним и тем же, с той, однако, существенной разницей, что при втором способе вывода он не ограничивается направлением  $\psi=0$ , поскольку переменная  $v$  определяется в этом случае выражением более общего вида, чем (9), а именно:

$$v = kX_0\chi \cos \psi, \quad (14)$$

где, как можно показать, исходя из требования отсутствия на контуре сплайн-диафрагмы точек стационарной фазы, при небольших углах дифракции

$$|\psi| < \arctg \frac{\text{ctg } 2\alpha}{\cos \omega}. \quad (15)$$

Само выражение нормированной амплитуды дифрагированного света, определяемое главным членом асимптотического разложения, имеет в данном случае следующий вид:

$$u'(v, \alpha) = -4 [2E(\alpha) - K(\alpha)]^2 \frac{\sin v}{v^3} \quad (16)$$

и справедливо при  $v \gg 1$ . Это последнее условие, кстати, при  $X_0 \gg \lambda$  не противоречит условию  $\chi \ll 1$ , при выполнении которого получено неравенство (15).

Такого же простого, как (16), асимптотического выражения для всего интервала позиционных углов  $\psi$ , в котором основной вклад в освещенность вносят активные зоны, т. е. окрестности точек стационарной фазы, вывести не удается из-за того, что в зависимости от  $\psi$  изменяется не только положение этих зон, но также их количество (от одной до трех на каждой стороне сплайн-диафрагмы) и даже характер дифракции (интенсивность света, дифрагируемого активными зонами, которые являются окрестностями точек перегиба, убывает пропорционально  $\chi^{-8/3}$ , а не  $\chi^{-3}$ , как в обычных случаях). Поэтому здесь приведем асимптотическое выражение нормированной интенсивности дифрагированного света только для  $\psi = \pi/2$ , которое получается посредством оценки интеграла (10) по методу стационарной фазы (см., например, [2, с. 46] или [1, с. 821]) и имеет следующий вид:

$$|u'(\omega, \alpha)|^2 = \frac{\pi(1 - \cos \omega)(1 + \sin \omega)}{[2E(\alpha) - K(\alpha)]^2 \omega^4}, \quad (17)$$

где определяющаяся выражением (11) переменная  $\omega \gg 1$ .

В заключение о потерях, неизбежно сопровождающих аподизацию. Они касаются двух характеристик формирующей изображение безабберационной оптической системы — разрешающей способности одинаковых точечных источников и проницающей силы. Введение аподизации — это всегда компромисс.

В данном случае оказывается, что определяемый по критерию Рэлея [1, с. 363] угловой предел разрешения для сплайн-диафрагмы в направлении наибольшей аподизации ( $\psi=0$ ) всего в 1.3—1.5 раза больше, чем для круглого отверстия с диаметром, равным  $2X_0 = |AB|$  (рис. 2). В направлении  $\psi = \pi/2$  этот предел приблизительно такой же, как для вписанного в сплайн-диафрагму круглого отверстия с диаметром  $2Y_0 \cos \omega = |MN|$  (рис. 2).

Проницающая сила определяется интенсивностью света в центре дифракционной картины. Эта интенсивность в свою очередь пропорциональна квадрату площади входного отверстия [1, с. 421]. Таким образом, величина

$$\kappa = \left( \frac{S_a}{\pi X_0^2} \right)^2 = \left\{ \frac{4 \sin \alpha \cos \omega}{\pi [2E(\alpha) - K(\alpha)]} \right\}^2 \quad (18)$$

(см. выражение (7) для  $S_a$ ) является коэффициентом уменьшения проникающей силы оптической системы с отверстием в виде сплайн-диафрагмы по сравнению с описанным вокруг нее круглым отверстием, диаметр которого равен  $2X_0$  при условии, что  $Y_0 \cos \omega \leq X_0$ . Знак равенства в последнем соотношении приводит к наибольшему значению  $x = (2/\pi)^2 = 0.405$ , что соответствует потере проникающей силы приблизительно в одну звездную величину. В остальных случаях эти потери еще больше.

