УДК 517.5

©2008. **Ю.С. Коломойцев**

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПРОПУСКОМ В L_p, $0 < p < 1$

Получены двусторонние оценки наилучшего приближения функций тригонометрическими полиномами со спектром в $\mathbb{Z} \setminus (-m, m)$ в метрике пространства L_p, $0 < p < 1$.

Введение. Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ – единичная окружность. Обозначим через L_p множество всех 2π-периодических функций f таких, что

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть A – собственное подмножество множества $\mathbb{Z}$. Тогда тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in A}$ не полна в пространстве интегрируемых функций. Более того, в работах С.Н. Бернштейна [1] и Л.В. Тайкова [2] было показано, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{g_\perp} \| \cos nt - g_\perp(t) \|_\infty = \frac{\pi}{4},$$

$$\inf_{g_\perp} \| \cos nt - g_\perp(t) \|_p = \pi \| \cos t \|_q^{-1}, \quad 1 \le p < \infty,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а нижняя грань берется по всем функциям $g_\perp \in L_p$, ортогональным $\cos nt$.

Совсем иначе дело обстоит в пространстве L_p, когда $0 < p < 1$. А.А. Талаляном в работе [3], по-видимому, впервые было показано, что для любого конечного множества $B \subset \mathbb{Z}$ система $\{e^{ikx}\}_{\mathbb{Z} \setminus B}$ будет полна в пространстве L_p, $0 < p < 1$, более того, существуют бесконечные множества целых чисел, обладающие этим свойством. Различные достаточные и необходимые условия полноты тригонометрической системы с пропусками были получены в работах [4]–[8].

Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Утверждения следующей теоремы были получены В.И. Ивановым и В.А. Юдиным в работе [5].

Теорема А. *Пусть $0 < p < 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \le n$. Справедливы следующие соотношения:*

(i)

$$\inf_{\{c_\nu\}} \left\| \cos mt - \sum_{|\nu| \le n, \nu \ne m} c_\nu e^{i\nu t} \right\|_p \asymp (n - m + 1)^{1 - \frac{1}{p}},$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p;

(ii) *для любого тригонометрического полинома* $\phi_m \in \mathcal{T}_m$

$$\inf_{\{c_\nu\}} \left\| \phi_m(t) - \sum_{m<|\nu|\le n} c_\nu e^{i\nu t} \right\|_p \asymp n^{1-\frac{1}{p}},$$

где $\asymp$ *— двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от* n.

Цель настоящей работы – получить оценки скорости приближения функции полиномами, которые построены по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus(-m,m)}$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx$, $k \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье интегрируемой функции f; $\mathrm{spec} f := \{k \in \mathbb{Z} : \widehat{f}(k) \ne 0\}$ – спектр функции f; $\widetilde{f}_{k,n}(t) := \frac{1}{4n+1}\sum_{j=0}^{4n} f\left(x_{j,n}+t\right) e^{-ik(x_{j,n}+t)}$, где $x_{j,n} := \frac{2\pi j}{4n+1}$. Буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров. Константы C могут быть различными даже в одной строке.

Пусть $1 \le m < n$. Введем класс тригонометрических полиномов

$$\mathcal{T}_{m,n} := \{\, T \in \mathcal{T}_n \ :\ \mathrm{spec} T \subset [-n, n] \setminus (-m, m)\, \}.$$

Величину наилучшего приближения функции $f \in L_p$ полиномами со спектром во множестве $\mathbb{Z} \setminus (-m, m)$ определим следующим образом:

$$E_n^{(m)}(f)_p := \inf_{T\in\mathcal{T}_{m,n}} \|f - T\|_p.$$

Положим также

$$E_n(f)_p := \inf_{T\in\mathcal{T}_n} \|f - T\|_p.$$

Мы будем оценивать величину $E_n^{(m)}(f)_p$ для функций f из класса

$$H_{1,p}^{\alpha} := \{\, f \in L \ :\ \sup_{n\ge 1} n^{\alpha} E_{n-2}(f)_p \le 1\},$$

где $E_{-1}(f)_p := \|f\|_p$.

1. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $2m < n$. *Тогда*

(i) *если* $\alpha > \frac{1}{p}$, *то*

$$\sup_{f\in H_{1,p}^{\alpha}} E_n^{(m)}(f)_p \asymp \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1};$$

(ii) *если* $\frac{1}{p} - 1 \le \alpha \le \frac{1}{p}$, *то*

$$C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \le \sup_{f\in H_{1,p}^{\alpha}} E_n^{(m)}(f)_p \le C_2 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \begin{cases} \ln(m+1), & \text{при } \alpha = \frac{1}{p}; \\ m^{\frac{1}{p}-\alpha}, & \text{при } \alpha \in [\frac{1}{p}-1, \frac{1}{p}); \end{cases}$$

(iii) *если* $0 < \alpha < \frac{1}{p} - 1$ *и* $m < 2n^{1-p-\alpha p}$, *то*

$$\sup_{f \in H_{1,p}^{\alpha}} E_n^{(m)}(f)_p \asymp \frac{1}{n^{\alpha}},$$

где $\asymp$ *– двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от* p *и* α, *а* C_1 *и* C_2 *– положительные константы, зависящие от* p *и* α.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $f \in L_p$, $0 < p < 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $2m < n$. *Тогда*

$$E_{2n}^{(m)}(f)_p \le C\left\{E_n(f)_p + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \left\| \sum_{|k|<m} |\widetilde{f}_{k,n}| \right\|_p \right\},$$

где C *– константа, зависящая только от* p.

Доказательство. Определим ядро типа Валле-Пуссена

$$V_n(x) := \sum_{k=-2n}^{2n} g\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx},$$

где функция $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $g(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $g(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Известно (см., например, [5]), что

$$C_1 n^{1-\frac{1}{p}} \le \|V_n\|_p \le C_2 n^{1-\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 – положительные константы, не зависящие от n.

Для $k \in (-m, m) \cap \mathbb{Z}$ положим

$$K_{k,n}(x) := e^{ikx} V_{\left[\frac{n-k}{m}\right]}(mx),$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Очевидно, что

$$\mathrm{spec} K_{k,n} \subset ((-2n, 2n) \setminus (-m, m)) \cup \{k\}. \tag{2}$$

Далее нам понадобится семейство линейных полиномиальных операторов

$$W_n(f; x, t) := \frac{1}{4n+1} \sum_{j=0}^{4n} f(x_{j,n} + t) V_n(x - x_{j,n} - t),$$

введенных К.В. Руновским (см., например, [9]). Известно (см. [9], [10, Гл. 4]), что для любой функции $f \in L_p$, $0 < p < 1$,

$$\int_{\mathbb{T}} \|f - W_n(f; \cdot, t)\|_p^p dt \le C E_n(f)_p^p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где C – константа, зависящая только от p.

Положим

$$T_{n,m}(f;x,t) := W_n(f;x,t) - \sum_{k=-m+1}^{m-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \widetilde{f}_{k,n}(t) K_{k,n}(x).$$

Поскольку $\widehat{K}_{k,n}(k) = 1$ при $k \in (-m,m) \cap \mathbb{Z}$, из (2) получим, что $\mathrm{spec} T_{n,m} \subset (-2n,2n) \setminus (-m,m)$.

Далее, используя неравенства (3) и (1), находим

$$\begin{aligned}
&2\pi E_{2n}^{(m)}(f)_p^p \le \int_{\mathbb{T}} \|f - T_{n,m}(f;\cdot,t)\|_p^p dt \le \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \|f - W_n(f;\cdot,t)\|_p^p dt + \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{|k|<m} g\left(\frac{k}{n}\right) \widetilde{f}_{k,n}(t) K_{k,n}(\cdot) \right\|_p^p dt \le \\
&\le C \left\{ E_n(f)_p^p + \|V_{\left[\frac{n-m}{m}\right]}\|_p^p \left\| \sum_{|k|<m} |\widetilde{f}_{k,n}| \right\|_p^p \right\} \le \\
&\le C \left\{ E_n(f)_p^p + \left(\frac{m}{n}\right)^{1-p} \left\| \sum_{|k|<m} |\widetilde{f}_{k,n}| \right\|_p^p \right\}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть $f \in L$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $2m < n$. Тогда*

$$E_{2n}^{(m)}(f)_p \le C \left\{ E_n(f)_p + m^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}} E_n(f)_1 + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{|k|<m} |\widehat{f}(k)| \right\},$$

