УДК 517.5

©2008. **В.П. Заставный**

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА-МАКЛОРЕНА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

В работе получено обобщение формулы Эйлера-Маклорена, с помощью которой найдена асимптотика рядов Матье.

1. Обобщенная формула Эйлера-Маклорена. Многочлены Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются с помощью следующих производящих функций (см., например, [1, §1.13, §1.14])

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,B_n(x)\,,\ |t|<2\pi\,;\quad \frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,E_n(x)\,,\ |t|<\pi. \tag{1}$$

Связь между многочленами Эйлера и Бернулли вытекает из тождества $E_{n-1}(x)=\frac{2}{n}\left(B_n(x)-2^nB_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Сплайны Бернулли и Эйлера определяются соответственно по формулам

$$b_n(x)=B_n(\{x\})\text{ и }e_n(x)=\frac{2}{n+1}\left(b_{n+1}(x)-2^{n+1}b_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ ,\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

Если $p,n\in\mathbb{N}$ и $f\in C^n[0,p]$, то формулу Эйлера-Маклорена (см., например, [2, гл.IV, §3]) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}f(k)=\int_0^p f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}B_{k+1}(0)\left(f^{(k)}(p)-f^{(k)}(0)\right)+\\ +\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\int_0^p b_{n+1}(t)\,df^{(n)}(t)\ .\end{aligned} \tag{2}$$

При этом надо учесть, что $(-1)^kB_k(0)=B_k(0)$ при всех $k\in\mathbb{Z}_+$, $k\neq 1$, и $B_1(0)=-\frac{1}{2}$.

Если в (2) взять $f(x)=F(\varepsilon x+\varepsilon u)$, $u>0$, $\varepsilon>0$, то получим неудобные для исследований при $\varepsilon\to+0$ слагаемые $F^{(k)}(\varepsilon u)$ и $\int_{\varepsilon u}^{\varepsilon(p+u)}F(t)\,dt$.

Одним из основных результатов данной работы является следующее обобщение формулы (2).

Теорема 1.

1. *Пусть* $p\in\mathbb{N}$, $u>-p$, $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Работа выполнена при поддержке ДФФД, проект Ф25.1/055

Если $F \in C^n[\varepsilon u^-, \varepsilon(p+u)]$, *где* $u^- = \frac{u-|u|}{2}$, *то имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{p} F(\varepsilon k + \varepsilon u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon(p+u)} F(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\varepsilon^k}{(k+1)!}\Big(B_{k+1}(0)F^{(k)}(\varepsilon p + \varepsilon u) - B_{k+1}(-u)F^{(k)}(0)\Big) + \frac{(-1)^n\varepsilon^n}{(n+1)!}\left(\int_0^{\varepsilon p} b_{n+1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,dF^{(n)}(t+\varepsilon u) + \int_0^1 B_{n+1}(-u+ut)\,dF^{(n)}(t\varepsilon u)\right). \tag{3}$$

2. *Пусть* $p \in \mathbb{N}$, $u > -2p$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $G \in C^n[\varepsilon u^-, \varepsilon(2p+u)]$, *то имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k-1}G(\varepsilon k + \varepsilon u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\varepsilon^k}{2\,k!}\Big(E_k(0)G^{(k)}(2\varepsilon p + \varepsilon u) - E_k(-u)G^{(k)}(0)\Big) + \frac{(-1)^n\varepsilon^n}{2\,n!}\left(\int_0^{2\varepsilon p} e_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,dG^{(n)}(t+\varepsilon u) + \int_0^1 E_n(-u+ut)\,dG^{(n)}(t\varepsilon u)\right). \tag{4}$$

Здесь $B_n(x)$ *и* $E_n(x)$ – *соответственно многочлены Бернулли и Эйлера, а* $b_n(x)$ *и* $e_n(x)$ – *сплайны Бернулли и Эйлера.*

