УДК 517.5

©2008. **Е.А. Севостьянов**

СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ВЕТВЛЕНИЯ ОТКРЫТЫХ ДИСКРЕТНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доказано, что если точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является существенной изолированной особой точкой открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ в точке x_0, B_f – множество точек ветвления f в D, то при определённых условиях на Q, $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$, множество fB_f неограничено и $x_0 \in \overline{B_f}$.

1. Введение. Ключевым понятием данной статьи является понятие асимптотического предела отображения f в граничной точке области D, см., напр., раздел 3.13 в [6] или раздел 2 гл. VII в [8]. Грубо говоря, отображение f, заданное в области D, имеет своим асимптотическим пределом величину $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ в некоторой точке b границы D, если существует кривая, лежащая в D и стремящаяся к b, вдоль которой отображение f стремится к z_0. Поведение открытых дискретных кольцевых Q-отображений в изолированной существенной особой точке по существу исследовано автором в контексте обобщения хорошо известных теорем Сохоцкого-Вейерштрасса и Пикара, см. [12]. В частности, при определённых условиях на Q, отображение $f(x)$ в произвольной окрестности существенно особой точки x_0 достигает в пределе любую наперёд заданную точку из $\overline{\mathbb{R}^n}$ при $x \to x_0$. Ясно, что отсюда, вообще говоря, не следует существование асимптотического предела в точке x_0, что, в свою очередь, говорит о необходимости более тонких исследований этого вопроса. В данной статье решается следующая задача: распространить наиболее важные результаты из теории квазирегулярных отображений, касающиеся изучения асимптотических пределов, на более широкие классы кольцевых Q-отображений. Основной упор здесь делается на взаимосвязи асимптотических пределов с множествами точек ветвления изучаемого отображения. В частности, показано, что образ fB_f множества точек ветвления B_f открытого дискретного кольцевого Q-отображения, удовлетворяющего определённым условиям относительно Q и имеющего изолированную существенно особую точку, является неограниченным множеством. Для квазирегулярных отображений подобные теоремы получены О.Мартио, С.Рикманом и Ю.Вяйсяля, см. раздел 3 в [6] и раздел 2 гл. VII в [8]. По сути в указанных работах, равно как и в настоящей статье, использован подход В.А.Зорича, см. [11], и С.Агард-А.Мардена, см. [1].

2. Основные определения. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. Всюду далее $C(E, f) = \left\{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : \ y = \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m), \ x_m \to x_0 \in E\right\}$ – предельное множество отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ на множестве $E \subset \overline{D}$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| =$

$r\}$, $S(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=r\}$, $\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$. Запись $g=\mathrm{id}$ для отображения $g:D\to\mathbb{R}^n$ означает, что g – тождественное отображение, т.е. $g(x)=x$ для всех $x\in D$. Напомним, что x – *точка ветвления* отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки x сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать B_f. Напомним, что борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma\rho(x)\quad|dx|\ \geq\ 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\,\mathrm{adm}\,\Gamma}\int\limits_D\rho^n(x)\quad dm(x)$. Пусть D – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, $E, F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E, \gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [3], введено В.Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, см., напр., [9], см. также [2] и [7]. Пусть $r_0=\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$, $Q:D\to[0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$, $S_i=S(x_0,r_i), i=1,2$. Говорят, что гомеоморфизм $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q–гомеоморфизмом в точке* $x_0\in D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\ \leq\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\;dm(x)\tag{1}$$

выполнено для любого кольца $A=A(r_1,r_2,x_0)$, $0<r_1<r_2<r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\;dr\ \geq\ 1$. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и $x_0\in D$. По аналогии, будем говорить, что (не обязательно гомеоморфное) отображение $f:D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q–отображением в точке* $x_0\in D$, если выполнено соотношение (1). Рассмотрим следующее определение, см. 3.13 в [6], см. также п. 2 гл. VII в [8]. Будем говорить, что точка $z_0\in\overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b\in\partial D$, если найдётся кривая $\alpha:[0,1)\to D$ с $\alpha(t)\to b$ при $t\to 1$ такая, что $f(\alpha(t))\to z_0$ при $t\to 1$. Говорят, что множество $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U\cap E$ связны.