## Приложение А

**Доказательство исключительности класса двуугольных диафрагм.** Рассмотрим множество диафрагм, ограниченных замкнутыми линиями, всюду гладкими (непрерывными с непрерывными первыми производными), за исключением конечного числа точек возврата. Из соображений материальной реализуемости, очевидно, все точки возврата должны быть «внутренними», т. е. внутренние углы контуров диафрагм равны нулю. На пространственную структуру диафрагм наложим следующее ограничение: для каждой диафрагмы  $\Gamma$  (так же будем называть линию ее края) задана коническая полость  $\mathcal{R}(\Gamma)$ , заполненная векторами направлений в пространстве, таких что плоская волна, распространяющаяся вдоль любого из этих направлений, освещает целиком одну и только одну сторону тела диафрагмы и все точки ее края или, выражаясь точнее, проекция контура диафрагмы на плоскость, перпендикулярную любому направлению из полости  $\mathcal{R}$ , есть многоугольник с криволинейными гладкими сторонами и равными нулю внутренними углами. Будем также считать, что из  $a \in \mathcal{R}$ ,  $a' \in \mathcal{R}$  следует  $a + a' \in \mathcal{R}$ , для чего достаточно выпуклости направляющей конуса.

**Теорема.** Для любых принадлежащих  $\mathcal{R}$  направлений распространения падающей и дифрагированной плоских волн, заданных единичными векторами нормалей  $a$  и  $a'$  соответственно, каждая диафрагма  $\Gamma$  с  $n \geq 0$  точками возврата имеет не менее  $|n - 2|$  точек стационарной фазы, где касательная к линии  $\Gamma$  ортогональна вектору  $a' - a$ .

**Доказательство.** Рассмотрим проекцию  $\Gamma_\sigma$  края диафрагмы на плоскость  $\sigma$ , перпендикулярную вектору  $a + a'$ , который по условию принадлежит  $\mathcal{R}$ . Вектор  $a' - a \in \sigma$ , так как  $(a' - a)(a + a') = 0$ . Проследим за направлением вектора касательной  $\tau_\sigma$  к  $\Gamma_\sigma$ . При полном обходе точкой касания линии  $\Gamma_\sigma$  угол между вектором  $\tau_\sigma$  и его произвольным исходным положением изменяется непрерывно от 0 до  $|n - 2|\pi$ , что очевидно для  $n = 0, 1, 2$  и без труда доказывается методом математической индукции. Ввиду того, что поворот вектора  $\tau_\sigma$  происходит в той же плоскости  $\sigma$ , в которой располагается  $a' - a$ , при этом повороте не менее чем  $|n - 2|\pi$  раз  $\tau_\sigma$  окажется перпендикулярным  $a' - a$ , т. е.  $(a' - a)\tau_\sigma = 0$ . Каждое такое положение соответствует некоторой точке  $P_\sigma$  плоской линии  $\Gamma_\sigma$ , а точка  $P_\sigma$  является проекцией на плоскость  $\sigma$  вполне определенной точки  $P \in \Gamma$ . Касательная  $\tau$  к пространственной кривой  $\Gamma$  в каждой точке  $P$  также, очевидно, ортогональна  $a' - a$ . Теорема доказана.

**Следствие доказанного:** в случае двуугольной ( $n=2$ ) диафрагмы вектор  $\tau$  касательной к линии ее края при полном обходе контура точкой касания покачивается относительно исходного положения и возвращается к нему. Максимальные отклонения можно сделать ограниченными и даже как угодно малыми путем выбора формы контура диафрагмы. Приведенный в тексте статьи пример демонстрирует, как можно построить двуугольную диафрагму и выбрать множество направлений дифракции, чтобы избежать «засветки» целых секторов дифракционной картины от окрестностей точек стационарной фазы на контуре диафрагмы. При  $n \neq 2$  это, согласно теореме, невозможно.

## Приложение Б

**Уравнения края сплайн-диафрагмы.** Пусть тонкая однородная упруго деформированная линейка (рис. 4) жестко закреплена в точках  $A$  и  $B$  ( $|AB| = 2X_0$ ) таким образом, что касается в этих точках оси абсцисс: деформация линейки — чистый изгиб без кручения. Начало  $O$  прямоугольной системы координат  $XU$ , плоскость которой совпадает с плоскостью изгиба, выбрано в середине отрезка  $AB$ , так что  $|AO| = |OB| =$



$=X_0$ . Длина линейки  $L$  больше  $|AB|$ , и в силу симметрии, очевидно, абсцисса точки  $M$  наибольшего удаления деформированной линейки от оси  $X$  равна нулю.