Доказательство. Докажем утверждение **1.** При сделанных предположениях точки 0 и εu принадлежат отрезку $[\varepsilon u^-, \varepsilon(p+u)]$. Поэтому все интегралы в равенстве (3) имеют смысл. Очевидно $b_n(x)$ - периодические с периодом $T = 1$ функции. Из свойств многочленов Бернулли вытекает, что $b_0(x) = 1$, $b_1(x) = \frac{1}{2} + \{x\}$, при $n \geq 2$ функции $b_n(x)$ абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$ и $b_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$, $b_n'(x) = nb_{n-1}(x)$ при $n \geq 3$, $x \in \mathbb{R}$ и $b_2'(x) = 2b_1(x)$ при $x \notin \mathbb{Z}$. Учитывая эти свойства и применяя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана-Стилтьеса, получаем

$$\frac{(-1)^n\varepsilon^n}{(n+1)!}\int_0^{\varepsilon p} b_{n+1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,dF^{(n)}(t+\varepsilon u) = \frac{(-1)^n\varepsilon^n}{(n+1)!}b_{n+1}(0)\Big(F^{(n)}(\varepsilon p+\varepsilon u) - F^{(n)}(\varepsilon u)\Big) + \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon^{n-1}}{n!}\int_0^{\varepsilon p} b_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\,dF^{(n-1)}(t+\varepsilon u) = \ldots = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\varepsilon^k}{(k+1)!}b_{k+1}(0)\Big(F^{(k)}(\varepsilon p+\varepsilon u) - F^{(k)}(\varepsilon u)\Big) - \int_0^{\varepsilon p} F(t+\varepsilon u)\,d\,b_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Учитывая равенство $b_1(x) = -\frac{1}{2} + x - [x]$, получаем

$$\int_0^{\varepsilon p} F(t+\varepsilon u)\, d\, b_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon p} F(t+\varepsilon u)\, dt - \int_0^{\varepsilon p} F(t+\varepsilon u)\, d\left[\frac{t}{\varepsilon}\right] =$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon p} F(t+\varepsilon u)\, dt - \sum_{k=1}^{p} F(\varepsilon k + \varepsilon u)\ .$$

Тогда

$$\frac{(-1)^n \varepsilon^n}{(n+1)!}\int_0^{\varepsilon p} b_{n+1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\, dF^{(n)}(t+\varepsilon u) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon u}^{\varepsilon(p+u)} F(t)\, dt +$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(k+1)!} b_{k+1}(0)\left(F^{(k)}(\varepsilon p + \varepsilon u) - F^{(k)}(\varepsilon u)\right) + \sum_{k=1}^{p} F(\varepsilon k + \varepsilon u)\ . \tag{5}$$

Аналогично, учитывая равенство $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ и применяя формулу интегрирования по частям, получаем следующее равенство

$$\frac{(-1)^n \varepsilon^n}{(n+1)!}\int_0^{1} B_{n+1}(-u+ut)\, dF^{(n)}(t\varepsilon u) = -\int_0^1 F(t\varepsilon u)\, dB_1(-u+ut) +$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(k+1)!}\left(B_{k+1}(0)F^{(k)}(\varepsilon u) - B_{k+1}(-u)F^{(k)}(0)\right)\ .$$

Учитывая равенство $B_1(x) = -\frac{1}{2} + x$, получаем

$$\frac{(-1)^n \varepsilon^n}{(n+1)!}\int_0^{1} B_{n+1}(-u+ut)\, dF^{(n)}(t\varepsilon u) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon u} F(t)\, dt +$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(k+1)!}\left(B_{k+1}(0)F^{(k)}(\varepsilon u) - B_{k+1}(-u)F^{(k)}(0)\right)\ . \tag{6}$$

Складывая равенства (5) и (6), а также учитывая равенства $b_k(0) = B_k(0)$, получаем равенство (3).

Утверждение **2** вытекает из утверждения **1** и следующего очевидного равенства

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k-1} G(\varepsilon k + \varepsilon u) = \sum_{k=1}^{2p} G(\varepsilon k + \varepsilon u) - 2\sum_{k=1}^{p} G(2\varepsilon k + \varepsilon u)\ . \tag{7}$$

К первой сумме в правой части равенства (7) надо применить формулу (3) при $F = G$, в которой вместо p надо взять $2p$, а ко второй сумме также надо применить формулу (3) при $F = G$, в которой вместо ε надо взять 2ε, а вместо u надо взять $\frac{u}{2}$. Следует только учесть, что $\left(\frac{u}{2}\right)^- = \frac{u^-}{2}$. $\square$

2. Следствия из обобщенной формулы Эйлера-Маклорена.

