УДК 517.5

©2008. **Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов**

# $ACL$ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КОЛЬЦЕВЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Доказано, что кольцевые $Q$–гомеоморфизмы, являющиеся естественным обобщением квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, абсолютно непрерывны на линиях, принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{loc}$ и дифференцируемы почти всюду при $Q \in L^1_{loc}$.

**1. Введение.** Приведём основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $m(x)$ – $n$-мерная мера Лебега и $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in adm\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых $\Gamma$ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) \quad dm(x).$$

Пусть $D$ – область в $\overline{\mathbb{R}^n}, n \geq 2$, $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [2], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия $Q$–отображения, впервые было введено В.Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, см., напр., [8], [9]. Пусть $r_0 = dist(x_0, \partial D)$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым $Q$–гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$,* если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \;\leq \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\; dm(x) \tag{1}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\; dr \;\geq\; 1.$$

Если (1) выполнено для каждой точки $x_0 \in D$, то $f$ называется кольцевым $Q-$гомеоморфизмом. Следует отметить, что в случае ограниченной функции $Q(x)$, определения кольцевого $Q$–гомеоморфизма и $Q$–гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. знаменитую работу Геринга [2]. В общем случае, каждый $Q$–гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот: в работе [8] приведены примеры кольцевых $Q$–гомеоморфизмов в фиксированной точке $x_0$, таких что $0 < Q(x) < 1$ на некотором множестве, для которого $x_0$ является точкой плотности. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и ёмкости конденсатора, см., напр., § 5 в [4] или раздел 10 главы 2 в [7]. *Конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где $A$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $C$ – компактное подмножество $A$. Конденсатор $E$ называют *кольцевым,* если $A \setminus C$ является кольцом. Пусть $E = (A, C)$ – конденсатор. *Ёмкостью* конденсатора $E$ называется следующая величина:

$$\operatorname{cap} E \;=\; \operatorname{cap}\,(A, C) \;=\; \inf_{u\,\in\, W_0(E)} \int\limits_{A} |\nabla u|^n \; dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0\,(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в $A$, таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left( \sum\limits_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}$.

Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ – открытый $n-$мерный интервал. Говорят, что отображение $f : I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $ACL$ (или *абсолютно непрерывно на линиях*), если $f$ абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в $I$, параллельных координатным осям. Если $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, то говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $ACL$, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу $ACL$ для каждого интервала $I$, $\overline{I} \subset D$.

Замечание 1. Понятие ёмкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. раздел 2.1 в [5].

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup\{\infty\}$ используется *сферическая (хордальная) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где $\pi$ – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Известно, что

$$(\mathrm{cap}\ E)^{n-1} \ \geq \ b_n \, \frac{d(C)^n}{m(A)}\,,$$

где $d(C)$ – диаметр компакта $C$, $m(A)$ – мера Лебега множества $A$, $b_n$ – положительная константа, зависящая только от размерности $n$, см. Лемму 5.9 в [4].

Результаты, сформулированные в статье, были получены ранее одним из авторов для более узкого класса $Q$–гомеоморфизмов в работе [11].

**2. Дифференцируемость почти всюду.**

**Теорема 1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ кольцевой $Q$–гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f$ дифференцируемо почти всюду в $D$.*

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств $B$ в $D$, $\Phi(B) = m\,(fB)$. По теореме о дифференцируемости неотрицательных субаддитивных функций множества, см., напр., III.2.4 в [6], существует конечный предел для п.в $x$

$$\varphi(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(B(x,\varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n} < \infty,$$

где $B(x,\varepsilon)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in D$ радиуса $\varepsilon > 0$, $\Omega_n$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. При $x$ и $y \in D$, полагаем

$$L(x,f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\ .$$

Таким образом, по теореме Радемахера-Степанова, см., напр., [10], с. 311, доказательство теоремы сводится к доказательству следующей леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – кольцевой $Q$-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$L(x,f) \ \leq \ \gamma_n \ \varphi^{\frac{1}{n}}(x)\ Q^{\frac{n-1}{n}}(x),$$