Предложение 1. Пусть $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, Q – односвязное и локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P – компонента связности множества $f^{-1}Q$ такая что $\overline{P}\subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если дополнительно Q – относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$, см. лемму 2.2 раздела 2 в [6].

Отображение $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ называется *нульмерным*, если множество $\{f^{-1}(y)\}$ всюду разрывно при каждом $y\in\overline{\mathbb{R}^n}$, т.е. каждая компонента связности $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку.

Предложение 2. Пусть отображение $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – нульмерное, $A\subset f(D)$ и пусть существует непрерывное *сечение* $s : A \to D$ отображения f, т.е. $f \circ s = \mathrm{id}$. Если A – относительно локально связно в точке $y \in \overline{A}$, то предельное множество $C(s, y)$ либо континуум в ∂D, либо – единственная точка в D, см. [1], 3.A, см. также лемму 3.10 в [6].

Предложение 3. Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, F–компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f также инъективно в некоторой окрестности множества F, см. [11], с. 422, см. также следствие 3.8 в [6].

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – открытое дискретное отображение, $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и пусть $x \in \ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha : [a,\, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (i) $\alpha(a) = x$; (ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$; (iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a,\, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c')}$. Аналогично можно определить максимальное поднятие кривой $\beta : (b, a] \to \mathbb{R}^n$ при отображении f с концом в точке x, см. раздел 3 гл. II в [8]. Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in \ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ (или, соответственно, $\beta : (b, a] \to \mathbb{R}^n$) имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (или, соответственно, с концом в точке x), см. следствие 3.3 главы II в [8].

3. Основные леммы.

Предложение 4. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, а $f : D \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, – кольцевое Q-отображение в нуле. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(0, \partial D)$ и $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\; dm(x) \;=\; o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)$$

для функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть Γ – семейство открытых кривых $\gamma(t) : (0,1) \to \mathbb{R}^n$, таких что $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\gamma(t) \not\equiv 0$. Тогда $M(f(\Gamma)) = 0$.

Доказательство аналогично рассуждениям леммы в 3.1 [12]. Идея доказательства следующего утверждения относится к работам [1] и [11], см. также теорему 3.14 в [6].

Лемма 1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D \setminus \{x_0\})$ и $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\; dm(x) \;=\; o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{1}$$

для функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,. \tag{2}$$

Если $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ *является асимптотическим пределом* f *в точке* x_0, *то* $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ *для любой окрестности* U *точки* x_0.

Доказательство. Проведём доказательство от противного, т.е. предположим, что найдётся окрестность U точки x_0, для которой $z_0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = z_0 = 0$. По дискретности f, $\overline{B(r_0)} \subset U \cap (D \cup \{0\})$ и $S(r_0) \cap f^{-1}(0) = \varnothing$ для некоторого $r_0 > 0$. Положим $U_0 = B(r_0) \setminus \{0\}$, $g = f|_{U_0}$. Поскольку $\operatorname{dist}\,(fS(r_0), 0) > 0$ и, по предположению, $0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$, найдётся $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(r')} \cap (fS(r_0) \cup gB_g) = \varnothing. \tag{3}$$

Так как $z_0 = 0$ является асимптотическим пределом отображения f в точке $x_0 = 0$, то найдётся кривая $\alpha(t) : [0,1) \to U_0$ с $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$ такая, что $\beta(t) = f(\alpha(t)) \to 0$ при $t \to 1$. Без ограничения общности, можно считать, что $0 < |\beta(t)| < r'$ при всех $t \in (0,1)$. Тогда, в силу (3),