Теорема 2.

1. *Если при некотором* $n \in \mathbb{Z}_+$ *функция* $F \in C^n[0,+\infty) \cap L[0,+\infty)$, $F^{(n)}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[0,+\infty)$ *и* $F^{(k)}(+\infty) = 0$ *при* $0 \le k \le n$, *то при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $u \ge 0$ *имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} F(\varepsilon k + \varepsilon u) =& \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty} F(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(k+1)!}\, B_{k+1}(-u) F^{(k)}(0) + \\ & \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{(n+1)!}\, L_n(\varepsilon, u)\ ,\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$L_n(\varepsilon, u) = \int_0^{\infty} b_{n+1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dF^{(n)}(t + \varepsilon u) + \int_0^1 B_{n+1}(-u + ut)\, dF^{(n)}(t\varepsilon u)\ ,$$

$$|L_n(\varepsilon, u)| \le \sup_{0 \le x \le 1} |b_{n+1}(x)|\, V_{\varepsilon u}^{\infty}(F^{(n)}) + \sup_{-u \le x \le 0} |B_{n+1}(x)|\, V_0^{\varepsilon u}(F^{(n)})\ . \tag{9}$$

Если дополнительно $F^{(n)}$ *абсолютно непрерывна на* $[0,+\infty)$, *то* $L_n(\varepsilon, u) = o(1)$ *при* $\varepsilon \to +0$. *При этом оценка в* $o(1)$ *равномерная по* $u \in [0, a]$ *при любом фиксированном* $a > 0$.

2. *Если при некоторых* $q < 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *функция* $F \in C^n[q,+\infty) \cap L[q,+\infty)$, $F^{(n)}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[q,+\infty)$ *и* $F^{(k)}(+\infty) = 0$ *при* $0 \le k \le n$, *то при любых* $u < 0$, $\varepsilon \in (0, \frac{q}{u})$ *имеет место равенство* (8) *и*

$$|L_n(\varepsilon, u)| \le \sup_{0 \le x \le 1} |b_{n+1}(x)|\, V_{\varepsilon u}^{\infty}(F^{(n)}) + \sup_{0 \le x \le -u} |B_{n+1}(x)|\, V_{\varepsilon u}^{0}(F^{(n)})\ . \tag{10}$$

Если дополнительно $F^{(n)}$ *абсолютно непрерывна на* $[q,+\infty)$, *то* $L_n(\varepsilon, u) = o(1)$ *при* $\varepsilon \to +0$. *При этом оценка в* $o(1)$ *равномерная по* $u \in [b, 0]$ *при любом фиксированном* $b < 0$.

Доказательство теоремы 2. Докажем утверждение **1.** Равенство (8) получается из теоремы 1, если в равенстве (3) перейти к пределу при $p \to +\infty$. Неравенство (9) очевидно. Если дополнительно $F^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[0,+\infty)$, то $F^{(n+1)} \in L[0,+\infty)$ и, значит, при $h \to +0$ $\int_0^{\infty} |F^{(n+1)}(t+h) - F^{(n+1)}(t)|\, dt = o(1)$. Кроме того, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}|L_n(\varepsilon, u)| \le & \left|\int_0^{\infty} b_{n+1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) F^{(n+1)}(t)\, dt\right| + \sup_{-u \le x \le 0} |B_{n+1}(x)|\, V_0^{\varepsilon u}(F^{(n)}) + \\ & \sup_{0 \le x \le 1} |b_{n+1}(x)| \int_0^{\infty} \left|F^{(n+1)}(t + \varepsilon u) - F^{(n+1)}(t)\right|\, dt\ .\end{aligned}$$

То, что последнее слагаемое стремится к нулю, отмечалось выше. Первое слагаемое в правой части последнего неравенства также стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Это вытекает из теоремы Римана-Лебега, так как $b_{n+1}(x)$ – периодическая функция с периодом $T=1$, $F^{(n+1)} \in L[0,+\infty)$ и

$$\int_0^1 b_{n+1}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{B'_{n+2}(x)}{n+2}\,dx = \frac{B_{n+2}(1)-B_{n+2}(0)}{n+2} = 0$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. И, наконец, $V_0^{\varepsilon u}(F^{(n)}) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, так как функция $F^{(n)}$ имеет ограниченную вариацию на $[0,+\infty)$ и непрерывна в нуле. Таким образом, $L_n(\varepsilon,u) = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$, причем оценка в $o(1)$ равномерная по $u \in [0,a]$ при любом фиксированном $a > 0$.

