

УДК 528.22

## Аппроксимация высот геоида. I

М. С. Петровская, К. В. Пищухина

При вычислении высот геоида обычно используется интегральная формула Стокса. Ядро интеграла (функция Стокса) имеет сложный вид, вследствие чего формулы для определения влияния дальних зон также имеют сложную структуру. Нестандартная интерпретация формулы Стокса позволяет вывести новые формулы, существенно упрощающие процедуру вычисления составляющих ближних и дальних зон при аппроксимации высот геоида.

*GEOID HEIGHTS APPROXIMATION. I, by Petrovskaya M. S., Pishchukhina K. V.—* The Stokes integral formula is commonly used for evaluating the geoid heights. The complexity of the integral kernel (the Stokes function) results in a bulky set of formulae for determining the remote zone influence. A non-conventional interpretation of the Stokes integral allows deriving new very simple formulae to evaluate the contributions of both the close and remote zone components of the geoid heights.

**1. Постановка задачи.** В основе определения высот геоида лежит интегральная формула Стокса (сферическое приближение)

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (1)$$

где  $R$  и  $\gamma$  — средний радиус Земли и среднее значение силы тяжести на ее поверхности;  $\sigma$  — единичная сфера;  $\psi$  — сферическое расстояние между текущей точкой интегрирования и рассматриваемой точкой;  $\Delta g$  — аномалия силы тяжести;  $S(\psi)$  — функция Стокса.

Для повышения точности вычисления  $N$  используются данные гравиметрической съемки, а также глобальные модели геопотенциала в форме рядов сферических функций, построенных на основе имеющейся спутниковой и наземной информации. В рамках такой задачи формула Стокса разбивается на две части — выделяются ближняя и дальняя зоны:

$$N = N^{(0)} + \delta N; \quad (2)$$

$$N^{(0)} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0} \Delta g S(\psi) d\sigma = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi dA; \quad (3)$$

$$\delta N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma - \sigma_0} \Delta g S(\psi) d\sigma,$$

где  $\sigma_0$  — сферическая шапка радиусом  $\psi_0$  с центром в рассматриваемой точке;  $A$  — азимут текущей точки. Влияние ближней зоны, т. е. компонента  $N^{(0)}$ , оценивается по измерениям  $\Delta g$ . Для оценки вклада дальней зоны  $\delta N$  в высоты геоида интеграл в (3) разлагается в ряд сферических функций, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты разложения гео-

потенциала посредством гармоник ряда Лапласа  $\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n$ . Эта методика впервые разработана в [2], где рассмотрены два ее варианта, различающиеся по способу аппроксимации ядра интеграла в (3). Обзор существующих модификаций этих методов приведен в [8].

Здесь рассмотрен первый вариант методики Молоденского, впервые реализованный в [1]. В нем вводится в рассмотрение вспомогательная функция

$$S^*(\psi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ S(\psi), & \psi_0 \leq \psi \leq \pi, \end{cases} \quad (4)$$

которая позволяет перейти в (3) к интегрированию по всей сфере  $\sigma$ :

$$\delta N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S^*(\psi) d\sigma.$$

После разложения  $S^*(\psi)$  в ряд Лежандра

$$S^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) P_n(\cos \psi)$$

получается приближенная формула для погрешности усечения формулы Стокса

$$\delta N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n_0} Q_n(\psi_0) \Delta g_n, \quad (5)$$

где  $n_0$  — верхний предел степени и порядка учитываемых гармоник геопотенциала. Для вычисления коэффициентов усечения

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (6)$$

существует несколько вариантов формул, причем все они имеют довольно сложную структуру вследствие сложности функции Стокса  $S(\psi)$ . Наиболее простая система формул получена, по-видимому, в [5]. Она имеет следующий вид:

$$Q_n(\psi_0) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ nS(y_0) [P_{n-1}(y_0) - y_0 P_n(y_0)] - (1-y_0^2) P_n(y_0) \frac{dS(y_0)}{dy_0} + 2K_n(y_0) + 2I_n(y_0) + 9J_n(y_0) \right\}, \quad y_0 = \cos \psi_0; \quad (7)$$