$$|\alpha| \subset U_0 \setminus B_g\,. \tag{4}$$

Определим при $0 \le t \le 1$ и $0 < \varphi \le \pi$ так называемые *сферические сегменты* по следующему правилу: $G(t,\varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = |\beta(t)|, \quad (y, \beta(t)) > |y|^2 \cos\varphi\}$. Пусть $G^*(t,\varphi)$ – $\alpha(t)$–компонента связности множества $g^{-1}G(t,\varphi)$ и φ_t – точная верхняя грань чисел $\varphi \in (0,\pi]$ таких, что g отображает $G^*(t,\varphi)$ гомеоморфно на $G(t,\varphi)$; такое $\varphi_t > 0$ существует ввиду соотношения (3) и того, что $\beta(t) \in f(U_0)$. Положим $G(t) = G(t,\varphi_t)$, $G^*(t) = G^*(t,\varphi_t)$, тогда отображение g определяет при каждом фиксированном t гомеоморфизм $g_t : G^*(t) \to G(t)$. Покажем, что для п.в. $r \in (0, r')$, из равенства $|\beta(t)| = r$ следует, что $0 \notin \overline{G^*(t)}$. Предположим, что $0 \in \overline{G^*(t)}$ при некотором t, тогда найдётся последовательность $x_k \in G^*(t)$ с $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $f(x_k) \to y_t \in \overline{G(t)}$ при $k \to \infty$. Заметим, что отображение g_t^{-1} является сечением отображения f на множестве $G(t) \subset f(U_0)$ и по предложению 2 множество $C(g_t^{-1}, y_t)$ есть континуум, содержащий точку $x_0 = 0$ и, возможно, точки границы U_0. Ввиду соотношения (3), $C(g_t^{-1}, y_t) = \{0\}$, т.е. $g_t^{-1}(y) \to 0$ при $y \to y_t$. Пусть $\Gamma(t)$ – семейство открытых кривых $\gamma_t(s) : (0,1) \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих $\beta(t)$ и y_t в $G(t)$, т.е. $\gamma_t(0) = y_t$, $\gamma_t(1) = \beta(t)$ и $\gamma_t(s) \in G(t)$ при $s \in (0,1)$. Обозначим $\Gamma^*(t) = g_t^{-1}\Gamma(t)$. Тогда каждая кривая $\gamma_t^*(s) : (0,1) \to U_0$ семейства $\Gamma^*(t)$ такова, что $\gamma_t^*(s) \to 0$ при $s \to 0$. Обозначим $\Gamma^* = \bigcup\limits_{t:\, 0 \in \overline{G^*(t)}} \Gamma^*(t)$. По предложению 4 $M(g(\Gamma^*)) = 0$. С другой стороны, согласно 10.2 в [10], $M(g\Gamma^*) \ge b_n \cdot \int\limits_E \frac{dr}{r}$, где постоянная b_n зависит только от размерности n и $E = \{|\beta(t)| : 0 \in \overline{G^*(t)}\}$ при некотором t. Следовательно, линейная мера Лебега $\operatorname{mes} E = 0$, что и требовалось доказать. Пусть $T = \{t : 0 \le t < 1, |\beta(t)| \notin E\}$. Заметим, что ввиду (3), $\overline{G^*(t)} \subset U_0 \setminus B_g$ при $t \in T$. По теореме Менгера–Урысона, см., напр., теорему IV.4 в [4], множество $U_0 \setminus B_g$ является областью. По предложению 1 отображение f отображает $\overline{G^*(t)}$ гомеоморфно на $\overline{G(t)}$. Кроме того, по предложению 3 f инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(t)}$. По определению угла φ_t, это возможно только в случае $\varphi_t = \pi$. Следовательно, при каждом $t \in T$ множество $\overline{G^*(t)} = \overline{G^*(t,\pi)}$ есть поверхность в $U_0 \setminus B_g$, топологически эквивалентная сфере, и f гомеоморфно отображает $\overline{G^*(t)}$ на $S(|\beta(t)|)$. Пусть $D(t)$ означает ограниченную компоненту множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G^*(t)}$. Положим $T_0 = \{t \in T : 0 \in D(t)\}$. Возможны 2 случая: $1 \in \overline{T_0}$ и $1 \notin \overline{T_0}$.

