

УДК 521.95:523.31—852:535.327

Рефракция в меридиональной модели атмосферы.

Алгоритм вычислений

А. Ю. Яценко

Описан алгоритм вычислений. Приведены формы оптических поверхностей в реальной атмосфере. Для зенитных расстояний $0-60^\circ$ использование средней (нормальной) меридиональной модели атмосферы и высокоточной теории рефракции дало результаты, совпадающие со значениями рефракции в сферически-симметричной модели до $0.006''$. На больших зенитных расстояниях имеются существенные различия — до нескольких секунд дуги.

REFRACTION IN THE MERIDIONAL MODEL OF THE ATMOSPHERE. ALGORITHM OF COMPUTATIONS, by Yatsenko A. Yu.— An algorithm of computations is described. Forms of the aistrata of equal density are given. At the zenith distances of $0-60^\circ$ the results obtained using the mean (normal) meridional model of the atmosphere (the so-called three-dimensional atmosphere) are the same (to $0.006''$) as those obtained by the spherically-symmetric atmospheric model. At the greater zenith distances there are essential differences between the results.

Введение. Предложенное нами новое решение основных уравнений теории Гарцера [1] проверено на сферически-симметричной и эллипсоидальной моделях атмосферы. Результаты сравнивались со значениями из Пулковских таблиц рефракции 5-го издания. Для сферически-симметричной модели наши результаты согласуются с пулковскими в пределах $0.001-0.008''$ до зенитных расстояний 84° (для $z=82-84^\circ$ совпали тысячные доли). Этим доказана достоверность теории рефракции, лежащей в основе Пулковских таблиц, и достоверность нашей теории, так как алгоритмы вычислений у нас и у И. С. Гусевой совершенно разные, а результаты — совпадают. Разумеется, речь идет о косвенном доказательстве, так как прямое доказательство — проверка по результатам наблюдений — процедура очень сложная и длительная.

Алгоритм вычислений. Методически алгоритм вычислений разбит на две части. В первой — вычисляются уравнения поверхностей постоянного показателя преломления (ПППП), во второй — непосредственно вертикальная и горизонтальная составляющие рефракции путем решения системы шести дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим первую часть. Исходной метеорологической информацией являются данные для девяти опорных широт (включая широту точки наблюдения, находящуюся в центре этого набора), через 3° (примерно 333 км). Таким образом, четвертая широта к югу и четвертая — к северу лежат на удалении от широты точки наблюдения на расстоянии примерно 1300 км. Расстояние 300 км выбрано на основании точности интерполяции метеоданных [2]. При большем расстоянии эта точность падает. Максимальное удаление опорных широт от точки наблюдения определяется расстоянием, на котором горизонтальный луч света покидает земную атмосферу, высота которой принята $82-84$ км. Аэрологические данные для опорных широт взяты из модели атмосферы Саастамойнена [5]. Вычисление начинается с расчета расстояний между ПППП на широте точки наблюдения. Для

уменьшения объема вычислений расстояния между ПППП следует увеличивать с высотой. Здесь мы воспользовались идеей И. С. Гусевой: если величина рефракции на каждом участке траектории будет примерно постоянна, то и точность вычислений будет одинакова вдоль всей траектории луча света в атмосфере (имеются в виду участки интегрирования). Поскольку величина рефракции пропорциональна изменению давления, это требование можно представить аналитически в следующем виде:

$$O_{i+1} = O_i + 34.190_i^2 / (T_* - \beta H_i), \quad (1)$$

где O_i — предыдущее расстояние между ПППП, км; T_* — температура на нижней границе рассматриваемого участка атмосферы, К; β — градиент температуры на этом участке, град/км; H_i — высота предшествующей ПППП, км. Выделено три участка атмосферы: 0—11 км, $\beta = -6$ град/км; 12—26 км, $\beta = 0$; 27—34 км, $\beta = +2.4$ град/км; выше 35 км O принято постоянным и равным 5 км, так как величина рефракции на участке от 35 до 84 км равна ее значению на первых 100 м и после 35 км шаг по формуле (1) оказался бы равным примерно 50 км, что исказило бы результаты вычислений. Шаг 5 км подобран путем расчетов. Пробными расчетами установлено, что начальный шаг должен быть не более 0.02 км для достижения требуемой точности вычислений (0.001" до зенитного расстояния 86°). В таком случае общее число ПППП достигает 785. Следующий этап — вычисление значений показателя преломления на рассчитанных высотах ПППП для широты точки наблюдения. Вычисления проводились по упрощенной формуле [4]:

$$(n-1) \cdot 10^8 = \left[2371.34 + \frac{683\,939.7}{130 - \sigma^2} + \frac{4547.3}{38.9 - \sigma^2} \right] D_s + \\ + [6487.31 + 58.058\sigma^2 - 0.711\,50\sigma^4 + 0.088\,51\sigma^6] D_\omega; \quad (2)$$

$$D_s = \frac{P - \pi}{T} \left[1 + (P - \pi) \left(57.90 \cdot 10^{-8} - \frac{9.3250 \cdot 10^{-4}}{T} + \frac{0.258\,44}{T^2} \right) \right];$$

$$D_\omega = \frac{\pi}{T} [1 + \pi(1 + 3.7 \cdot 10^{-4} \pi) (-2.373\,21 \cdot 10^{-3} + \\ + 2.233\,66/T - 710.792/T^2 + 7.751\,41 \cdot 10^4/T^3)],$$

где $\sigma = 1/\lambda$, λ — длина волны в вакууме, мкм; P — давление, гПа; π — давление H_2O , гПа; T — температура, К. Формула (2) с избытком обеспечивает требуемую точность вычислений. Как отмечается в [6, с. 456]: «...главная проблема не в формуле, а в ее применении. Если мы хотим достичь точности 10^{-8} (формула (2) обеспечивает эту точность), то метеорологические элементы должны быть известны очень точно: ошибка давления менее 0.025 мм рт. ст., температуры — менее 0.01°, относительной влажности — менее 0.01% (при 20°C) и количества CO_2 — менее 0.000 06 единичного объема. Эта точность недостижима в астрономической практике: возможная точность определения n около 10^{-6} ...». На высоте 81.5 км показатель преломления $n \approx \approx 1.000\,000\,005$, т. е. первая значащая цифра после запятой выходит за пределы точности, обеспечиваемой формулой (2). Отсюда и получается максимальная высота атмосферы, до которой ведутся вычисления: 82—84 км. Вычисления значений метеозаэментов на конкретной высоте ПППП проводились с помощью кубических сплайн-функций, параметры которых предварительно вычислялись для каждого метеозаэментов для всех девяти опорных широт.

Следующий этап вычислений — определение высот каждой ПППП для оставшихся восьми опорных широт. Эти высоты находились ме-

тодом дихотомии (половинного деления), причем для каждого значения аргумента (высоты), требуемого по этому методу, вычислялись все метеозлементы с помощью интерполяционной кубической сплайн-функции и по ним определялся показатель преломления n .

После вычисления высот ПППП для девяти опорных широт остается получить наклоны L''_i кубической сплайн-функции:

$$H(\varphi) = d_1 H_i + d_2 H_{i+1} - \frac{1}{6} g_1 g_2 [L''_i (1 + d_1) + L''_{i+1} (1 + d_2)], \quad (3)$$

где $g_1 = \varphi_{i+1} - \varphi$; $g_2 = \varphi - \varphi_i$; $d_1 = g_1 / (g_1 + g_2)$; $d_2 = g_2 / (g_1 + g_2)$; $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$. Наклоны L''_i вычисляются из системы $n - 2$ линейных уравнений: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{B}$. Здесь элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} даются следующими формулами:

$$a_{i,i} = 2(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}); \quad a_{i,i-1} = \varphi_i - \varphi_{i-1}; \quad a_{i,i+1} = \varphi_{i+1} - \varphi_i,$$

$$a_{i,j} = 0 \text{ для } j < i - 1 \text{ и } j > i + 1;$$

$$b_i = 6 [(H_{i+1} - H_i) / (\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (H_i - H_{i-1}) / (\varphi_i - \varphi_{i-1})];$$

\mathbf{L} — вектор неизвестных L''_i . Граничные условия: $L''_1 = 0$; $L''_n = 0$.

Таким образом, уравнение ПППП представляется в излагаемой теории интерполяционной кубической сплайн-функцией (3).

