УДК 517.5

©2008. **Д.А. Зарайский**

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассматриваются вопросы об аппроксимации решений уравнения свёртки вида $f*T=0$, T – радиально, специальными линейными комбинациями решений уравнения $(L+\mu)^\eta u=0$, L – оператор Лапласа, $\mu\in\mathbb{C}$, $\eta\in\mathbb{N}$, таких, что $u*T=0$, на двухточечно-однородных пространствах.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство с евклидовой нормой $|\cdot|$, (ρ,σ) – полярные координаты в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\rho(x)=|x|$, $\sigma(x)=x/|x|$. $B_R(x)$ – шар радиуса R с центром в x, $B_R=B_R(0)$, B_{R_1,R_2} – шаровой слой $\{x\in\mathbb{R}^n\colon R_1<|x|<R_2\}$. Обозначим $\mathcal{D}'(U)$ – пространство распределений на открытом множестве $U\subset\mathbb{R}^n$, снабжённое $*$-слабой топологией. При $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ пусть $\tau_a f=f(\cdot-a)$, $a\in\mathbb{R}^n$, $f*g$ – свёртка f и g. Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Как обычно, $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}^{n-1})$ – пространство однородных гармонических полиномов в $\mathbb{R}^n$ степени k (см., например, [1]), рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1},d\omega)$, $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}_{l=1}^{d_k}$ – некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Пусть $\mathcal{E}'_\natural(B_R)$ – пространство радиальных (т.е. инвариантных относительно вращений) распределений с компактными носителями, $C^\infty_\natural(B_R)=(\mathcal{D}'_\natural\cap C^\infty)(B_R)$. Сферическое преобразование распределения $T\in\mathcal{E}'_\natural(B_R)$ определяется равенством $\widetilde{T}(z)=\hat{T}(z\mathbf{e})=\left\langle T,e^{-iz(\cdot,\mathbf{e})}\right\rangle$, $\hat{T}$ – преобразование Фурье T. Для $T\in\mathcal{E}'_\natural(B_R)$, пусть $r(T)$ – радиус наименьшего шара, содержащего $\operatorname{supp}T$, положим $\mathcal{D}'_T(U)=\{f\in\mathcal{D}'(U)\colon f*T=0 \text{ на } U_{r(T)}\}$, $C^\infty_T(U)=$ $=\{f\in C^\infty(U)\colon f*T=0 \text{ на } U_{r(T)}\}$, где $U_r=\{x\in X\colon \overline{B}_r(x)\subset U\}$, ($U_r$ открыто, если U открыто); очевидно, область определения $f*T$ содержит $U_{r(T)}$, но не обязательно совпадает с ним (см. [2, § 4.2]).

Следуя [1, §1.5.3], для $\eta\in\mathbb{Z}_+$ обозначим при $z\neq0$

$$\Phi_{z,\eta,k,j}(x)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\eta\left(\frac{J_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}}\right)Y_j^{(k)}(\sigma),$$
$$\Psi_{z,\eta,k,j}(x)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\eta\left(\frac{N_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}}\right)Y_j^{(k)}(\sigma),$$

где J_λ, N_λ – функции Бесселя первого и второго рода, [3], и

$$\Phi_{0,\eta,k,j}(x)=\rho^{k+2\eta}Y_j^{(k)}(\sigma),$$

$$\Psi_{0,\eta,k,j}(x)=\begin{cases}\rho^{2\eta-n-k+2}Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{если } n \text{ нечётно или } 2\eta<2k+n-2,\\ \rho^{2\eta-n-k+2}\log\rho Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ – класс распределений $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ таких, что для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$ выполнены неравенства

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leq \gamma_1 \log(2+|\lambda|),\ |\widetilde{T}^{(n(\lambda,T))}(\lambda)| \geq (2+|\lambda|)^{n(\lambda,T)-\gamma_2} \tag{1}$$