$$S(y) = \sqrt{\frac{2}{1-y}} - 3y \ln \frac{\sqrt{1-y}(\sqrt{2} + \sqrt{1-y})}{2} - 3\sqrt{2(1-y)+1} - 5y, \quad y = \cos \psi; \quad (8)$$

$$\frac{dS(y_0)}{dy_0} = -8 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1-y_0}} + \frac{1}{2(1-y_0)^{3/2}} + \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{1-y_0})}{2(1-y_0^2)} - 3 \ln \frac{\sqrt{1-y_0}(\sqrt{2} + \sqrt{1-y_0})}{2}; \quad (9)$$

$$I_n(y_0) = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(y_0) - P_{n-1}(y_0)]; \quad (10)$$

$$J_n(y_0) = \frac{1}{2n+1} [(n+1)I_{n+1}(y_0) + nI_{n-1}(y_0)], \quad J_0 = I_1; \quad (11)$$

$$K_{n+1}(y_0) = -\frac{I_n(y_0)}{\sqrt{2(1-y_0)}} + 2K_n(y_0) - K_{n-1}(y_0); \quad (12)$$

$$K_0(y_0) = -\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{1-y_0}} \right); \quad K_1(y_0) = K_0(y_0) - 1 + \sqrt{\frac{1-y_0}{2}}. \quad (13)$$

К этим рекуррентным формулам следует добавить рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра.

Громоздкое выражение (8) для функции Стокса усложняет также и процедуру определения составляющей высоты геоида, соответствующей ближней зоне (2).

Помимо формулы Стокса (1), возможны альтернативные интегральные представления высот геоида. Очевидно, что при этом соответствующие выражения для вклада ближней и дальней зон имеют вид, отличный от (2) и (3). В частности, можно исходить из выражения для возмущающего потенциала  $T$  в форме потенциала простого слоя, что позволяет в таком же виде представить и высоту геоида, согласно формуле Брунса  $N=T/\gamma$ . В потенциале простого слоя ядром является очень простая функция

$$S_0(\psi) = 1/\sin(\psi/2), \quad (14)$$

представляющая собой первый (основной) член в выражении функции Стокса (8). Если применить методику Молоденского к потенциалу простого слоя, это приведет к значительному упрощению формул, описывающих влияние дальних (а также ближних) зон по сравнению с приведенными выше формулами. Такой подход осуществлен в работе [7]. Однако в ней рассмотрен лишь случай, когда сферическая шапка мала, что ограничивает область возможных приложений. В настоящей работе (в первой и второй частях) описаны два метода (и их модификации), обобщающие упомянутый выше метод на случай произвольной величины сферической шапки.

**2. Первый метод.** Так как функция (14) представляет собой доминирующий член в функции Стокса (8), то формулу (1) целесообразно представить в виде

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S_0(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g \delta S(\psi) d\sigma. \quad (15)$$

Первое слагаемое в правой части (15) представляет собой потенциал простого слоя. Для функций (8) и (14) имеем разложения

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi); \quad S_0(\psi) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\cos \psi), \quad (16)$$

откуда

$$\delta S = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что коэффициенты при полиномах Лежандра в разложении  $\delta S$  примерно в  $n$  раз меньше соответствующих коэффициентов в разложении  $S_0(\psi)$ .

Разбивая первое слагаемое в (15) на две составляющие, соответствующие ближней и дальней зонам, получаем

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \delta_1 N + \delta_2 N; \\ N_0 &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0} \Delta g S_0(\psi) d\sigma, \quad S_0 = 1/\sin(\psi/2); \\ \delta_1 N &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma-\sigma_0} \Delta g S_0(\psi) d\sigma; \\ \delta_2 N &= \frac{3R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{(n-1)(2n+1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$(19)$$

Погрешность усечения потенциала простого слоя ( $\delta_1 N$ ) можно разложить в ряд Лежандра, аналогичный (5). Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$S_0^*(\psi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ S_0(\psi), & \psi_0 \leq \psi \leq \pi, \end{cases}$$

аналогичную (4). Разлагая  $S_0^*$  в ряд Лежандра

$$S_0^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} a_n(\psi_0) P_n(y), \quad y = \cos \psi,$$

получаем для коэффициентов интегральную формулу

$$a_n(\psi_0) = \sqrt{2} \int_{-1}^{\psi_0} \frac{1}{\sqrt{1-y}} P_n(y) dy, \quad y_0 = \cos \psi_0 \quad (20)$$

вместо (6). При вычислении этого интеграла используем такие выражения:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} P_n(y) dy = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}; \quad P_n(y) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-y}{2}\right). \quad (21)$$

В результате получаем формулу

$$a_n(\psi_0) = \frac{4}{2n+1} - 4t \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k (2k+1)} t^{2k}, \quad t = \sin(\psi_0/2), \quad (22)$$

где  $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$ .