*где константа $\gamma_n$ зависит только от $n$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Рассмотрим сферическое кольцо $R_\varepsilon(x) = \{y : \ \varepsilon < |x-y| < 2\varepsilon\}$, $x \in D$, с произвольным $\varepsilon > 0$ таким, что $B(x,2\varepsilon) \subset D$. Тогда $E = \Big(B\,(x,2\varepsilon)\,, \overline{B\,(x,\varepsilon)}\Big)$ – конденсатор в $D$, а $fE = \Big(fB\,(x,2\varepsilon)\,, f\overline{B\,(x,\varepsilon)}\Big)$ – конденсатор в $D'$. Согласно [12],

$$\mathrm{cap}\ \Big(fB(x,2\varepsilon), \overline{fB(x,\varepsilon)}\Big) = M\left(\triangle(\partial fB(x,2\varepsilon), \partial fB(x,\varepsilon); fR_\varepsilon(x))\right) \tag{2}$$

и, ввиду гомеоморфности $f$,

$$\triangle\left(\partial fB\,(x,2\varepsilon)\,, \partial fB\,(x,\varepsilon)\,; fR_\varepsilon(x)\right) = f\left(\triangle\left(\partial B(x,2\varepsilon), \partial B(x,\varepsilon); R_\varepsilon(x)\right)\right). \tag{3}$$

По определению кольцевого $Q$–гомеоморфизма из (2) и (3) следует, что

$$\mathrm{cap}\ \Big(fB(x,2\varepsilon), f\overline{B\,(x,\varepsilon)}\Big) \leq \int\limits_{R_\varepsilon(x)} Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\ dm$$

для любой неотрицательной функции $\eta$ на $(0,\infty)$ такой, что $\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \eta(t)dt \geq 1$. Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_\varepsilon(t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & t \in (\varepsilon, 2\varepsilon), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, 2\varepsilon). \end{cases}$$

По определению кольцевого отображения,

$$\text{cap}\ (fB(x,2\varepsilon), \overline{fB(x,\varepsilon)}) \leq \frac{2^n\Omega_n}{m(B(x,2\varepsilon))} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm. \tag{4}$$

С другой стороны, по лемме 5.9 в [4], получаем

$$\text{cap}\ (fB(x,2\varepsilon), \overline{fB(x,\varepsilon)}) \geq \left( C_n \frac{d^n(fB(x,\varepsilon))}{m(fB(x,2\varepsilon))} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{5}$$

где $C_n$ – константа, зависящая только от размерности пространства $n$, $d(A)$ – диаметр, а $m(A)$ – мера Лебега множества $A$ в $\mathbb{R}^n$. Комбинируя (4) и (5), получаем, что

$$\frac{d(fB(x,\varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_n \left( \frac{m(fB(x,2\varepsilon))}{m(B(x,2\varepsilon))} \right)^{1/n} \left( \frac{1}{m(B(x,2\varepsilon))} \int\limits_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm \right)^{(n-1)/n}$$

и, следовательно, п.в.

$$L(x,f) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d(fB(x,\varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_n\, \varphi^{1/n}(x)\ Q^{(n-1)/n}(x)\ .$$

**Следствие 1.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – кольцевой $Q$–гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f$ имеет локально суммируемые частные производные.*

*Доказательство.* Для компактного множества $V \subset D$ имеем, что

$$\int\limits_V L(x,f)\ dx \leq \gamma_n \int\limits_V \varphi^{1/n}(x)\, Q^{(n-1)/n}(x)\ dm$$

и, применяя неравенство Гёльдера, см., напр., (17.3) в [1] при $p = n$ и $q = n/(n-1)$, получаем

$$\int\limits_V \varphi^{1/n}(x)\, Q^{(n-1)/n}(x)\ dm \leq \left( \int\limits_V \varphi(x)\ dm \right)^{1/n} \left( \int\limits_V Q(x)\ dm \right)^{(n-1)/n}.$$

Окончательно, ввиду того, что $Q \in L^1_{loc}$, по теореме Лебега приходим к заключению, что

$$\int\limits_V L(x,f)\ dm \leq \gamma_n\ m(fV)^{1/n} \left(\int\limits_V Q(x)\ dm\right)^{(n-1)/n} < \infty\,.$$

**Следствие 2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – кольцевой $Q$–гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$K_O(x,f)\ \leq\ C_n\ Q^{n-1}(x),$$

*где постоянная $C_n$ зависит только от $n$.*

Здесь через $K_O(x,f)$, как обычно, обозначается внешняя дилатация отображения $f$ в точках дифференцируемости $x$, т.е.

$$K_O(x,f) = \begin{cases} \frac{|f'(x)|^n}{|J(x,f)|}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \end{cases}$$

и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных случаях.