Во второй части программы решается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha\Sigma - \lambda}{\rho\sqrt{1 - \Sigma^2}}, \quad \frac{dx}{ds} = \alpha; \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta\Sigma - \mu}{\rho\sqrt{1 - \Sigma^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \beta; \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\gamma\Sigma - \nu}{\rho\sqrt{1 - \Sigma^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

т. е. задача Коши с начальными условиями. Она решается методом Рунге—Кутта четвертого порядка точности. Как выяснилось из тщательного анализа и практических расчетов, это наиболее приемлемый в данной задаче метод, позволяющий реализовать оптимальное сочетание затрат времени на вычисления и получаемой в конечном результате точности. Согласно методу Рунге—Кутта для получения значений α , β , γ и x , y , z в следующей точке P_{i+1} траектории s луча света требуется знание правых частей уравнений (4) в предыдущей точке P_i .

В начальной точке P_0 траектории α_0 , β_0 , γ_0 вычисляются из наблюдаемых зенитного расстояния и азимута. Направляющие косинусы λ_0 , μ_0 , ν_0 перпендикуляра к оптической поверхности в точке наблюдения P_0 получаются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\cos \chi_0 \sin \chi + \sin \chi_0 \cos \chi \cos \omega; \\ \mu &= \cos \chi \sin \omega; \\ \nu &= \sin \chi_0 \sin \chi + \cos \chi_0 \cos \chi \cos \omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где χ_0 — оптическая широта точки наблюдения P_0 ; χ — оптическая широта текущей точки траектории луча света P ; ω — геоцентрическая долгота текущей точки P . В точке наблюдения $\chi = \chi_0$, $\omega = 0$. Отсюда

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \quad \nu_0 = 1. \quad (6)$$

Как известно, косинус угла между элементом траектории ds и перпен-

дикуляром к оптической поверхности составляет

$$\Sigma = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma. \quad (7)$$

Произведение $\rho \sqrt{1 - \Sigma^2}$ радиуса кривизны траектории в точке P на синус угла между элементом траектории ds и перпендикуляром к оптической поверхности определяется соотношением

$$\rho \sqrt{1 - \Sigma^2} = -\cos \tau \frac{\partial r / \partial H}{\partial \ln n / \partial H}, \quad (8)$$

где

$$\tau = \arctg \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \psi} \right); \quad (9)$$

ψ — геоцентрическая широта текущей точки траектории P . Производные в выражениях (8) и (9) вычисляются численным методом по пяти

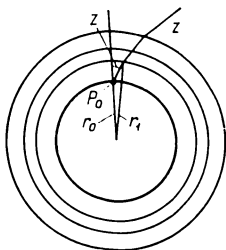
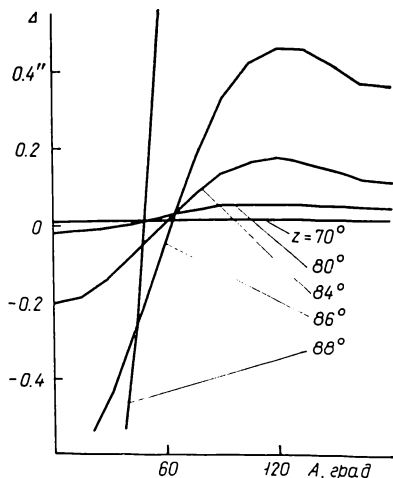


Рис. 1. К выводу начального шага интегрирования: r_0 — радиус шарообразной Земли; P_0 — точка наблюдения

Рис. 2. Зависимость разностей Δ между величинами рефракции, полученными по новой теории и из Пулковских таблиц, от азимута A для зенитных расстояний 70° — 88°



точкам. Количество точек для численного дифференцирования определено путем пробных расчетов. Опорной сеткой для вычисления $\partial r / \partial H$ и $\partial \ln n / \partial H$ являются ПППП, $\partial d / \partial \psi$ — производная уравнения ПППП в точке пересечения с траекторией луча света P . Через производные $\partial r / \partial H$, $\partial \ln n / \partial H$, $\partial r / \partial \psi$ траектория луча света связывается со средой, в которой он движется, т. е. с вертикальным и меридиональным градиентами показателя преломления n , которые в свою очередь определяются формой и плотностью ПППП.