1 случай. Предположим, что $1 \in \overline{T_0}$, тогда найдётся возрастающая последовательность $t_j \in T_0$, такая что $t_j \to 1$. Положим $r_j = |\beta(t_j)|$ и $D_j = D(t_j)$; не ограничивая общности, мы можем считать, что $r_{j+1} < r_j$ и, ввиду того, что $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$, что $D_{j+1} \subset D_j$. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(r_1) \setminus \overline{B(r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, найдётся компонента A_j^* множества $g^{-1}A_j$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Т.к. $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$, $\overline{A_j^*} \subset U_0$. Кроме того, ввиду того, что $\overline{A_j} \cap gB_g = \varnothing$, $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$. По предложению 1 f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. Согласно сказанному выше, существует сечение $s_j : A_j \to A_j^*$ отображения f, такое что $s_j = s_k|_{A_j}$ при всех $k > j$. Следовательно, мы построили сечение $s : B(r_1)\setminus\{0\} \to U_0\setminus B_g$ отображения f в $B(r_1)\setminus\{0\}$. По предложению 2, $C(s,0)$ либо континуум в ∂U_0, либо единственная точка в U_0. Заметим, что ввиду соотношения (3) первая возможность исключена, если только $C(s,0)$ не вырождается в точку $x_0 = 0$. Таким образом, сечение s может быть продолжено до непрерывного отображения $\overline{s}$ всего шара $B(r_1)$. Заметим также, что ввиду условия $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$ и того, что $t_j \in T_0$, точка $x_0 = 0$ всегда принадлежит ограниченной компоненте дополнения кольцевой области A_j^* при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}$. Т.к $C(s,0) = \bigcap\limits_{j=2}^{\infty} \overline{A_j^*}$, то случай $C(s,0) = \{a\}$ невозможен при $a \neq 0$. Таким образом, $C(s,0) = \{0\}$ и $\overline{s}(0) = 0$. Пусть x_k – произвольная последовательность в U_0 с $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, тогда $f(x_k) \to 0$ при $k \to 0$. Отсюда вытекает устранимость отображения f в точке $x_0 = 0$, что противоречит условию леммы.

2 случай. Предположим теперь, что $1 \notin \overline{T_0}$. Кривую α мы можем продолжить до кривой $\overline{\alpha} : [-1,1) \to \mathbb{R}^n$ так, что $\overline{\alpha}(-1) \in \partial U_0 \setminus \{0\}$, $\overline{\alpha}(-1,1) \subset U_0$, $\overline{\alpha}|_{[0,1)} = \alpha$ и $\overline{\beta} = f(\overline{\alpha}(t)) \neq 0$ при всех $t \in [-1,1)$. По предположению, найдётся δ, $0 \le \delta < 1$ такое, что $[\delta,\,1) \cap T_0 = \varnothing$. Выберем возрастающую последовательность точек $t_j \in T \cap [\delta,1)$ такую, что: 1) $t_j \to 1$ при $j \to \infty$; 2) $|\beta(t)| < r_j = |\beta(t_j)|$ при всех $t \in (t_j,1)$; 3) $|\overline{\beta}(t)| > r_{j+1}$ при всех $t \in [-1,t_j]$. Как и выше, положим $D_j = D(t_j)$. Поскольку $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$ и последовательность $\alpha(t_j)$ можно выбрать монотонно убывающей, случай 2 можно условно разбить на 2 подслучая: (a) $D_j \subset D_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{N}$; (b) $\overline{D}_j \cap \overline{D}_{j+1} = \varnothing$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что (a) верно. Рассуждаем, как и в первом случае. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(r_1) \setminus \overline{B(r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, найдётся компонента A_j^* множества $g^{-1}A_j$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Ввиду того, что $\overline{A_j} \cap gB_g = \varnothing$, множество $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$. По предложению 1, f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. Заметим, что $\alpha(t_1,1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_1$ и $A_j^* \subset D_j \setminus \overline{D}_1$. Рассуждая, как выше, получаем непрерывное сечение $s : B(r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в $B(r_1) \setminus \{0\}$. Тогда $C(s,0)$ – невырожденный континуум в $U_0 \cup \{0\}$, что противоречит предложению 2.