Утверждение **2** доказывается аналогично. Следует учесть, что, если дополнительно $F^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[q,+\infty)$, $q<0$, то $F^{(n+1)} \in L[q,+\infty)$ и, значит, $\int_0^\infty |F^{(n+1)}(t+h) - F^{(n+1)}(t)|\,dt = o(1)$ при $h \to -0$ и $V_{\varepsilon u}^0(F^{(n)}) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, так как функция $F^{(n)}$ имеет ограниченную вариацию на $[q,+\infty)$ и непрерывна в нуле. $\square$

Теорема 3.

1. *Если при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $G \in C^n[0,+\infty)$, $G^{(n)}$ имеет ограниченную вариацию на $[0,+\infty)$ и $G^{(k)}(+\infty) = 0$ при $0 \le k \le n$, то при любых $\varepsilon > 0$ и $u \ge 0$ имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}G(\varepsilon k+\varepsilon u) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\varepsilon^k}{2\,k!}\,E_k(-u)G^{(k)}(0) + \frac{(-1)^n\varepsilon^n}{2\,n!}\,l_n(\varepsilon,u), \tag{11}$$

где

$$l_n(\varepsilon,u) = \int_0^\infty e_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dG^{(n)}(t+\varepsilon u) + \int_0^1 E_n(-u+ut)\,dG^{(n)}(t\varepsilon u),$$

$$|l_n(\varepsilon,u)| \le \sup_{0\le x\le 2}|e_n(x)|\,V_{\varepsilon u}^{\infty}(G^{(n)}) + \sup_{-u\le x\le 0}|E_n(x)|\,V_0^{\varepsilon u}(G^{(n)})\,. \tag{12}$$

Если дополнительно $G^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[0,+\infty)$, то $l_n(\varepsilon,u) = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$. При этом оценка в $o(1)$ равномерная по $u \in [0,a]$ при любом фиксированном $a > 0$.

2. *Если при некоторых $q<0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $G \in C^n[q,+\infty)$, $G^{(n)}$ имеет ограниченную вариацию на $[q,+\infty)$ и $G^{(k)}(+\infty) = 0$ при $0 \le k \le n$, то при любых $u<0$, $\varepsilon \in (0,\frac{q}{u})$ имеет место равенство* (11) *и*

$$|l_n(\varepsilon,u)| \le \sup_{0\le x\le 2}|e_n(x)|\,V_{\varepsilon u}^{\infty}(G^{(n)}) + \sup_{0\le x\le -u}|E_n(x)|\,V_{\varepsilon u}^{0}(G^{(n)})\,. \tag{13}$$

Если дополнительно $G^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[q,+\infty)$, то $l_n(\varepsilon,u) = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$. При этом оценка в $o(1)$ равномерная по $u \in [b,0]$ при любом фиксированном $b < 0$.

Доказательство теоремы 3. Доказательство такое же, как и в теореме 2. Докажем, например, утверждение **1.** Равенство (11) получается из теоремы 1, если в равенстве (4) перейти к пределу при $p \to +\infty$. Неравенство (12) очевидно. Если дополнительно $G^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$, то

$$|l_n(\varepsilon, u)| \le \left| \int_0^\infty e_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) G^{(n+1)}(t)\, dt \right| +$$
$$\sup_{0\le x\le 2} |e_n(x)| \int_0^\infty \left| G^{(n+1)}(t+\varepsilon u) - G^{(n+1)}(t) \right| dt + \sup_{-u\le x\le 0} |E_n(x)|\, V_0^{\varepsilon u}(G^{(n)})\ .$$

Далее рассуждения точно такие же, как и в теореме 2. Следует только учесть, $e_n(x)$ – периодическая функция с периодом $T = 2$ и $\int_0^2 e_n(x)\, dx = 0$. □

