УДК 517.5

©2008. **О.А. Очаковская**

СВОЙСТВО ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Изучаются характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции, имеющей нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Рассмотрен случай, когда поведение функции на бесконечности существенно различно по разным переменным.

1. Введение. Очевидным следствием классической теоремы Лиувилля об ограниченных целых функциях является отсутствие ненулевых целых функций, стремящихся к нулю на бесконечности. В последние годы активно изучались аналоги этого свойства для других классов функций (см. [1]). В данной работе рассматриваются классы функций с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с размерностью $n \geq 2$ и евклидовой нормой $|\cdot|$.

Предположим, что $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого фиксированного $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int\limits_{|x|\leqslant r} f(x+y)\,dx = 0\,. \tag{1}$$

Верно ли, что f – нулевая функция? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [1, гл. 2], [2], где получено описание некоторых классов таких функций), но при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ справедливо. Одним из таких предположений является условие достаточно быстрого убывания f на бесконечности.

Подобное явление было впервые отмечено Ф. Йоном для функций с нулевыми сферическими средними в $\mathbb{R}^3$ [3, гл. 6]. Многие авторы исследовали вопрос о точных условиях убывания на бесконечности, из которых следует, что функция f, удовлетворяющая уравнению типа (1), равна нулю. Для шаровых средних в $\mathbb{R}^n$ первый точный результат принадлежит Д. Смиту [4], который установил, что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)\,|x|^{\frac{n-1}{2}} = 0 \tag{2}$$

удовлетворяет (1), то $f = 0$. При этом условие (2) нельзя заменить условием $f(x) = O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}}\right)$ при $|x| \to \infty$. Аналогичное утверждение имеет место и для сферических средних в $\mathbb{R}^n$ [4]. Известно также, что если при некотором $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$ функция с условием (1) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = 0$, а при $p > \frac{2n}{n-1}$ это утверждение уже не имеет места (см. [5], а также [6], где утверждение сформулировано для сферических средних). Существенно более общие и точные результаты в этом направлении получены В.В. Волчковым в [7], [1]. Из [7] следует, в частности, что если при некотором $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$ функция $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1) при всех $|\,y| > r$ и

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{\mu_p(R)} \int\limits_{|x|\leqslant R} |\, f(x)|^p \, dx = 0\,, \tag{3}$$

то $f = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > r-1\}$ (здесь $\mu_p(R) = R^{n-\frac{n-1}{2}p}$ при $1 \leqslant p < \frac{2n}{n-1}$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = \frac{2n}{n-1}$). При этом условие (3) нельзя заменить условием $\int\limits_{|x|\leqslant R} |\, f(x)|^p \, dx = O(\mu_p(R))$ при $R \to \infty$. Ряд далеко идущих обобщений этого результата получен в [7, § 8], а также в [1], где условие (1) заменяется уравнением свертки более общего вида.

Некоторые аналоги рассмотренной проблемы на симметрических пространствах исследовались в [8], [9]. В работах [10], [11] изучались подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданных на полупространстве.

Характерной особенностью всех перечисленных условий для поведения f на бесконечности, при которых из (1) следует, что $f = 0$, является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это позволяло использовать в их доказательствах аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [1]). В работе [12] впервые рассматривалась подобная задача для случая, когда указанная выше инвариантность существенно нарушается и требуются другие методы. В частности, по одной из переменных допускался даже экспоненциальный рост функции, который в некотором смысле компенсируется быстрым убыванием по другим переменным.

