УДК 517.5

©2008. **В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.Е. Величко, О.Г. Ровенская, В.И. Бодрая**

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ

Получены асимптотические равенства для отклонений прямоугольных сумм Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных.

Классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных введены в работе [1] (см. также [2–5]), там же получен ряд результатов по исследованию аппроксимативных свойств прямоугольных сумм Фурье на этих классах. В работах [3, 4] получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов почти везде ограниченных периодических функций. Следуя работе [4] (см. также [1–3]), классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных, шкала которых позволяет учитывать по-отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m – евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m} [-\pi; \pi]$ – m-мерный куб со стороной 2π,

$$N^m = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N, i = 1, 2, ..., m\big\},$$
$$N^m_* = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., m\big\},$$
$$N^m_i = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N, x_j \in N_*, i \neq j\big\},$$
$$E^m = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2, ..., m\big\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на кубе T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N^m_*$ поставим в соответствие величину

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i. \tag{1}$$

Величины $a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)$, $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N^m_*$, являются по определению коэффициентами Фурье функции $f(\vec{x})$ [1, с.546].

Каждому вектору $\vec{k} \in N^m_*$ поставим в соответствие основную гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \tag{2}$$

и гармонику, сопряженную по переменной x_i,

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\left(k_i x_i - \frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя [1, с.545], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{3}$$

в котором $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f \in L(T^m)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2,$ – фиксированные наборы систем чисел, $k \in N_*$.

Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \quad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия: $\overline{\psi}_i(k) \neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in N_*$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})] \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной x_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu(r) = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}} \partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}} ... \partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2$, символом $C_\infty^{m\overline{\psi}}$ обозначим множество непрерывных функций $f \in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\Psi}_\mu$- и $\overline{\psi}_i$-производные

$$\operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})| \leq 1, \quad \operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad \mu \subset \overline{m}; \quad \vec{x} \in T^m. \tag{5}$$

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2$, определяющих класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^*, $i = 1, 2, ..., m$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}; \quad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2};$$

$$\Psi_{i1}(k)=\Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2},\ \ \Psi_{i2}(k)=\Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},\ \ i=1,2,...,m,$$

то (см. [2]) класс $C_\infty^{m\overline{\psi}}$ является классом (ψ,β)-дифференцируемых функций и обозначается $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$. При $m=2$ эти классы являются классами двух переменных, которые были введены в работе [5] (см. также [1]). Если, кроме того, для чисел $r>0$, $s>0$, $r_1\geq r$, $s_1\geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k)=k^{-r}$, $\Psi_2(k)=k^{-s}$, $\psi_1(k)=k^{-r_1}$, $\psi_2(k)=k^{-s_1}$, $\beta_1=r,\beta_1^*=s$, $\beta_2=r_1$, $\beta_2^*=s_1$, то классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [6] (см. так же [7]), изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}=S_{n_1,n_2}(f;\vec{x})=\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, взятых по классам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$,

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s};S_{\vec{n}})=\sup_{f\in W_{r_1,s_1}^{r,s}}||f(\cdot)-S_{\vec{n}}(f;\cdot)||_C$$

получено асимптотическое равенство при $n_i\to\infty$, $i=1,2$,

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s};S_{\vec{n}})=\frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}}+\frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}}+O(1)\left(\frac{\ln n_1\ln n_2}{n_1^r n_2^s}+\frac{1}{n_1^{r_1}}+\frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

В данной работе изучены вопросы приближения прямоугольными суммами Фурье классов $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ в случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями

$$\psi_i(x)=e^{-\alpha_i x},\ \ \Psi_i(x)=e^{-\alpha_i^* x},\ \ \alpha_i>0,\ \ \alpha_i^*>0,\ \ i=1,2,...,m.$$

По аналогии с классами функций одной переменной будем обозначать такие классы $C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$.

На соответствующих классах функций одной переменной $C_{\beta,\infty}^{\alpha}$ были получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений сумм Фурье [8] и сумм Валле-Пуссена [7], [12]. В частности, Никольским С.М. в работе [8] было получено равенство

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\alpha};S_n\right)=\frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}+O(1)\frac{q^n}{n},\quad q=e^{-\alpha},$$

где $S_n(f;x)$ – частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ порядка n.

В данной работе получен многомерный аналог этого равенства для классов $C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$.

Пусть $\Lambda=\{\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i=\{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i=1,2,...,m$, $\lambda_0^{(n_i)}=1$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=0$ для $k_i\geq n_i$.

Пусть, далее, $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}=\prod\limits_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}}=\prod\limits_{i=1}^{m}[0;n_i-1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n}\in N^m$.