**3. Абсолютная непрерывность на линиях.**

**Теорема 2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ кольцевой $Q$–гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f \in ACL$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Пусть $I - n$-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям координат и $\overline{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где $I_0$ – $(n-1)$-мерный интервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, $J$ – одномерный интервал, $J = (a,b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ с $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для почти всех сегментов $J_z = \{z\} \times J, z \in I_0$, отображение $f|_{J_z}$ абсолютно непрерывно.

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств $B$ в $I_0$, $\Phi(B) = m\left(f(B \times J)\right)$. Согласно 2.2, 2.3 и 2.12 в [4],

$$\varphi(z) = \limsup_{r \to 0} \frac{\Phi(B(z,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty \tag{6}$$

для п.в. $z \in I_0$, где через $B(z,r)$ обозначается шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z \in I_0$ радиуса $r$, $\Omega_{n-1}$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть $\Delta_i$, $i = 1, 2, ...,$ – некоторая перенумерация совокупности $S$ всех интервалов в $J$ с $\overline{\Delta_i} \subset J$ и рациональными концами и пусть

$$\varphi_i(z) := \int\limits_{\Delta_i} Q(z, x_n)\, dx_n.$$

Тогда по теореме Фубини, см., напр., III. 8.1 в [10], функции $\varphi_i(z)$ п.в. конечны и интегрируемы по $z \in I_0$. Кроме того, п.в. существует конечный предел

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi_i(B(z,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = \varphi_i(z), \tag{7}$$

где

$$\Phi_i(B(z,r)) = \int\limits_{B(z,r)} \varphi_i(\zeta)\,d\zeta, \qquad z \in I_0.$$

Докажем, что отображение $f$ абсолютно непрерывно на каждом сегменте $J_z, z \in I_0$, где пределы (6) и (7) существуют и конечны. Обозначим соответствующее множество $z$ через $Z_0$ и покажем, что сумма диаметров образов любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z = \{z\} \times J$, $z \in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. Ввиду непрерывности $f$ вдоль $J_z$, достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в $J_z$. Итак, пусть $\Delta_i^* = \{z\} \times \overline{\Delta_i} \subset J_z$, $z \in Z_0$, $i = 1, 2, ..., k$, где $\Delta_i \in S$, $i = 1, ..., k$, взаимно не пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{\Delta_i}$, $i = 1, ..., k$, также попарно не пересекаются.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное рациональное число, которое меньше половины минимального расстояния между $\overline{\Delta_i}$, $i = 1, ..., k$, а также меньше их расстояния до концевых точек интервала $J$. Пусть $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\delta_i = (\alpha_i - \delta, \beta_i + \delta)$, $i = 1, ..., k$, и $A_i = A_i(r) = B(z, r) \times \delta_i$, где $B(z, r)$ – открытый шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z$ и радиуса $r > 0$. При малых $r > 0$, $E_i = (A_i, \Delta_i^*)$, $i = 1, ..., k$, – конденсаторы в $I$ и, следовательно, $fE_i = (fA_i, f\Delta_i^*)$, $i = 1, ..., k$, – также конденсаторы в $D'$. В соответствии с работой [12],

$$\text{cap}\,(fA_i, f\Delta_i^*) = M\,(\triangle(\partial fA_i, f\Delta_i^*; fA_i)) \tag{8}$$

и, как легко видеть, по гомеоморфности $f$

$$\triangle\,(\partial fA_i, f\Delta_i^*; fA_i) = f\,(\triangle(\partial A_i, \Delta_i^*; A_i))\,. \tag{9}$$