Одним из результатов работы [12] являются

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть также существуют возрастающая положительная функция $\varkappa \in C^1[0,+\infty)$ и постоянные c_1, $c_2 > 0$ такие, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)} = +\infty\,, \tag{4}$$

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{5}$$

$$\varkappa(t) = O\left(\varkappa\left(\frac{t}{\varkappa(t)}\right)\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{6}$$

$$t\varkappa'(t) = o\left(\varkappa(t)\right), \quad t \to +\infty\,, \tag{7}$$

$$|f(x)| \leqslant c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + c_2|x_n|\right) \tag{8}$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f = 0$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ и любой возрастающей функции $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такой, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)} < +\infty\,, \tag{9}$$

существует ненулевая функция f класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$, для которой

$$|f(x)| \leqslant \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right) \tag{10}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Условия (4)–(7) выполнены для многих медленно растущих функций $\varkappa$. Например, нетрудно видеть, что они выполнены для всякой положительной функции $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$, совпадающей при достаточно больших t с функцией

$$\varkappa_m(t) = (\ln t)(\ln\ln t)\ldots(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ совпадает при больших t с функцией

$$\varkappa_m(t)(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln t}_{m+1})^{1+\delta}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, то выполнено условие (9).

Из второго условия теоремы 1 следует, что условия (4) и (8) в их первом утверждении являются неулучшаемыми. В то же время вопрос о необходимости условий (5)–(7) остается открытым.

В данной работе показано, что первое утверждение теоремы 1 остается верным, если условия (5)–(7) заменить единственным условием

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varkappa(t)}{\varkappa(t/\varkappa(t))} = 1, \tag{11}$$

и при этом вместо гладкости $\varkappa$ на $[0, +\infty)$ требуется только ее непрерывность. Таким образом, мы несколько усиливаем условие (6), но при этом убираются условия (5) и (7).

2. Формулировка и доказательство основного результата. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f принадлежит $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть также существует положительная возрастающая функция $\varkappa$ на $[0, +\infty)$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что выполнено условие (11) и условие (8) при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f = 0$.*

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $u : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t \to +\infty} u(\alpha t)/u(t) = 1$$

при всех $\alpha > 0$*. Тогда*

$$u(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \psi(t)\right), \qquad t \geq 0, \tag{12}$$

где $\varphi \in C(0, +\infty)$ *и* ψ *– ограниченная измеримая функция на* $[0, +\infty)$*. При этом* $\varphi(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$*,* $\varphi(t) = 0$ *в некоторой окрестности точки* $t = 0$ *и существует конечный предел* $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t)$*.*

Доказательство. Поскольку u возрастает, она является измеримой на $[0, +\infty)$. Используя [13, т.12], получаем, что существует число $B > 0$ такое, что при всех $t \geq B$

$$u(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\varepsilon(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \eta(t)\right),$$

где $\varepsilon \in C[B, +\infty)$, $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и η – ограниченная измеримая функция на $[B, +\infty)$, для которой существует конечный предел $\lim\limits_{t \to \infty} \eta(t)$. Продолжим ε на $[0, +\infty)$ по непрерывности, полагая $\varepsilon(t) = 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Полученное продолжение обозначим через φ. Положим теперь

$$\psi(t) = \begin{cases} \eta(t) \quad \text{при} \quad t \in [B, +\infty) \\ \ln(u(t)) - \int\limits_0^t \dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{при} \quad t \in [0, B). \end{cases}$$

Тогда выполнено (12) и лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из (11) следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \varkappa(\alpha t)/\varkappa(t) = 1 \tag{13}$$

при любом $\alpha > 0$. Следовательно, существует $\beta > 0$ такое, что всех $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^1$

$$\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} > \beta \, \frac{\varrho}{\varkappa(\varrho)},$$

где $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$. Оценка (8) показывает, что при $\gamma = c_2$, всех $q \in \mathbb{N}$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$ неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, ..., x_n)(1 + |x_1| + ... + |x_{n-1}|)^q dx_1 ... dx_{n-1} \leq M_q e^{\gamma |x_n|}$$

выполнено с постоянной

$$M_q = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta\, t}{\varkappa(t)}\right)\ \frac{(1+nt)^{q+n}}{(1+t)^2}\ dt.$$

Докажем, что имеет место условие

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\inf_{q\geq m} M_q^{1/q}\right)^{-1} = +\infty. \tag{14}$$

При любом $q \in \mathbb{N}$ имеем

$$M_q \leqslant n^{q+n}\, N_{q+n} + c_3^q\,, \tag{15}$$

где

$$N_q = \int\limits_1^\infty \frac{t^q \exp\left(-\frac{\beta\, t}{\varkappa(t)}\right)}{(1+t)^2}\ dt$$

и постоянная $c_3 > 0$ не зависит от q.