Подставляя ряд для  $S_0^*$  в (18) и складывая получаемый таким образом ряд для  $\delta_1 N$  с разложением (19), приходим к приближенной формуле

$$N = N_0 + \delta_0 N, \quad (23)$$

где

$$N_0 = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \Delta g \cos(\psi/2) d\psi dA; \quad (24)$$

$$\delta_0 N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n_0} q_n(\psi_0) \Delta g_n; \quad (25)$$

$$q_n(\psi_0) = a_n + \frac{6}{(n-1)(2n+1)}; \quad (26)$$

или с учетом (22)

$$q_n(\psi_0) = \frac{2}{n-1} - 4t \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k (2k+1)} t^{2k}. \quad (27)$$

Итак, вместо громоздкой системы формул (7) — (13), определяющей традиционные коэффициенты усечения  $Q_n(\psi)$ , получили простую формулу, полином (27), для вычисления новых коэффициентов. Она характеризует погрешность приближения (24). Наряду с этим, очевидно, получено более простое выражение для функции (24), описывающей влияние ближней зоны, по сравнению с формулой (2), так как ядро  $S_0(\psi)$  имеет более простой вид, чем функция  $S(\psi)$  в (2).

Как показывают вычисления, при большом размере шапки ( $\psi_0 \geq 20^\circ$ ) и  $n \geq 50$  формула (27) может привести к вычислительным погрешностям из-за больших коэффициентов при  $t^{2k}$ . В этом случае целесообразно использовать другое выражение для  $q_n(\psi_0)$ , получаемое из (20) и (26) после подстановки под интеграл в (20) вместо (21) следующего выражения:

$$P_n(\cos \psi) = \frac{(0.5)_n}{(1)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(0.5)_k (-n)_k}{(1)_k (0.5 - n)_k} \cos(n - 2k) \psi.$$

В результате приходим к такой формуле:

$$q_n(\psi_0) = \frac{2}{n-1} - \frac{(0.5)_n}{(1)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(0.5)_k (-n)_k}{(1)_k (0.5 - n)_k} \times \left[ \frac{\sin(n - 2k + 0.5) \psi_0}{n - 2k + 0.5} + \frac{\sin(n - 2k - 0.5) \psi_0}{n - 2k - 0.5} \right]. \quad (28)$$

Коэффициенты при синусах имеют порядок  $n$ . Это не создает вычислительных трудностей.

Для интеграла (20) можно получить также простую рекуррентную формулу. Она фактически выведена в работе [6, с. 45–46], в которой приведено рекуррентное соотношение для величин  $b_n = a_n/\sqrt{2}$ . Из него следует

$$a_n = 2 \frac{2n-1}{2n+1} a_{n-1} - \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-2} - 8t^2 \sqrt{1-t^2} \frac{2n-1}{n(n-1)(2n+1)} P_{n-1}^1(y_0); \quad (29)$$

$$a_0 = 4(1-t); \quad a_1 = \frac{4}{3}(1-3t+2t^3); \quad t = \sin(\psi_0/2); \quad y_0 = \cos \psi_0, \quad (30)$$

где  $P_{n-1}^1$  — присоединенные функции Лежандра. Их можно вычислять в свою очередь по рекуррентной формуле

$$P_n^1(y_0) = \frac{2n-1}{n-1} \cos \psi_0 P_{n-1}^1(y_0) - \frac{n}{n-1} P_{n-2}^1(y_0), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (31)$$

причем

$$P_1^1(y_0) = -\sin \psi_0; \quad P_2^1(y_0) = -\frac{3}{2} \sin 2\psi_0. \quad (32)$$

Таким образом, для коэффициентов усечения  $q_n$  получены две простые аналитические формулы (27) и (28), а также рекуррентное соотношение (29), которое вместе с (26) и (30) — (32) определяет  $q_n$ . Использование каких-либо двух из трех вариантов формул для  $q_n$  позволяет выполнять контроль вычислений.