где C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Следствие 1 вытекает из леммы 1 и утверждения (i), приведенной ниже леммы 2. □

Лемма 2. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $f \in L$, то*

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \le |\widehat{f}(k)| + C E_n(f)_1, \qquad k = -n, \dots, n, \tag{4}$$

где C – абсолютная положительная константа;

(ii) *если $0 < p < 1$, $\alpha \ge \frac{1}{p} - 1$ и $f \in H_{1,p}^{\alpha}$, то*

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \le \frac{C}{(|k|+1)^{\alpha+1-\frac{1}{p}}}, \qquad k = -n, \dots, n,$$

где C – константа, зависящая только от α и p.

Доказательство. Пусть

$$T_{2n-1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)V_n(t)dt,$$

где V_n – ядро типа Валле-Пуссена, определенное в доказательстве леммы 1. Известно, что $\|f-T_{2n-1}\|_1\le CE_n(f)_1$, где константа C не зависит от f и n.

Из равенства

$$\widetilde{f}_{k,n}(t)=\frac{1}{4n+1}\sum_{j=0}^{4n}\left\{f(x_{j,n}+t)-T_{2n-1}(x_{j,n}+t)\right\}e^{-ik(x_{j,n}+t)}+\widehat{f}(k)$$

находим

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1\le\|f-T_{2n-1}\|_1+|\widehat{f}(k)|\le CE_n(f)_1+|\widehat{f}(k)|.$$

Докажем утверждение (ii). Для каждой интегрируемой функции f справедливо следующее соотношение между величинами наилучшего приближения данной функции:

$$E_n(f)_1\le C\left\{(n+1)^{\frac{1}{p}-1}E_n(f)_p+\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{1}{p}-2}E_k(f)_p\right\},\quad n\in\mathbb{N},\tag{5}$$

где C – константа, зависящая только от p (см. [11]).

Поскольку функция $f\in H^{\alpha}_{1,p}$, из неравенства (5) получим, что $E_n(f)_1\le Cn^{\frac{1}{p}-1-\alpha}$. Заметим еще, что $|\widehat{f}(\pm k)|\le E_{k-1}(f)_1$, $k\in\mathbb{N}$. Применив полученные оценки к неравенству (4), получим утверждение (ii). $\square$

Лемма 3. *Пусть $0<p<1$, $m,n\in\mathbb{N}$ и $m<n$. Тогда*

$$\inf_{T\in\mathcal{T}_{m,n}}\|1+T\|_p\asymp\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p.

Доказательство. Оценка сверху следует из леммы 1.

Оценка снизу. Докажем, что

$$\inf_{T\in\mathcal{T}_{m,mn}}\|1+T\|_p\ge Cn^{1-\frac{1}{p}},\tag{6}$$

где C – константа, не зависящая от m и n.

Прежде всего заметим, что неравенство (6) достаточно доказать для полинома вида

$$T_{N,x}(t)=1+\sum_{k=m}^{N}x_{k-m+1}\cos kt,$$

где $N=mn$, $x=(x_1,\dots,x_{N-m+1})\in\mathbb{R}^{N-m+1}$. Действительно, из неравенства $|\xi-z|\ge|\xi-Rez|$, $\xi\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$ следует, что нижняя грань в (6) достигается для вещественного полинома. Кроме того, для любой периодической функции f справедливо неравенство $\|f\|_p \geq \frac{1}{2}\|f(\cdot)+f(-\cdot)\|_p$, из которого видно, что приближающий полином в неравенстве (6) можно взять четным.

Далее, из неравенства Марцинкевича-Зигмунда следует, что

$$\|T_{N,x}\|_p^p \geq \frac{C}{N}\sum_{j=0}^{N}\left|T_{N,x}\left(\frac{2\pi j}{2N+1}\right)\right|^p,$$

где C – константа, зависящая только от p (см. [13]).

Введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = F(x_1,\dots,x_{N-m+1}) := \sum_{j=0}^{N}\left|T_{N,x}\left(\frac{2\pi j}{2N+1}\right)\right|^p. \tag{7}$$

Пусть $x^* = (x_1^*,\dots,x_{N-m+1}^*) \in \mathbb{R}^{N-m+1}$ – точка, в которой функция F принимает свое наименьшее значение. Заметим, что $F(x^*) > 0$. Действительно,

$$\sum_{j=0}^{N}\left|T_{N,x^*}\left(\frac{2\pi j}{2N+1}\right)\right|^p \geq N^{\frac{p}{2}}\|T_{N,x^*}\|_2^p > 0.$$

Последнее соотношение следует из неравенства Марцинкевича-Зигмунда в пространстве L_2.

Покажем, что существует последовательность целых чисел $\gamma_j \in [0,N]$ такая, что

$$T_{N,x^*}\left(\frac{2\pi\gamma_j}{2N+1}\right) = 0, \quad j = 1,\dots,N-m+1. \tag{8}$$

Для этого рассмотрим функцию $F_1(x_1) := F(x_1; x_2,\dots,x_{n-m+1})$, где переменные $x_2,\dots,x_{N-m+1}$ фиксированы. В тех точках $t \in \mathbb{R}$, в которых существует $F_1''(t)$, имеем $F_1''(t) < 0$. Таким образом, функция F_1 достигает своего минимума только в тех точках, в которых не существует $F_1'(t)$, т.е. в точках, в которых хотя бы одно из слагаемых в сумме в (7) равно нулю. Следовательно, $\min\limits_x F(x) = \min\limits_{x_{N-m+1}}\dots\min\limits_{x_2} F(\lambda_1(x_2,\dots,x_{N-m+1}), x_2,\dots,x_{N-m+1})$, где λ_1 – некоторая линейная функция.

Повторяя последовательно по каждой переменной приведенные выше рассуждения, нетрудно убедиться в справедливости системы (8).

Из системы (8) следует, что

$$\min_x \|T_{N,x}\|_p^p \geq \frac{C}{N}\sum_{j=1}^{m}\left|T_{N,x^*}\left(\frac{2\pi\xi_j}{2N+1}\right)\right|^p, \tag{9}$$

где $\xi_j \in [0,N] \cap \mathbb{Z}_+$ и $\xi_\nu \neq \xi_\mu$ при $\nu \neq \mu$.

Введем следующие обозначения: $\eta_j = \frac{2\pi\xi_j}{2N+1}$, $y_j = T_{N,x^*}(\eta_j)$, где $j = 1, \dots, m$. Используя равенства

$$\widehat{T}_{N,x^*}(\nu) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=1}^{m} y_j e^{-i\nu\eta_j}, \quad |\nu| \leq N$$

и условие $T_{N,x^*} \in \mathcal{T}_{m,N}$, получим систему

$$\sum_{j=1}^{m} y_j e^{i\nu\eta_j} = \begin{cases} 2N+1, & \text{если } \nu = 0; \\ 0, & \text{если } \nu = 1, \dots, m-1. \end{cases} \tag{10}$$

Решение системы (10) имеет следующий вид

$$y_j = (-1)^{j-1}(2N+1) \frac{e^{i\sum_{\nu=1,\nu\neq j}^{m-1} \eta_\nu}}{\prod_{\nu=1,\nu\neq j}^{m} (e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j})}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Далее, из (9) и (11) находим

$$\begin{aligned} \inf_{T \in \mathcal{T}_{m,N}} \|1+T\|_p &\geq C \left(\frac{1}{N^{1-p}} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\nu=1,\nu\neq j}^{m} |e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j}|^{-p} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= C \frac{m}{n^{\frac{1}{p}-1}} \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{\nu=1,\nu\neq j}^{m} |e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j}|^{-p} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\geq C \frac{m}{n^{\frac{1}{p}-1}} \left(\prod_{j=1}^{m} \prod_{\nu=1,\nu\neq j}^{m} |e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j}| \right)^{-\frac{1}{m}} = \\ &= C \frac{m}{n^{\frac{1}{p}-1}} \left(\prod_{\nu>j} |e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j}| \right)^{-\frac{2}{m}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что величина $\Delta_m = \prod_{\nu>j} |e^{i\eta_\nu} - e^{i\eta_j}|$ равна модулю определителя Вандермонда матрицы $\{e^{ik\eta_j}\}$, $k = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m$. Используя неравенство Адамара, получим, что $\Delta_m \leq m^{\frac{m}{2}}$. Таким образом, из неравенства (12) и оценки сверху величины Δ_m вытекает неравенство (6).