Теорема 4.
1. *Если при некотором* $q \le 0$ *функция* $F \in C^\infty[q, +\infty)$ *и* $F^{(n)} \in L[q, +\infty)$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$*, то при любом фиксированном* $u \ge 0$*, а если* $q < 0$*, то и при любом фиксированном* $u \in \mathbb{R}$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\sum_{k=1}^\infty F(\varepsilon k + \varepsilon u) \sim \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty F(t)\, dt + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(k+1)!} B_{k+1}(-u) F^{(k)}(0)\ ,\ \varepsilon \to +0\ . \tag{14}$$

2. *Если при некотором* $q \le 0$ *функция* $G \in C^\infty[q, +\infty)$, $G(+\infty) = 0$ *и* $G^{(n)} \in L[q, +\infty)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*, то при любом фиксированном* $u \ge 0$*, а если* $q < 0$*, то и при любом фиксированном* $u \in \mathbb{R}$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} G(\varepsilon k + \varepsilon u) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{2\, k!} E_k(-u) G^{(k)}(0)\ ,\ \varepsilon \to +0\ . \tag{15}$$

Доказательство теоремы 4. Докажем утверждение **1.** Из условий на F вытекает, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ существует конечный предел

$$F^{(n)}(+\infty) = \int_q^\infty F^{(n+1)}(x) dx + F^{(n)}(q)\ .$$

Так как $F^{(n)} \in L[q, +\infty)$, то $F^{(n)}(+\infty) = 0$. Дальше при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ к функции F применяем теорему 2.

Аналогично докажем утверждение **2.** Из условий на G вытекает, что при любом $n \in \mathbb{N}$ существует конечный предел $G^{(n)}(+\infty) = 0$. Дальше при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ к функции G применяем теорему 3. □

Пример. Функция $F(t) = t^{\gamma-1} e^{-t^\alpha}$ при любых $\gamma, \alpha \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям теоремы 4 при любом $q < 0$. Поэтому для F имеют место представления (14) и (15). В этих представлениях полагаем $\varepsilon^\alpha = x > 0$. Тогда при любом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ имеют место следующие асимптотические представления

$$\sum_{k=1}^\infty (k+u)^{\gamma-1} e^{-x(k+u)^\alpha} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\alpha x^{\frac{\gamma}{\alpha}}} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k+1} B_{\alpha k+\gamma}(-u) x^k}{(\alpha k+\gamma) k!}\ ,\ x \to +0\ .$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(k+u)^{\gamma-1}e^{-x(k+u)^{\alpha}} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}E_{\alpha k+\gamma-1}(-u)x^k}{2k!}\ ,\ x\to+0\ .$$

При $u=0$ эти представления можно найти в [3, Примеры 11.8, 11.9].

3. Применения к рядам Матье. Рассмотрим следующие обобщённые ряды Матье

$$\begin{gathered} S(t,u,\gamma,\alpha,\mu) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(k+u)^{\gamma}}{((k+u)^{\alpha}+t^{\alpha})^{\mu+1}}\ , \\ \gamma\geq 0\ ,\ \alpha>0\ ,\ \delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>1\ ,\ u>-1\ ,\ t\geq 0\ . \end{gathered} \tag{16}$$

Наряду с рядом (16) рассмотрим следующий ряд

$$\begin{gathered} \tilde{S}(t,u,\gamma,\alpha,\mu) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}(k+u)^{\gamma}}{((k+u)^{\alpha}+t^{\alpha})^{\mu+1}}\ , \\ \gamma\geq 0\ ,\ \alpha>0\ ,\ \delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>0\ ,\ u>-1\ ,\ t\geq 0\ . \end{gathered} \tag{17}$$

Если $\delta>1$, то очевидно

$$\tilde{S}(t,u,\gamma,\alpha,\mu)=S(t,u,\gamma,\alpha,\mu)-2^{1-\delta}S\left(\frac{t}{2},\frac{u}{2},\gamma,\alpha,\mu\right). \tag{18}$$