Рассмотрим кольцо $\varepsilon_1 < |x - z_0| < \varepsilon_2$, где $z_0 = \left(z, \frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\right)$, $\varepsilon_1 = \frac{\beta_i-\alpha_i}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\beta_i-\alpha_i}{2} + \delta$. Пусть $\Gamma_i$ – семейство кривых, соединяющих сферы $S_1 = \{|x - z_0| = \varepsilon_1\}$ и $S_2 = \{|x - z_0| = \varepsilon_2\}$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $\Gamma_i < \triangle(\partial A_i, \Delta_i^*; A_i)$ и

$$M\,(f(\triangle(\partial A_i, \Delta_i^*; A_i))) \le M(f(\Gamma_i)) \tag{10}$$

в силу минорирования. При $r < \delta$ рассмотрим семейство функций

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & t \in \left(\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}, \frac{\beta_i-\alpha_i}{2} + \delta\right), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\beta_i-\alpha_i}{2}, \frac{\beta_i-\alpha_i}{2} + \delta\right). \end{cases}$$

По определению кольцевого $Q$–гомеоморфизма из (8), (9), (10)

$$\text{cap}\,(fA_i, f\Delta_i^*) \le \frac{1}{r^n} \int\limits_{A_i} Q(x)\,dm. \tag{11}$$

С другой стороны, известно, см. лемма 5.9 в [4], что

$$\text{cap}\,(fA_i, f\Delta_i^*) \ge \left(n\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{12}$$

где $d_i$ – диаметр множества $f\Delta_i^*$, а $m_i$ – объем множества $fA_i$, а $C_n$ – константа, зависящая только от размерности пространства.

Комбинируя (11) и (12), имеем неравенство

$$\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{n}{r^n}\int\limits_{A_i} Q(x)dm \tag{13}$$

с новой константой $c_n$, зависящей только от $n$, при всех $i=1,...,k$.

Далее, по дискретному неравенству Гельдера, см., напр., (17.3) в [1], с $p=n/(n-1)$ и $q=n$, $x_k=d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k=m_k^{1/n}$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^{n} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\Phi(B(z,r)),$$

и ввиду (13)

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^{n} \leq \gamma_n\frac{\Phi(B(z,r))}{\Omega_{n-1}r^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\int\limits_{A_i} Q(x)\,dm}{\Omega_{n-1}r^{n-1}}\right)^{n-1},$$

где $\gamma_n$ зависит только от $n$. Переходя к верхнему пределу при $r\to 0$, а затем к пределу при $\delta\to 0$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^{n} \leq \gamma_n\,\varphi(z)\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(z)\right)^{n-1}. \tag{14}$$

Наконец, в силу (14) абсолютная непрерывность неопределенного интеграла $Q$ над сегментами $J_z$, $z\in Z_0$, влечет абсолютную непрерывность на том же сегменте отображения $f$.

Комбинируя теорему 2 и следствие 1, получаем заключение, см., напр., [3].

**Следствие 3.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ кольцевой $Q$–гомеоморфизм с $Q\in L^1_{loc}$. Тогда $f\in W^{1,1}_{loc}$.*

1. *Беккенбах Э., Белман Р.* Неравенства. – Москва: Наука, 1965.
2. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P.353-393.
3. *Maz'ya V.* Sobolev classes. – Berlin – New York: Springer, 1985.
4. *Martio O., Rickman S. and Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P.1-40.
5. *Martio O., Rickman S. and Vaisala J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465.** – P.1-13.

6. *T. Rado, P.V. Reichelderfer.* Continuous Transformations in Analysis. – Berlin etc.: Spinger, 1955.
7. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
8. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P.117-150.
9. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukrain. Math. Bull. – 2007. – **4**, no.1. – P.79-115.
10. *Saks S.* Theory of the integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1937.
11. *Салімов Р.Р.* До теорії локальної поведінки відображень зі скінченним спотворенням // Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук, 16с., Донецьк, 2007.
12. *Шлык В.А.* О равенстве между $p$ – ёмкостями и $p$ – модулями // Сиб. мат. ж. – 1993. – **34**, №6. – С.216-221.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
`salimov@iamm.ac.donetsk.ua, e_sevostyanov@rambler.ru`

Получено 07.04.08