Лемма доказана. $\square$

Далее нам понадобится понятие модуля гладкости. Определим для функции $f \in L_p$ ее модуль гладкости порядка r и шага h стандартным образом

$$\omega_r(f,h)_p := \sup_{0<\delta\leq h} \left(\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} f(x+\nu\delta) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 4. *([12]) Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, и $r \in \mathbb{N}$. Для того, чтобы*

$$\omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \asymp E_n(f)_p \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $k > r - 1 + \frac{1}{p}$

$$\omega_r(f, h)_p \asymp \omega_k(f, h)_p \quad \text{при всех} \quad h > 0,$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от n и h.

Лемма 5. *Пусть $0 < p < 1$ и $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Тогда существует функция $f_\alpha \in H^\alpha_{1,p}$ такая, что*

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от n.

Доказательство. Положим

$$f_\alpha(x) = \gamma_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k(x)}{k^\alpha},$$

где

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{k}; \\ 0, & \frac{1}{k} \le x < 2\pi, \end{cases}$$

при $x \in [0, 2\pi)$, а для других x функцию χ_k определяем периодично с периодом 2π. Константа $\gamma_\alpha > 0$.

Очевидно, что функция $f_\alpha \in L$. Оценивая сверху и снизу модуль гладкости функции f_α, нетрудно убедиться в том, что для каждого $r \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $\omega_r(f_\alpha, \delta)_p \asymp \delta^\alpha$, $\delta > 0$. Таким образом, из леммы 4 получим, что $E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. Остается только выбрать константу γ_α так, чтобы $f_\alpha \in H^\alpha_{1,p}$. $\square$

3. Доказательство теоремы 1. Оценки сверху в утверждениях теоремы 1 следуют из леммы 1, а снизу соответствующие оценки можно получить из леммы 3 и леммы 5.

1. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов // М. - Л., ОНТИ. – 1937. – С.28-31.
2. *Тайков Л.В.* Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, №3. – С.205-211.
3. *Талалян А.А.* Представление функций классов $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами // Acta Math. Academ. Sci. Hungar. – 1970. – **21**, №1-2. – С.1-9.
4. *Shapiro J.H.* Subspaces of $L_p(G)$ spanned by characters: $0 < p < 1$ // Isr. J. Math. – 1978. – **29**, №2-3. – С.248-264.
5. *Иванов В.И., Юдин В.А.* О тригонометрической системе в $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. заметки – 1980. – **28**, №6. – С.859-868.
6. *Aleksandrov A.B.* Essays on non locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math. – 1981. – **864**. – Springer-Verlag. – С.1-89.

7. *Иванов В.И.* Представление измеримых функций кратными тригонометрическими рядами // Тр. МИАН СССР – 1983. – **164**. – С.100-123.
8. *Коломойцев Ю.С.* Полнота тригонометрической системы в классах $\varphi(L)$ // Мат. заметки – 2007. – **81**, №5. – С.707-712.
9. *Руновский К.В.* О семействе линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1993. – **184**, №2. – С.145-160.
10. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. Kluwer. 2004.
11. *Стороженко Э.А.* Теоремы вложения и наилучшие приближения // Матем. сб. – 1975. – **97**, №2. – С.230-241.
12. *Коломойцев Ю.С.* О модулях гладкости и мультипликаторах Фурье в L_p, $0 < p < 1$ // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №9. – С.1221-1238.
13. *Runovskii K.V., Schmeisser H.J.* On Marcinkiewicz-Zygmund type inequalities for irregular knots in L_p – spaces, $0 < p \leq +\infty$ // Math. Nachr. – 1998. – **189**, №1. – С.209-220.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomus1@mail.ru

Получено 12.05.08