В работе [4] была поставлена задача о получении точных неравенств для $S(t,0,\frac{\alpha}{2},\alpha,\mu)$. Отметим, что полученное в работе [5, Theorem 2] неравенство для $S(t,0,\frac{\alpha}{2},\alpha,\mu)$ неверно. В теореме 5 (см. также следствия 1 и 2) для всех допустимых параметров доказаны неравенства для рядов (16) и (17). В качестве простых следствий получается асимптотика при $t\to+\infty$, а при $(\gamma,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$ и асимптотическое представление в виде ряда по степеням $t^{-\alpha(k+\mu+1)}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 5.
Пусть $\gamma\geq 0$, $\alpha>0$, $g(x):=x^{\gamma}(x^{\alpha}+1)^{-\mu-1}$, $\delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>0$. Тогда:

1. *Если $(\gamma,\alpha)\notin\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$, то $g\in C^r[0,+\infty)$, $g\notin C^{r+1}[0,+\infty)$ и при любом целом $n\in[0,r]$ функция $g^{(n)}$ абсолютно непрерывна на $[0,+\infty)$, где*

$$r=\begin{cases} [\gamma] & ,\quad \text{если } \gamma\notin\mathbb{Z}_+\ , \\ \gamma+[\alpha] & ,\quad \text{если } \gamma\in\mathbb{Z}_+\ ,\ \alpha\notin\mathbb{Z}_+. \end{cases} \tag{19}$$

Если $\gamma\notin\mathbb{Z}_+$, то $g^{(p)}(0)=0$ при всех целых $p\in[0,r]$. Если $\gamma\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha\notin\mathbb{N}$, то $g^{(p)}(0)=0$ при всех целых $p\in[0,r]$, $p\neq\gamma$ и $g^{(\gamma)}(0)=\gamma!$.
Кроме того, функция $G=g$ удовлетворяет условиям утверждения **1** *в теореме 3 при любом целом $n\in[0,r]$.*
Если дополнительно $\delta>1$, то функция $F=g$ удовлетворяет условиям утверждения **1** *в теореме 2 при любом целом $n\in[0,r]$.*

2. *Если* $(\gamma,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$, *то* $g\in C^\infty(-1,+\infty)$ *и функция* $G=g$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3 *при любых* $q\in(-1,0)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, *а функция* $g^{(n)}$ *абсолютно непрерывна на* $[q,+\infty)$. *Кроме того, при любом фиксированном* $u\in\mathbb{R}$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\tilde{S}(t,u,\gamma,\alpha,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(\alpha+1)+\gamma}}{t^{\alpha(k+\mu+1)}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+k+1)\,E_{k\alpha+\gamma}(-u)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\ ,\ t\to+\infty\ . \qquad (20)$$

Если дополнительно $\delta>1$, *то функция* $F=g$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2 *при любых* $q\in(-1,0)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. *В этом случае при любом фиксированном* $u\in\mathbb{R}$ *имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\begin{gathered}S(t,u,\gamma,\alpha,\mu)\sim\frac{1}{t^{\alpha(\mu+1)-\gamma-1}}\cdot\frac{2}{\alpha}\,B\left(\frac{\gamma+1}{\alpha},\mu+1-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)+\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(\alpha+1)+\gamma}}{t^{\alpha(k+\mu+1)}}\cdot\frac{2\,\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\cdot\frac{B_{k\alpha+\gamma+1}(-u)}{k\alpha+\gamma+1}\ ,\ t\to+\infty\ .\end{gathered} \qquad (21)$$

Асимптотическое представление (20) при $u=0$, $\gamma=1$, $\alpha=2$ и $\mu=1$ другим методом получено в [6]. Асимптотическое представление (21) при $u=0,\gamma=1,\alpha=2$ и $\mu=1$ другими методами было получено в 1981-1982 годах в работах C.L.Wang, X.H.Wang [7] и A.Elbert [8].

Лемма 1. *Пусть* $\gamma\ge 0$, $\alpha>0$, $\delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>0$, $g(x):=x^\gamma(x^\alpha+1)^{-\mu-1}$. *Тогда*

1. $g\in C[0,+\infty)\bigcap C^\infty(0,+\infty)$ *и* $g^{(r)}\in L[1,+\infty)$, $g^{(r-1)}(+\infty)=0$ *при всех* $r\in\mathbb{N}$. *Кроме того,* $g\in L[1,+\infty)\iff\delta>1$.