Итак, известны правые части уравнений (4), и мы можем «шагнуть» в следующую точку траектории (через промежуточную точку согласно используемому методу интегрирования). Для этого нужно задать шаг интегрирования. Начальный шаг задается формулой (рис. 1)

$$ds_0 = -r_0 \cos z_0 + \sqrt{r_0^2 \cos^2 z_0 + r_1^2 - r_0^2}. \quad (10)$$

Последующие шаги вычисляются по формуле

$$ds = ds_0 (H_i - H_{i-2}) / (H_3 - H_1),$$

где H_i — высоты ПППП на широте точки наблюдения.

Таким образом, получаем переменный шаг интегрирования, в какой-то мере пропорциональный расстояниям между ПППП на широте точки наблюдения. Поскольку каждый шаг делится пополам, то получается около 1500 точек интегрирования. На зенитных расстояниях более 86° шаг назначается постоянным и число точек интегрирования достигает 4000. На следующем шаге α , β , γ и x , y , z известны, а λ ,

μ , ν определяются по формулам (5), причем

$$\chi = \psi + \tau, \tag{11}$$

где ψ — геоцентрическая широта текущей точки траектории луча света P ; ψ , ω , r получаются из таких формул:

$$\begin{aligned} r \cos \psi \cos \omega &= x \sin \chi_0 + z \cos \chi_0; \\ r \cos \psi \sin \omega &= y; \\ r \sin \psi &= -x \cos \chi_0 + z \sin \chi_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, правые части уравнения (4) опять известны и процесс интегрирования можно продолжить. После выхода луча света из атмосферы получаем значения α , β , γ в вакууме. От них переходим к зенитному расстоянию и азимуту и путем сравнения этих величин с начальными (в точке наблюдения) вычисляем вертикальную и горизонтальную рефракцию.

Вывод формул (4) — (9), (11), (12) можно найти в работе [8].
Форма ПППП. Модель атмосферы Саастамойнена [5] — весьма условное название. На самом деле это реальные аэрологические данные — усреднение наблюдательного материала 543 наземных метеостанций и 102 станций аэрологического зондирования, расположен-

Таблица 1. Высоты поверхностей постоянного показателя преломления (в км) в январе и июле (широта точки наблюдения 45°, модель атмосферы Саастамойнена)

33°	36°	39°	42°	45°	48°	51°	54°	57°
Январь								
—0.553	—0.531	—0.192	—0.038	0.100	0.131	0.161	0.192	0.223
—0.021	—0.100	0.276	0.402	0.516	0.546	0.577	0.607	0.638
0.821	0.823	1.021	1.106	1.182	1.212	1.243	1.273	1.304
1.909	1.978	2.045	2.109	2.171	2.206	2.240	2.274	2.306
4.132	4.167	4.212	4.246	4.289	4.313	4.334	4.355	4.376
6.215	6.233	6.258	6.274	6.300	6.297	6.304	6.297	6.300
7.839	7.840	7.852	7.851	7.861	7.834	7.817	7.788	7.769
8.476	8.470	8.477	8.470	8.474	8.439	8.413	8.377	8.349
9.181	9.186	9.170	9.155	9.150	9.098	9.055	9.003	8.959
10.945	10.904	10.850	10.808	10.764	10.683	10.613	10.531	10.462
13.334	13.235	13.133	13.036	12.936	12.861	12.778	12.703	12.620
14.829	14.710	14.602	14.484	14.378	14.299	14.212	14.133	14.046
16.719	16.605	16.479	16.362	16.234	16.164	16.093	16.021	15.944
19.202	19.116	19.022	18.935	18.838	18.785	18.732	18.678	18.625
23.328	23.292	23.250	23.214	23.174	23.192	23.188	23.185	23.181
34.429	34.388	34.343	34.459	34.364	34.315	34.228	34.136	34.041
Июль								
—0.279	—0.206	—0.135	—0.066	0.000	0.058	0.115	0.174	0.229
0.386	0.448	0.508	0.567	0.623	0.680	0.735	0.793	0.847
1.106	1.158	1.205	1.254	1.299	1.356	1.408	1.465	1.521
2.122	2.168	2.213	2.259	2.304	2.351	2.396	2.438	2.479
3.964	4.008	4.040	4.083	4.116	4.145	4.162	4.187	4.203
5.938	5.969	6.007	6.039	6.071	6.080	6.087	6.106	6.111
7.442	7.472	7.512	7.543	7.574	7.570	7.578	7.578	7.575
8.031	8.060	8.100	8.130	8.160	8.155	8.149	8.152	8.146
8.678	8.706	8.746	8.774	8.803	8.793	8.783	8.782	8.772
10.299	10.315	10.315	10.326	10.320	10.281	10.241	10.197	10.156
12.515	12.472	12.418	12.380	12.320	12.246	12.164	12.089	12.014
13.986	13.895	13.791	13.703	13.617	13.526	13.427	13.337	13.240
15.695	15.577	15.469	15.355	15.240	15.138	15.045	14.942	14.850
20.775	20.749	20.717	20.689	20.663	20.613	20.570	20.517	20.475
26.908	26.950	26.992	27.033	27.119	27.028	26.989	26.943	26.906
55.046	55.046	55.004	55.004	54.924	54.876	56.449	56.321	56.194