Оценим N_q сверху при достаточно больших q. Положим

$$M_q(t) = q\ln t - \beta\frac{t}{\varkappa(t)}, \quad t \geq 1. \tag{16}$$

Используя (13) и лемму 1, имеем равенство

$$\varkappa(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \psi(t)\right), \quad t \geq 0,$$

где φ и ψ удовлетворяет условиям, указанным в лемме 1. Получим

$$g(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \psi(t)\right), \quad h(t) = \exp\psi(t).$$

Тогда $g \in C^1[0, +\infty)$, $g > 0$ и

$$t\, g'(t) = o(g(t)) \ \text{ при } \ t \to +\infty. \tag{17}$$

Кроме того, существуют постоянные C_3, C_4 такие, что

$$C_3 < h(t) < C_4 \quad \text{для всех} \quad t \geq 0. \tag{18}$$

Отсюда и из (16) вытекает оценка

$$H_q(t) \geq \Theta_q(t), \quad t \geq 1,$$

где
$$\Theta_q(t) = q\ln t - \beta_1\frac{t}{g(t)}, \quad \beta_1 = \beta/C_3. \tag{19}$$

Учитывая (18), из (13) и [13, п.1.5] получаем

$$g(t) = o(t^\lambda) \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad \text{и при любом} \quad \lambda > 0.$$

Тогда $\Theta_q(1) < 0$ и $\Theta_q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. (5)). Если $\Theta_q(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 1$, из (19) и определения N_q имеем
$$N_q \leqslant 1\,. \tag{20}$$

В противном случае существует точка $t_q \in (1, +\infty)$, в которой функция Θ_q достигает максимума (если таких точек несколько, выбираем одну из них произвольно). Тогда $\Theta_q'(t_q) = 0$, откуда
$$q = \frac{\beta_1 t_q}{g(t_q)}\left(1 - t_q\frac{g'(t_q)}{g(t_q)}\right).$$

В частности, $t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$ и из (17) вытекает, что

$$\beta_1 t_q \sim q\varkappa(t_q)\,, \quad q \to +\infty\,. \tag{21}$$

Кроме того, согласно (19)

$$\frac{\Theta_q(t)}{q} \leqslant \ln t_q - \beta_1\frac{t_q}{qg(t_q)}\,, \quad t \geqslant 1\,. \tag{22}$$

Учитывая (22), (21), (13) и неравенство (20), которое может выполняться при некоторых q, получаем, что существует $c_3 > 0$ такое, что

$$N_q^{1/q} < c_3\, q\, g(q)$$

при всех $q \in \mathbb{N}$. Теперь из условия (4) и оценки (15) следует (см. [1, гл. 1, следствие 2.1]), что числа M_q удовлетворяют (14). Таким образом, по теореме 1 получаем $f = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 видно, что ее утверждение останется верным, если условие (11) заменить условиями (13) и (6).

1. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers, 2003.
2. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. – 1995. – Т.186. – №6. – С.15-34.
3. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958.
4. *Smith I.D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V.72. – P.403-416.
5. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. – 1984. – V.28. – P.339-347.
6. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 1994. – V.63. – P.255-286.

7. *Волчков В.В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. – 1997. – Т.188. – №9. – С.13-30.
8. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric space // Contemp. Math. – 1987. – V.63. – P.267-277.
9. *Волчков В.В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Матем. сб. – 2001. – Т.192. – №9. – С.17-38.
10. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // Докл. РАН. 2001. – Т.381. – №6. – С.745-747.
11. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т.9. – №3. – С.493-501.
12. *Очаковская О. А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Матем. сб. – Т.199. – №1. – С.48-67.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakov@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 07.04.08