**3. Модификация первого метода.** Описанный метод можно преобразовать аналогично модификации метода Молоденского, выполненной в [3] и позднее в [6]. Цель этой модификации — улучшить сходимость ряда для погрешности усечения исходной интегральной формулы. Суть ее сводится к замене в (1) функции Стокса  $S(\psi)$  функцией  $S(\psi) - S(\psi_0)$ , что возможно, так как  $\Delta g_0 = 0$ . В результате такого преобразования вспомогательная функция, аналогичная  $S^*(\psi)$  в (4), принимает вид

$$\bar{S}(\psi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ S(\psi) - S(\psi_0), & \psi_0 \leq \psi \leq \pi. \end{cases}$$

Она непрерывна на всем интервале  $0 \leq \psi \leq \pi$ , в то время как  $S^*(\psi)$  имеет точку разрыва  $\psi = \psi_0$ . Соответствующие коэффициенты усечения  $\bar{Q}_n$ , аналогичные  $Q_n$ , имеют такой вид [4]:

$$\bar{Q}_n(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{1}{n(n+1)} S(\psi_0) \sin \psi_0 P_n^1(\cos \psi_0).$$

Аналогичному преобразованию с той же целью можно подвергнуть и формулы раздела 2. При этом в первом интеграле выражения (15) делается замена ядра

$$S_0(\psi) \Rightarrow S_0(\psi) - S_0(\psi_0).$$

Повторив остальные преобразования, приходим к аппроксимации

$$N = \bar{N}_0 + \bar{\delta}_0 N; \quad (33)$$

$$\bar{N}_0 = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \Delta g \cos(\psi/2) \left[ 1 - \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\psi_0/2)} \right] d\psi dA; \quad (34)$$

$$\bar{\delta}_0 N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n_0} \bar{q}_n(\psi_0) \Delta g_n; \quad (35)$$

$$\bar{q}_n(\psi_0) = q_n(\psi_0) + \frac{2 \cos(\psi_0/2)}{n(n+1)} P_n^1(\cos \psi_0). \quad (36)$$

Учитывая (27), получаем

$$\bar{q}_n(\psi_0) = \frac{2}{n-1} - 2t \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k (2k+1)(k+1)} t^{2k}. \quad (37)$$

В случае больших  $\psi_0$  и  $n$  целесообразно проводить вычисления по формуле, аналогичной (28):

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(\psi_0) &= q_n(\psi_0) + \frac{(0.5)_n}{(1)_n} t^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{(0.5)_k (-n)_k}{(1)_k (0.5 - n)_k} \times \\ &\times \left[ \frac{\sin^2(n-2k+1)(\psi_0/2)}{n-2k+1} - \frac{\sin^2(n-2k-1)(\psi_0/2)}{n-2k-1} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

При  $k = (n \pm 1)/2$  выражение в квадратных скобках следует заменить на  $2t^2(1-t^2)$ . Можно также использовать и рекуррентное соотношение (29) с учетом выражений (30), (36), (26), а также (31), (32).

**4. Численные результаты.** Итак, для аппроксимации высот геоида получены новые формулы: (23) и (33). Компоненты, характеризующие влияние ближних зон, определяются выражениями (24) и (34) соответственно. Влияние дальних зон представлено формулами (25) и (35). Коэффициенты усечения  $q_n$  и  $\bar{q}_n$  могут быть вычислены по простым аналитическим формулам (27), (28) и (37), (38). Выведено также простое рекуррентное соотношение (29), (30), из которого  $q_n$  и  $\bar{q}_n$  можно определить с учетом формул (26), (36), (31), (32). Следует заметить, что в формулах для ближних зон (24) и (34) ядра также имеют более простую структуру по сравнению с ядром в (2), определяемым формулой (8), и ядром в модификации Остача — Мейсла. Кроме того, подынтегральная функция  $f(\psi) = 2\cos(\psi/2)$  в новых формулах из-

меняется более медленно, чем  $F(\psi) = \sin\psi S(\psi)$ , что также дает некоторое вычислительное преимущество этим формулам. Графики функций  $F(\psi)$  и  $f(\psi)$  изображены на рис. 1.