Каждой функции, имеющей ряд Фурье (3), поставим в соответствие многочлен

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=\sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}}2^{-q(\vec{k})}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=f(\vec{x})-U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ являются уклонениями таких многочленов от функции $f(\vec{x})$.

Введем системы чисел

$$\tau_{k_i,j}^{(n_i)}=\begin{cases}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\psi_{ij}(k_i), & 1\le k_i\le n_i,\\ \psi_{ij}(k_i), & n_i\le k_i, i=1,2,...,m; j=1,2,\end{cases}\tag{6}$$

$$T_{k_i,j}^{(n_i)}=\begin{cases}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\Psi_{ij}(k_i), & 1\le k_i\le n_i,\\ \Psi_{ij}(k_i), & n_i\le k_i, i=1,2,...,m; j=1,2.\end{cases}\tag{7}$$

Используя рассуждения работы [3], можно показать, что имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Теорема 1. *Пусть системы чисел $\tau_{k_i,j}^{(n_i)}$, $T_{k_i,j}^{(n_i)}$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2$, удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k_i=0}^{\infty}\tau_{k_i,j}^{(n_i)}\cos\left(k_it-\frac{(j-1)\pi}{2}\right)<\infty,\quad \sum_{k_i=0}^{\infty}T_{k_i,j}^{(n_i)}\cos\left(k_it-\frac{(j-1)\pi}{2}\right)<\infty.\tag{8}$$

Тогда для всякой функции $f\in C_{\infty}^{m\overline{\psi}}$ в каждой точке $\vec{x}\in T^m$ выполняется равенство

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=f(\vec{x})-U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}-t_i\vec{e}_i)\sum_{k_i=0}^{\infty}\left(\tau_{k_i,1}^{(n_i)}\cos k_it_i+\tau_{k_i,2}^{(n_i)}\sin k_it_i\right)dt_i+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{k_j=0}^{\infty}\left(T_{k_j,1}^{(n_j)}\cos k_jt_j+T_{k_j,2}^{(n_j)}\sin k_jt_j\right)dt_j.\tag{9}$$

Заметим, что для прямоугольных сумм Фурье и классов $C_{\beta,\infty}^{m\alpha}$

$$\tau_{k_i}^{(n_i)}=\begin{cases}0, & 1\le k_i\le n_i,\\ \exp(-\alpha_ik_i), & n_i\le k_i, i=1,2,...,m; j=1,2,\end{cases}$$

$$T_{k_i}^{(n_i)}=\begin{cases}0, & 1\le k_i\le n_i,\\ \exp(-\alpha_i^*k_i), & n_i\le k_i, i=1,2,...,m; j=1,2,\end{cases}$$

$$\tau_{k_i,1}^{(n_i)}=\tau_{k_i}^{(n_i)}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}, \tau_{k_i,2}^{(n_i)}=\tau_{k_i}^{(n_i)}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}, T_{k_i,1}^{(n_i)}=T_{k_i}^{(n_i)}\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2}, T_{k_i,2}^{(n_i)}=T_{k_i}^{(n_i)}\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_i>0$, $\alpha_i^*>0$, $\beta_i\in R$, $\beta_i^*\in R$, $i=1,2,...,m$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}})\overset{\mathrm{df}}{=}\sup_{f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}}||f(\cdot)-S_{\vec{n}}(f;\cdot)||_C=$$

$$=\frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}e^{-\alpha_in_i}\mathbf{K}(e^{-\alpha_i})+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{e^{-\alpha_in_i}}{n_i}+\sum_{\mu(2)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(2)}e^{-\alpha_j^*n_j}\right), \qquad (10)$$

где

$$\mathbf{K}(q)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2u}}$$

– эллиптический интеграл I-го рода, $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n_i, $i=1,2,...,m$.

Доказательство. В силу теоремы 1 для $f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ имеем

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=f(\vec{x})-S_{\vec{n}}(f;\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}+t_i\vec{e}_i\right)\sum_{k_i=n_i}^{\infty}\exp(-\alpha_ik_i)\cos\left(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt_i+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}+\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{k_j=n_j}^{\infty}\exp(-\alpha_j^*k_j)\cos\left(k_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2}\right)dt_j.$$

Введем обозначения

$$q_i=e^{-\alpha_i},\ \ Q_i=e^{-\alpha_i^*}.$$

В работе [10, с.123] показано, что

$$\sum_{k_i=n_i}^{\infty}\exp(-\alpha_ik_i)\cos\left(k_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)=$$

$$=q_i^{n_i}\left(\frac{1-q_i\cos t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\cos\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)-\frac{q_i\sin t}{1-2q_i\cos t+q_i^2}\sin\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right).$$