с положительными константами γ_1, γ_2, не зависящими от λ, где $n(\lambda, T)$ – кратность нуля λ функции $\widetilde{T}$, если $\lambda \neq 0$, либо её половина, если $\lambda = 0$, $\mathcal{Z}(u)$ – множество нулей функции u, лежащих в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ или на луче $[0, +\infty)$. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ содержится в классе обратимых распределений, то есть любое распределение $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ имеет фундаментальное решение E, $E * T = \delta_0$, δ_0 – дельта-функция Дирака. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ достаточно широк [1, §3.2], он содержит, в частности, индикатор шара χ_{B_r}. Положим $V_r^\infty(U) = C_T^\infty(U)$ для $T = \chi_{B_r}$; $V_r^\infty(U)$ будет тогда множеством функций из $C^\infty(U)$ с нулевыми интегралами по замкнутым шарам радиуса r, лежащих в U.

Если $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, $R_2 - R_1 > r(T)$, $f \in C^\infty(B_{R_1,R_2})$, и $f(x) \sim \sim \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma)$ – ряд Фурье по сферическим гармоникам функции f, то, [1, Th. 3.2.6, Th. 3.2.7], $f \in C_T^\infty(B_{R_1,R_2})$ тогда и только тогда, когда

$$f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})} \sum_{\eta=0}^{n(\lambda,T)-1} (\alpha_{\lambda,\eta,k,l} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} + \beta_{\lambda,\eta,k,l} \Psi_{\lambda,\eta,k,j}), \tag{2}$$

и аналогичное утверждение имеет место для функций на B_R, где в разложении (2) присутствуют только члены с $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}$. Таким образом, для семейств

$$\Phi_T = \{\Phi_{z,\eta,k,j}\}_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}), 0 \leq \eta \leq n(\lambda,T)-1, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq j \leq d(k)},$$

$$\Psi_T = \{\Psi_{z,\eta,k,j}\}_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}), 0 \leq \eta \leq n(\lambda,T)-1, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq j \leq d(k)},$$

имеем:

$$\Phi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{span}_{C^\infty(B_R)} \Phi_T = C_T^\infty(B_R),\ \forall R > 0, \tag{3}$$

$$\Psi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{o\}),\ \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})} \Phi_T \cup \Psi_T = C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}),\ \forall \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Если U – выпукло, то из аппроксимационной теоремы Хёрмандера–Мальгранжа, [2, Th. 16.4.1], следует, что $\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi = C_T^\infty(U)$, см. [1].

В связи с этим в [1] для случая, когда $T = \chi_{B_r}$ – индикатор шара, поставлены следующие вопросы (Problems 4.6-4.8):

1. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

$$\Phi_{1,0,k,l}(\nu_m x/r),\ k \in \mathbb{Z}_+, l = 1, \ldots, d_k, m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

ν_m, $m \in \mathbb{N}$, – положительные корни $J_{n/2}$, плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

2. Пусть $r > 0$, $R_2 - 2r > R_1 > 0$, $\nu \in \mathbb{Z}_+(J_{n/2})$, верно ли тогда, что функция $N_{(n-2)/2}(\nu|x|/r)$ является пределом в $C^\infty(B_{R_1,R_2})$ последовательности линейных комбинаций функций (5)?

3. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

$$c_1\Phi_{1,0,k,l}(\nu_m x/r) + c_2\Psi_{1,0,k,l}(\nu_m(x-h)/r),$$
$$k \in \mathbb{Z}_+, l = 1, \dots, d_k, m \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^n \setminus U, \quad (6)$$

плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

По теореме 1 настоящей работы линейные комбинации функций (6) плотны в $V_r^\infty(U)$ для произвольной области U. Если дополнение U связно, то также и линейные комбинации функций вида (5) плотны в $V_r^\infty(U)$. Теорема 2 даёт отрицательный ответ на второй вопрос и пример областей, для которых линейные комбинации функций (5) не плотны в $V_r^\infty(U)$.