По приведенным формулам вычислялись значения коэффициентов усечения традиционных  $Q_n$ ,  $\bar{Q}_n$  и новых  $q_n$ ,  $\bar{q}_n$  для  $2 \leq n \leq 100$ . На рис. 2 даны модули коэффициентов усечения для  $\psi_0$ , равного 1, 5 и 15°. Как видно из рис. 2, а, при  $\psi_0 = 1^\circ$  (и вообще при малых радиусах усечения)

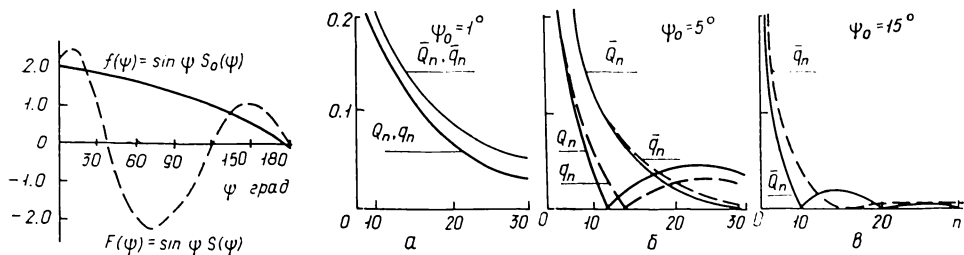


Рис. 1. Подынтегральные функции, умноженные на  $\sin \psi$

Рис. 2. Коэффициенты усечения (абсолютные значения)

величины  $Q_n$  и  $q_n$ , а также  $\bar{Q}_n$  и  $\bar{q}_n$  соответственно близки (совпадают в принятом масштабе). При этом из новых коэффициентов следует, очевидно, отдать предпочтение  $q_n$ . С увеличением  $\psi_0$  ( $\psi_0 \geq 3^\circ$ ), как показывают вычисления, свойства коэффициентов  $q_n$  улучшаются по сравнению с  $Q_n$  (рис. 2, б, в). При некоторых (небольших) значениях  $n$  новые коэффициенты (по модулю) имеют несколько большую величину, чем прежние. Однако различие между ними (между  $Q_n$  и  $q_n$ ,  $\bar{Q}_n$  и  $\bar{q}_n$ ) незначительно, а с увеличением  $n$  новые коэффициенты убывают быстрее традиционных. При этом новые формулы существенно проще для практических приложений.

1. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Учет влияния дальних зон на высоту квазигеоида и уклонения отвеса // Тр. ЦНИИ геод., аэросъемки и картогр.— 1957.— Вып. 121.— С. 17—24.
2. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Там же.— 1945.— Вып. 42.— С. 47—61.
3. Остац О. М. К методике астро-гравиметрического уравнивания // Реф. сб. ОНТИ ЦНИИ геод., аэросъемки и картогр.— 1970.— № 6.— С. 28—33.
4. Chen J. Y. Methods for computing height anomalies and gravity anomalies by modifying Stokes' and its inverse functions // Boll. geod. e sci. affini.— 1981.— 40, N 4.— P. 151—273.
5. Hagitwara Y. A new formula for evaluating the truncation error coefficient // Bull. geod.— 1976.— N 50.— P. 131—135.
6. Meissl P. Preparation for the numerical evaluation of second order Molodensky-type formulas // Repts Dept. Geod. Sci.— 1971.— N 163.— P. 45—52.
7. Petrovskaya M. S. Formulas simplification and accuracy improvement in the approximation of the geoid heights // Proc. Int. Symp. «Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets», Prague, Sept. 15—20, 1986 / Ed. by P. Holota.— 1987.— Part 1.— P. 305—322.
8. Pishchukhina K. V. Methods of approximation of the geoid heights and deflections of the vertical // Ibid.— P. 421—441.

Ин-т теорет. астрономии АН СССР,  
Ленинград

Поступила в редакцию 20.11.87,  
после доработки 10.02.88