Поэтому

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x}+t_i\vec{e}_i\right)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}+\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j}}{\pi}B_{n_j}^{\beta_j^*}(t_j)dt_j, \qquad (11)$$

где

$$b_{n_i}^{\beta_i}(t)=\left[\cos\left(n_it+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)-q_i\cos\left((n_i-1)t+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right](1-2q_i\cos t+q_i^2)^{-1},$$

$$B_{n_i}^{\beta_i^*}(t)=\left[\cos\left(n_it+\frac{\beta_i^*\pi}{2}\right)-Q_i\cos\left((n_i-1)t+\frac{\beta_i^*\pi}{2}\right)\right](1-2Q_i\cos t+Q_i^2)^{-1}. \qquad (12)$$

Так как для $f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ выполняются условия

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^m}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\vec{x}\in T^m}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})|\le 1,$$

то

$$\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}})=\sup_{f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}}||\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t)|dt+O(1)\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}Q_j^{n_j}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_j}^{\beta_j^*}(t)|dt. \qquad (13)$$

Найдем функцию $f_0\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$, для которой справедливо соотношение

$$\rho_{\vec{n}}(f_0;\vec{0})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t)|dt+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{n_i}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}Q_j^{n_j}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_j}^{\beta_j^*}(t)|dt\right). \qquad (14)$$

Имея в виду соотношение (11), для всякой $f\in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ можно записать

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{0})=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{0}+t_i\vec{e}_i\right)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$

$$+O(1)\left(\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}Q_j^{n_j}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B_{n_j}^{\beta_j^*}(t)|dt\right).$$

В работе [10 с.124] показано, что функцию $y_i^*(t)=\operatorname{sign}b_{n_i}^{\beta_i}(t)$ можно переопределить на множестве, мера которого меньше Kn_i^{-1}, где K – некоторая константа, так, чтобы полученная функция $y_i(t)$ удовлетворяла условиям

$$|y_i(t)|\le 1, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}y_i(t)dt=0.$$

Далее, построим функции $\varphi_i(\vec{t}) = y_i(t_i)$, $\vec{t} \in T^m$, и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $f_i^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$. Повторяя рассуждения работы [3, с.265], можно показать, что функция $f_0(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(\vec{x})$ на T^m удовлетворяет условие

$$(f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x}).$$

Поэтому $f_0 \in C^{m\alpha}_{\beta,\infty}$ и выполняется условие

$$f_0^{\overline{\psi}_i}(\vec{0} + t_i\vec{e}_i) = \mathrm{sign} b^{\beta_i}_{n_i}(t_i)$$

для $t_i \in [-\pi;\pi]$ за исключением некоторого множества, мера которого меньше Kn_i^{-1}.

Следовательно, на основании (11) получаем, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (14).

Сопоставляя (13) и (14), получаем асимптотическую формулу

$$\mathcal{E}(C^{m\alpha}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^{n_i}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_i}_{n_i}(t)| dt + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^{n_i}}{n_i} + \sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \prod_{j \in \mu(r)} Q_j^{n_j} \int_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta_j^*}_{n_j}(t)| dt \right). \quad (15)$$

В работе [10, с.125] показано, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b^{\beta_i}_{n_i}(t)| dt = \frac{8}{\pi}\mathbf{K}(q_i) + O(1)n_i^{-1}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |B^{\beta_i}_{n_i}(t)| dt = \frac{8}{\pi}\mathbf{K}(Q_i) + O(1)n_i^{-1} = O(1), \quad (16)$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

– эллиптический интеграл I-го рода.

Сопоставляя соотношения (15) и (16), получаем асимптотическую формулу (10). Теорема доказана. □

1. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43,** №4. – С.545-555.
2. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55,** №7. – С.911-918.
3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.1, №1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С.250-269.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – **57,** №4. – С.564-570.

5. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.16-28.
6. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – К.: Наук. думка, 1981. – 340с.
7. *Степанец А.И.* Приближение некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. **– 25,** №5. – С.599-609.
8. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. сер. мат. – 1946. **– 10,** №3. – С.207-256.
9. *Степанец А.И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. **– 49,** №8. – С.1069-1113.
10. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987. – 268с.
11. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Праці Інституту математики НАН України. Т.20 / Відп. ред. О.І. Степанець. – К.: Ін-т математики НАН України, 1988. – С.228-229.
12. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. **– 56,** №4. – С.97-107.

Славянский государственный педагогический ун-т
sgpi@slav.dn.ua

Получено 01.11.07