2. *Если* $(\gamma,\alpha)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$, *то* $g\in C^\infty(-1,+\infty)$ *и при всех* $p\in\mathbb{Z}_+$ *имеет место равенство*

$$\frac{g^{(p)}(0)}{p!}=\begin{cases}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)} & ,\quad \text{если } p=k\alpha+\gamma,k\in\mathbb{Z}_+,\\ 0 & ,\quad \text{если } p\ne k\alpha+\gamma,k\in\mathbb{Z}_+.\end{cases}$$

3. *Если* $(\gamma,\alpha)\notin\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$, *то функция* g *имеет в нуле конечную гладкость*

$$r=\begin{cases}[\gamma] & ,\quad \text{если } \gamma\notin\mathbb{Z}_+\,,\\ \gamma+[\alpha] & ,\quad \text{если } \gamma\in\mathbb{Z}_+\,,\ \alpha\notin\mathbb{Z}_+.\end{cases}$$

В этом случае $g\in C^r[0,1]$, $g\notin C^{r+1}[0,1]$ *и* $g^{(r+1)}\in L(0,1)$. *Если* $\gamma\notin\mathbb{Z}_+$, *то* $g^{(p)}(0)=0$ *при всех целых* $p\in[0,r]$. *Если* $\gamma\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha\notin\mathbb{N}$, *то* $g^{(p)}(0)=0$ *при всех целых* $p\in[0,r]$, $p\ne\gamma$ *и* $g^{(\gamma)}(0)=\gamma!$.

Доказательство. Утверждения леммы вытекают из следующих равенств

$$\frac{1}{(u+1)^{\mu+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\,u^k\ ,\ |u|<1\ ,$$

$$\begin{aligned} g(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\cdot x^{\gamma+k\alpha}\ ,\ 0\le x<1\ ,\\ g(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\cdot\frac{1}{x^{\delta+k\alpha}}\ ,\ x>1\ . \end{aligned} \tag{22}$$

□

Доказательство теоремы 5. Утверждение теоремы 5 сразу получается из леммы 1, теорем 2 и 3, в которых надо взять $G=F=g$ и $\varepsilon=\frac{1}{t}$. □

Следствие 1 . *Пусть* $\gamma\ge 0$, $\alpha>0$, $\delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>0$ *и* $g(x):=x^{\gamma}(x^{\alpha}+1)^{-\mu-1}$. *Тогда на промежутке* $[0,+\infty)$ *функция* g *имеет ограниченную вариацию, равную* $V_0^{\infty}(g)=1$, *если* $\gamma=0$ *и* $V_0^{\infty}(g)=2\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta}+1\right)^{-\mu-1}$, *если* $\gamma>0$. *Кроме того, при любых* $u\ge 0$ *и* $t>0$ *имеет место равенство*

$$\tilde S(t,u,\gamma,\alpha,\mu)=\frac{g(0)+l(t,u)}{t^{\alpha(\mu+1)-\gamma}}\ ,\ \text{где } |l(t,u)|\le V_0^{\infty}(g)\ ,\ l(t,u)=o(1),\ t\to+\infty\,. \tag{23}$$

Если дополнительно $\delta>1$, *то при любых* $u\ge 0$ *и* $t>0$ *имеет место равенство*

$$S(t,u,\gamma,\alpha,\mu)=\frac{\frac{2}{\alpha}\,B\left(\frac{\gamma+1}{\alpha},\mu+1-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{t^{\alpha(\mu+1)-\gamma-1}}-\frac{(1+2u)\,g(0)-L(t,u)}{t^{\alpha(\mu+1)-\gamma}}\,, \tag{24}$$

где $|L(t,u)|\le(1+2u)V_0^{\infty}(g)$ *и* $L(t,u)=o(1)$ *при* $t\to+\infty$. *При этом в обоих случаях оценка в* $o(1)$ *равномерная по* $u\in[0,a]$ *при любом фиксированном* $a>0$.