Предположим, что верно (b). Заметим, что в этом случае

$$\alpha(t_j, 1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j\,. \qquad (5)$$

Положим $u_{j+1} = \sup\{t : \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\}$. Выберем окрестность U_{j+1} границы ∂D_{j+1} такую, что сужение $f|_{U_{j+1}}$ инъективно, см. предложение 3. Поскольку $\beta(t_{j+1}, 1) \subset B(r_{j+1})$, будем иметь $g\left(U_{j+1} \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\right)\right) \subset B(r_{j+1})$, ибо ввиду инъективности g в U_{j+1} все связные компоненты множества $g\left(U_{j+1} \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\right)\right)$ принадлежат одной и той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus S(r_{j+1})$. Следовательно, учитывая условие 3), найдётся число $v_1 = \max\{t : t_j < t < u_{j+1}, |\beta(t)| = r_{j+1}\}$, причём неравенства $t_j < v_1 < u_{j+1}$ строгие, $v_1 > \delta$ и, по определению, $v_1 \in T$, поскольку $\beta(t_{j+1}) = r_{j+1}$ и $t_{j+1} \in T$. Покажем, что

$$\overline{D}(v_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1})\,. \qquad (6)$$

Заметим прежде всего, что $\overline{G^*(v_1)}$ не может содержать точку $x_0 = 0$, т.к. $t_1 \in T$ и не может пересекать кривую $\overline{\alpha}$ в точке $\overline{\alpha}(-1)$, поскольку $\overline{\alpha}(-1) \in \partial U_0 \setminus \{0\}$ и ввиду условия (3). Если $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_j \neq \varnothing$, тогда либо $\overline{G^*(v_1)} \cap \overline{G^*(t_j)} \neq \varnothing$, либо $\overline{D}(t_j) \subset D(v_1)$, либо $\overline{D}(v_1) \subset D(t_j)$. В первом случае будем иметь $r_{j+1} = |\beta(v_1)| = r_j$, что невозможно ввиду условия 2). Во втором случае, $\overline{G^*(v_1)} \cap \overline{\alpha}(-1, t_j) \neq \varnothing$, что противоречит условию 3). Третий случай невозможен в силу (5). Следовательно, $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_j = \varnothing$. Аналогично, $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_{j+1} = \varnothing$. Таким образом, соотношение (6) доказано. В таком случае, $v_1' = \sup\{t : \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}(v_1)\} > t_j$. Тогда найдётся $v_2 = \max\{t : t_j < t < v_1', |\beta(t)| = r_{j+1}\}$, такое что $\overline{D}(v_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1} \cup \overline{D}(v_1)$. И так далее. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечное число компонент связности $\overline{G^*(v_i)}$ множества $g^{-1}S(r_{j+1})$. Заметим, что существует $v = \lim\limits_{j\to\infty} v_j$, $v \in (t_j, u_{j+1})$, такое что каждая окрестность точки $\alpha(v)$ пересекает бесконечно много компонент $g^{-1}S(r_{j+1})$. Последнее невозможно, т.к. ввиду соотношения (4) отображение f является локальным гомеоморфизмом в точке $\alpha(v)$. Лемма доказана. $\Box$

Следующее утверждение доказано автором в [12], см. лемму 3.1 и теорему 5.1.

Предложение 5. Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Тогда cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\right) = 0$ для любой окрестности $U \supset \{x_0\}$ в D.

Лемма 2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Тогда каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. Выберем $r_0 > 0$ таким, что $\overline{B(x_0, r_0)} \subset D \cup \{x_0\}$ и положим $U_0 = B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Так как $0 \notin f(D)$, существует $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(r')} \cap fS(x_0, r_0) = \varnothing. \qquad (7)$$

Можно считать $r' < 1$. По предложению 5 ввиду (7) найдётся сферический сегмент $G \subset S(r')$ такое, что некоторая связная компонента G^* множества $f^{-1}G$ содержится в U_0. Для $y \in S(r')$ обозначим через $\gamma_y : (0, r'] \to \overline{B(r')}$ кривую $\gamma_y(t) = ty$. При каждом $r'y \in G$, пусть γ_y^* – максимальное поднятие кривой γ_y с концом в G^*, $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$. Проводя рассуждения, аналогичные лемме 3.1 в [12], можно показать, что $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$. Для справедливости заключения леммы достаточно показать, что $r_y = 0$ для п.в. $r'y \in G$. Пусть $E_i = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : r'y \in G, r_y > 1/i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$. Достаточно показать, что $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$ для каждого i, где $\mathcal{H}^{n-1}$ – $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Для фиксированного $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_i = \{\gamma_y^* : y \in E_i\}$. По сказанному выше, все кривые семейства Γ_i стремятся к точке x_0, поэтому $M(\Gamma_i) = 0$. По предложению 4 также $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Заметим, что семейство $f\Gamma_i$ минорирует семейство Δ всех отрезков $\alpha_y : [1/i, r'] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha_y(t) = ty$, $y \in E_i$. Пусть $\rho \in \operatorname{adm} f\Gamma_i$. При каждом фиксированном $y \in E_i$ по неравенству Гёльдера имеем оценку