Форма линейки описывается аналитической функцией, которая является решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [3]. Ее график схематически изображен на рис. 4 в виде кривой  $ACMDB$ . В точке  $M(0, Y_0)$  эта функция имеет равную нулю первую производную, так же, как в точках  $A$  и  $B$ . Вследствие единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения можно утверждать, что участки  $AM$  и  $MB$  линейки имеют центры симметрии — точки  $C$  и  $D$  соответственно. Следовательно, вся кривая путем простых преобразований симметрии может быть получена из уравнения одного из четырех конгруэнтных участков, например  $AC$ , форма которого однозначно задается его длиной  $L/4$ , главным моментом инерции поперечного сечения  $I = a^3b/12$  ( $a$  — толщина,  $b$  — ширина линейки), модулем Юнга  $E$  материала линейки и изгибающей ее силой  $f$ , приложенной в точке  $C$  параллельно оси  $OX$  (равная и противоположно направленная сила приложена в точке  $A$ ). Соответствующая задача решена в [3, с. 111]. Решение в параметрической форме имеет вид:

$$X' = X + X_0 = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \bar{\theta}}} ; \quad (B1)$$

$$Y = \sqrt{\frac{2IE}{f}} (\sqrt{1 - \cos \bar{\theta}} - \sqrt{\cos \theta - \cos \bar{\theta}}), \quad (B2)$$

где угол  $\theta$  между осью  $OX$  и касательной к кривой в точке  $(X', Y)$  посредством (B1), (B2) задает положение точек кривой  $AC$ ;  $\bar{\theta}$  — предельное значение этого угла в точке  $C$  (рис. 4). Длина дуги между точками  $A$  и  $(X', Y)$  равна

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \bar{\theta}}}. \quad (B3)$$

Выражая (B1) через эллиптические интегралы, приходим к единому параметрическому определению всей кривой  $ACMDB$ :

$$X/Q = 2E(\varphi \setminus \alpha) - F(\varphi \setminus \alpha); \quad (B4)$$

$$Y/Q = 4 \sin \alpha \cos^2(\varphi/2), \quad (B5)$$

где  $Q = \sqrt{IE/f}$  имеет размерность длины;  $F(\varphi \setminus \alpha)$ ,  $E(\varphi \setminus \alpha)$  — неполные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода (см., например, [6, с. 401]);  $\alpha = \bar{\theta}/2$  — модулярный угол; переменная

$$\varphi = -\arcsin \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\bar{\theta}/2)} \quad (B6)$$

изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ :  $\varphi(A) = -\pi$ ;  $\varphi(C) = -\pi/2$ ;  $\varphi(M) = 0$ ;  $\varphi(D) = \pi/2$ ;  $\varphi(B) = \pi$ .

Между длиной линейки  $L$ , координатами  $X_0$ ,  $Y_0$  ее концов и вершины  $M$  в системе  $XY$ , с одной стороны, и величинами  $Q$ ,  $\alpha$ , с другой, имеется однозначное соответствие:

$$L = 4QK(\alpha); X_0 = 2Q[2E(\alpha) - K(\alpha)]; Y_0 = 4Q \sin \alpha, \quad (B7)$$

где  $K(\alpha)$  и  $E(\alpha)$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода [6, с. 401]. Таким образом, задавая любые две из трех величин  $L$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$ , можно найти  $Q$ ,  $\alpha$  и с помощью (B4)—(B6) — форму изогнутой линейки, зависящую от  $\alpha$ , и соответствующий масштаб координат, определяемый  $Q$ .

Наконец, приведем выражения для радиуса  $R_0$  кривизны линейки в точках  $A$ ,  $M$ ,  $B$  и для площади  $\Sigma$ , ограниченной кривой  $ACMDB$  и осью абсцисс:

$$R_0 = Q/2 \sin \alpha; \quad (B8)$$

$$\Sigma = X_0Y_0 = 8Q^2 [2E(\alpha) - K(\alpha)] \sin \alpha. \quad (B9)$$

Окончание см. на с. 69.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М. : Наука, 1970.—856 с.
2. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения.— М. : Мир, 1966.— 160 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М. : Наука, 1965.— 204 с.
4. Ленский А. В. Об одном виде аподизации телескопов // Кинематика и физика небес. тел.— 1986.— 2, № 1.— С. 77—81.
5. Ленский А. В. О дифракции света солнца на одной внешней затмевающей системе коронографа // Там же.— 1987.— 3, № 2.— С. 69—73.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана.— М. : Наука, 1979.— 830 с.
7. Jacquinot P., Roizen-Dossier B. Apodisation // Progress in optics / Ed. by E. Wolf.— Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1964.— Vol. 3.— P. 29—186.

Киев. ун-т им. Т. Г. Шевченко,  
Ин-т проблем материаловедения АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 30.10.87,  
после доработки 20.09.88