ных по всему земному шару. Эти данные Саастамойнен простейшим образом усреднил для четырех сезонов — января, апреля, июля, октября — и для 14 широт: -90° , -78 , -67 , -57 , -45 , -30 , -15 , 0 , 15 , 30 , 45 , 60 , 76 , 85° . Все сведения даны до высоты 24 км; выше мы использовали модель атмосферы CIRA 1965 [3].

Уравнения ПППП получаются в процессе вычислений как промежуточный результат, но представляется полезным привести в настоящей работе формы ПППП. В табл. 1 представлены формы ПППП

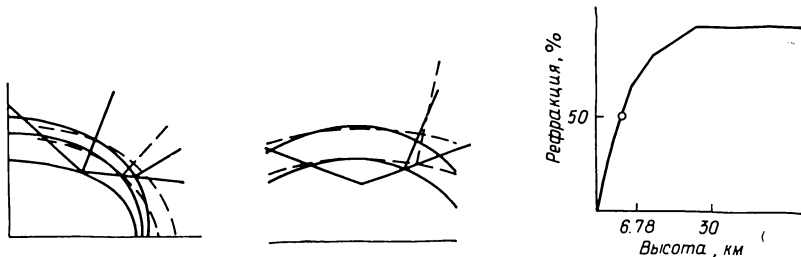


Рис. 3. Геометрическая интерпретация уклонов наших значений рефракции от пулковских в меридиане. Штриховой линией изображены сферические ПППП, сплошной — реальные

Рис. 4. Геометрическая интерпретация различий значений рефракции в меридиане и первом вертикале для эллипсоидальной модели атмосферы. Штриховой линией изображены проекции ПППП на плоскость первого вертикала, сплошной — на плоскость меридиана на широте 45°

Рис. 5. Зависимость величины рефракции (в %) от толщины воздушного слоя (считая от поверхности Земли)

в январе и июле. Отрицательные расстояния нижних ПППП от поверхности Земли не должны смущать читателя, следует только не забывать, что ПППП — всего лишь сетка для вычисления производных, т. е. в данном случае имеется в виду лишь математическая экстраполяция. Как видно из табл. 1, даже зимой наклоны ПППП не превышают у поверхности Земли $90''$.

Значения рефракции. Рассмотрим зависимость *разностей* между нашими значениями рефракции и пулковскими (5-е издание) от зенитного расстояния и азимута для следующих условий: широта точки наблюдения 45° ; январь; глобальная модель атмосферы Саастамойнена [5].

До зенитных расстояний 60° в разных азимутах эти разности составляют миллисекунды дуги (мы эти результаты не приводим). Зависимости разностей на зенитных расстояниях $70-88^\circ$ от азимута приведены на рис. 2. Как видно из рис. 2, аномалии рефракции, вызванные уклонами меридиональной модели атмосферы от сферически-симметричной, имеют весьма непростой характер. Однако эти зависимости естественно объясняются. Как видно из рис. 3, на котором утрированно изображены ПППП над эллипсоидальной Землей, луч света, идущий с юга к точке наблюдения, встречает ПППП под меньшими углами, чем это было бы в случае эллипсоидальных ПППП (или сферически-симметричных), поэтому и значения рефракции с юга меньше соответствующих пулковских. С севера ПППП из-за меньшего наклона (табл. 1) меньше отличаются от эллипсоидальных ПППП, причем различие направлено в сторону сферических ПППП. Поэтому аномалии, хотя и имеются, намного меньше южных и очень мало отличаются от аномалий в первом вертикале, вызванных эллипсоидальностью Земли. Последние обнаружены нами для эллипсоидальной модели атмосферы и приведены в [1]. Аномалии, возникающие в эллипсоидальной модели атмосферы, вызываются тем, что проекции ПППП на меридиональную плоскость имеют меньший радиус кривизны (Земля

сплюснута с полюсов), чем проекции ПППП на плоскость первого вертикала. Следовательно, траектория луча света в меридиане встречает ПППП под меньшими углами, чем в первом вертикале (рис. 4). Эти особенности в движении луча света начинают сказываться на зенитных расстояниях более 60° .