Доказательство. В случае $\gamma=0$ функция g строго убывает на $[0,+\infty)$ и, значит, $V_0^{\infty}(g)=g(0)-g(+\infty)=1$. В случае $\gamma>0$ функция g возрастает на $[0,x_0]$ и убывает на $[x_0,+\infty)$, где $x_0=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{1/\alpha}$ и, значит, $V_0^{\infty}(g)=2g(x_0)$. Далее применяем утверждения **1** теорем 3 и 2 при $n=0$, $F=G=g$ и $\varepsilon=\frac{1}{t}$. Из равенств (11) и (8) при $n=0$ вытекает, что $l(t,u)=l_0\left(\frac{1}{\varepsilon},u\right)$ и $L(t,u)=2L_0\left(\frac{1}{\varepsilon},u\right)$. Осталось применить неравенства (12) и (9). Следует только учесть, что $B_1(x)=-\frac{1}{2}+x$, $b_1(x)=-\frac{1}{2}+\{x\}$, $E_0(x)=1$, $e_0(x)=1$ при $0\le x<1$, $e_0(x)=-1$ при $1\le x<2$ и $V_0^{\varepsilon u}(g)+V_{\varepsilon u}^{\infty}(g)=V_0^{\infty}(g)$. □

Следствие 2. *Пусть* $(\frac{\gamma}{2},\frac{\alpha}{2})\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{N}$, $\delta:=\alpha(\mu+1)-\gamma>0$. *Тогда при всех* $n\in\mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\tilde S(t,0,\gamma,\alpha,\mu)=\frac{(-1)^{\gamma}E_{\gamma}(0)}{t^{\alpha(\mu+1)}}+o\left(\frac{1}{t^{\alpha(n+\mu+1)}}\right),\ t\to+\infty\,. \tag{25}$$

Если дополнительно $\delta > 1$, то при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$S(t,0,\gamma,\alpha,\mu) = \frac{1}{t^{\alpha(\mu+1)-\gamma-1}} \cdot \frac{2}{\alpha} B\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}, \mu+1-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right) + \frac{(-1)^{\gamma}\, 2\, B_{\gamma+1}(0)}{(\gamma+1)\, t^{\alpha(\mu+1)}} + o\left(\frac{1}{t^{\alpha(n+\mu+1)}}\right),\ t \to +\infty\,. \tag{26}$$

Доказательство. Доказательство сразу получается из теорем 2, 3 и 5. Следует только учесть, что $E_m(0) = \frac{2(1-2^{m+1})}{m+1}\, B_{m+1}(0)$ при $m \in \mathbb{Z}_+$, $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ и $B_{2p+1}(0) = 0$ при всех $p \in \mathbb{N}$. Поэтому $E_0(0) = 1$ и $E_{2p}(0) = 0$ при $p \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание. Скорее всего остаточный член в следствии 2 имеет более быстрое стремление к нулю. Это видно на следующих трех примерах. С помощью формулы суммирования Пуассона можно показать (см., например, [3, Пример 11.3]), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+t^2} = \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2\pi}{t(e^{2\pi t}-1)} = \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t^2} + O\left(\frac{1}{te^{2\pi t}}\right),\ t \to +\infty\,.$$

Из этой формулы и равенства (18) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k^2+t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})} = \frac{1}{t^2} + O\left(\frac{1}{te^{\pi t}}\right),\ t \to +\infty\,.$$

И последний пример (см., например, [9, §3.11–3.12]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{\sqrt{k^2+t^2}} = \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}e^{\pi t}}\right),\ t \to +\infty\,.$$

1. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions, vol.1, 2, New York, Toronto, London, MC Graw-Hill Book Company, INC, 1953.
2. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей Москва, Наука, 1967.
3. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды, Москва, Наука, 1987.
4. *Qi F., Chen CH.-P., Guo B.-N.* "Notes on double inequalities of Mathieu's series", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **16** (2005), P.2547–2554.
5. *Tomovski Ž* "New double inequalities for Mathieu type series", Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., **15** (2004), P.79–83.
6. *Pogány T.K., Srivastava H.M., Tomovski Ž* "Some families of Mathieu **a**-series and alternating Mathieu **a**-series", Applied Mathematics and Computation, **173** (2006), P.69–108.
7. *Wang C.L., Wang X.H.* "A refinement of the Mathieu inequality", Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., №**716-734** (1981), P.22-24.
8. *Elbert A.* "Asymptotic expansion and continued fraction for Mathieu's series", Period. Math. Hungar., **13** (1982), P.1–8.
9. *N.G. de Bruijn* Asymptotic methods in analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.

Донецкий национальный ун-т
zastavn@rambler.ru
zastavn@skif.net

Получено 04.09.08