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \le \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \cdot \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \le \qquad (8)$$

$$\le \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n},$$

т.к. $\left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \le \left(\frac{r'^{(n+1)}}{n+1}\right)^{(n-1)/n} < 1$ ибо $r' < 1$. Опять же, по неравенству Гёльдера и по выбору ρ, $1 \le \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)dt \le \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n}$, откуда следует, что $\left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n} \le \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt$. Тогда по (8)

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \le \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\,. \qquad (9)$$

Используя неравенство (9) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dm(x) \ge \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt\right) dy \ge \frac{1}{i^{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho)\,, \qquad (10)$$

где $F_\rho = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\,dt \ge 1\}$. Заметим, что по выбору ρ имеет место включение $E_i \subset F_\rho$. Поскольку $M(f\Gamma_i) = 0$, из (10) следует что $\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$. Лемма доказана. $\Box$

Лемма 3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Тогда $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$.*

Доказательство легко следует из лемм 1 и 2. Предположим противное, тогда найдётся $y \in \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \setminus \overline{fB_f}$. Тогда по лемме 2 y является асимптотическим пределом отображения f в точке x_0. Но тогда по лемме 1 $y \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, что противоречит сделанному предположению. $\Box$

Лемма 4. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Тогда множество fB_f неограничено.*

Доказательство. Заметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ и по лемме 3 существует последовательность $y_k \in fB_f$, $k = 1, 2, \ldots$, такая что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тем самым, fB_f неограничено, что и требовалось доказать. $\Box$

Лемма 5. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Тогда $x_0 \in \overline{B_f}$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует окрестность U точки x_0, такая что

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap B_f = \varnothing\,. \tag{11}$$

Заметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})$. Применим к сужению $g := f|_{U\setminus\{x_0\}}$ отображения f на множество $U \setminus \{x_0\}$ лемму 3. Получаем, что найдётся последовательность $y_k \in f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Однако, последнее противоречит соотношению (11), ибо тогда $f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right) \neq \varnothing$ и, значит, $\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right) \neq \varnothing$. $\Box$

Выбирая в леммах 1–5 $\psi(t) := \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$, на основании следствия 2.3 в [5] и понятия *конечного среднего колебания,* см. там же, получаем такой результат.

Теорема 1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, $x_0 \in \partial D$ – изолированная существенная особая точка отображения f, такие, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение Q над сферой $|x - x_0| = r$. Тогда:*

I. Если $n \geq 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$;

II. Каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0;

III. Если $n \geq 3$, *то* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$;

IV. Если $n \geq 3$ *и* $\infty \notin f(D)$, *то множество* fB_f *неограничено и* $x_0 \in \overline{B_f}$.

1. *Agard S., Marden A.* A removable singularity theorem for local homeomorphisms // Indiana Math. J. – **20**. – 1970. – P.455-461.
2. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – **22**. – 2003. – P.1397-1420.
3. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – **103**. – 1962. – P.353-393.
4. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension Theory, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
5. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – **2**, №3. – 2005. – P.395-417.
6. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – **488**. – 1971. – P.1-31.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q–homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – **30**, no.1. – 2005. – P.49-69.
8. *Rickman S.* Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – **96**. – 2005. – P.117-150.
10. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
11. *Зорич В.А.* Теорема М.А.Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. – **116**, №3. – 1967. – С.415-433.
12. *Севостьянов Е.А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. матем. вестник. – **5**, no.3. – 2008. – С.366-381.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`brusin2006@rambler.ru, e_sevostyanov@rambler.ru`

Получено 31.10.08