Отметим, что наши рассуждения относятся только к нижним слоям атмосферы. Дело в том, что верхние слои атмосферы не полностью компенсируют наклоны нижних слоев своим противоположным наклоном. Это иллюстрируют рис. 5 и табл. 2, в которой приведены значения рефракции на разных зенитных расстояниях и азимутах для реальной модели атмосферы и для искусственной модели с «выключенными» верхними слоями (выше 9 км слои приняты эллипсоидальными).

Таблица 2. Значения рефракции для реальной модели атмосферы и для искусственной модели (с эллипсоидальными слоями воздуха постоянного показателя преломления на высотах более 9 км). Широта 45° , температура 264.4 К, давление 1023.78 гПа, влажность 0 гПа

z	Реальная модель		Искусственная модель	
	A=0	A=180°	A=0	A=180°
0°	0.000''	0.000''	0.004''	0.004''
30	36.295	36.296	36.290	36.300
45	62.820	62.822	62.813	62.829
60	108.579	108.583	108.565	108.597
70	171.426	171.435	171.395	171.464
75	231.426	231.383	231.310	231.430
80	345.501	345.571	345.408	345.662
82	426.414	426.551	426.282	426.680
84	552.161	552.492	551.985	552.681
86	770.202	771.231	769.946	771.500
88	1219.178	1223.813	1219.086	1224.134
90	2549.078	2593.002	2549.253	2592.911

Заключение. Разные авторы (например, [7]) на основе исследований в рамках теории рефракции для сферически-симметричной модели атмосферы приходили к выводу, что средняя (нормальная) трехмерная модель атмосферы даст практически такие же результаты (до $0.1''$), что и сферически-симметричная модель на зенитных расстояниях до 70° . Наши вычисления, выполненные без каких-либо искусственных предположений о модели атмосферы, наклонах ПППП и т. п., подтвердили эту точку зрения.

Таким образом, для зенитных расстояний $0-60^\circ$ применение *средней* (нормальной) меридиональной модели атмосферы (в других классификациях — трехмерной) не улучшает значения рефракции, полученные для сферически-симметричной модели атмосферы. Наш вывод относится к вертикальной составляющей рефракции, для горизонтальной составляющей требуется использование меридионально-широтной модели атмосферы.

1. Яценко А. Ю. Рефракция в меридиональной модели атмосферы: Теоретические основы // Кинематика и физика небес. тел.— 1988.— 4, № 2.— С. 59—66.
2. Bergthorsson P., Döös B. R. Numerical weather map analysis // Tellus.— 1955.— 7, N 3.— P. 329—340.
3. CIRA 1965 COSPAR International reference atmosphere 1965.— Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1965.— 313 p.
4. Owens J. C. Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature and composition // Appl. Opt.— 1967.— 6, N 1.— P. 51—59.
5. Saastamoinen J. Report of a study on the latitudinal distribution of meridional tilts in the atmosphere.— 1980.— 252 p.

Окончание см. на с. 79.

Окончание. Начало с. 68.

6. *Teleki G., Saastamoinen J.* Problems of three-dimensional refraction in astrometry // Sun and planetary system.— Dordrecht : Reidel, 1982.— P. 455—462.
7. *Teleki G., Sugawa C.* On the nature of astronomical refraction // Publ. Observ. astron. Beograd.— 1987.— N 35.— P. 1—16.
8. *Yatsenko A. Y., Teleki G.* Harzer's works on astronomical refraction viewed from today's standpoint // Bull. Observ. astron. Beograd.— 1985.— N 135.— P. 1—15.

Астрон. обсерватория им. В. П. Энгельгардта,
Казань

Поступила в редакцию 29.10.87,
после доработки 09.12.87