2. Случай евклидова пространства. Для $a \in \mathbb{R}^n$ положим $\Psi_{T,a} = \tau_a\Psi_T = \{f(\cdot - a)\colon f \in \Psi\}$. Имеет место следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ (и, значит, T обратимо), $U \subset X$ открыто, $A \subset \mathbb{R}^n$ – множество такое, что $A \cap U = \varnothing$, и A пересекается с каждой ограниченной компонентой связности множества $X \setminus U$. Тогда*

$$\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi_T \cup \bigcup_{a \in A} \Psi_{T,a} = C_T^\infty(U),$$

то есть линейные комбинации функций $\Psi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot - a)$ и $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot)$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \le \eta \le n(\lambda, T) - 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le j \le d_k$, $a \in A$, плотны в множестве $C_T^\infty(U)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 ниже.

Заметим, что теорема 1 остаётся в силе для любого обратимого распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ и семейств Φ_T, Ψ_T удовлетворяющих (3), (4).

Обратно, если U содержит множество «толщины» $2r$, охватывающее некоторое S и $U \cup S$ открыто, а T – обратимо, то функции, которые можно аппроксимировать элементами $\mathcal{D}'_T(U \cup S)$ на U лежат в $\mathcal{D}'_T(U \cup S)$ (утверждение (i) теоремы 2).

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $r = r(T)$, $U \subset X$ – открыто, V – объединение U и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\mathbb{R}^n \setminus U_r$ (очевидно, V открыто). Тогда:*

(i) Если T обратимо и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причём единственным образом.

(ii) Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ – решение уравнения $(\Delta + \lambda^2)^{n(\lambda,T)} f = 0$ на U, не продолжающееся до его решения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(\Delta + \mu^2)^{n(\mu,T)} f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

Теорема 3. *Система $\{\Phi_{\lambda,\eta,k,j}, \Psi_{\lambda,\eta,k,j}\}_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}), 0 \le \eta \le n(\lambda,T)-1, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \le j \le d(k)}$ топологически линейно независима в $\mathcal{D}'(B_{R_1,R_2})$, $0 \le R_1 < R_2 - 2r$, то есть каждая функция системы не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных.*

3. Случай некомпактного симметрического пространства ранга один. В этом параграфе $X = G/K$ – симметрическое пространства некомпактного типа ранга один, $o = eK \in X$ – отмеченная точка, инвариантная относительно действия группы K. Пусть $G = KAN$ – разложение Ивасавы, M – централизатор A в K, $\hat{K}_M$ – множество представлений δ группы K таких, что существует инвариантный относительно группы $M \subset K$ ненулевой вектор. Множество $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ комплексных линейных функционалов на алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы A стандартным образом отождествляется с $\mathbb{C}$.

Обозначим $\mathcal{E}'_\natural(X)$ – пространство инвариантных относительно K распределений на X с компактными носителями. Аналогично евклидову случаю, при $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$ обозначим через $\widetilde{T}(\lambda)$ – сферическое преобразование распределения T, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, [4, Гл. IV], $n(\lambda, T)$ – кратность нуля λ функции $\widetilde{T}$ (делённую на 2, если $\lambda = 0$), $\mathfrak{N}(X)$ – множество распределений $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, для которых выполнено (1). Пусть $f \times T$ свёртка распределений $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$ и $f \in \mathcal{D}'(X)$. Для открытого множества $U \subset X$ обозначим $C^\infty_T(U)$ – множество решений $f \in C^\infty(U)$ уравнения $f \times T = 0$ на $U_{r(T)}$, где $r(T)$ и U_r определяются так же, как и в евклидовом случае. Распределение $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$ обратимо, если оно обладает фундаментальным решением $E \in \mathcal{D}'(X)$, $E \times T = \delta_o$. $B_R(x)$ – шар радиуса R с центром в x, $B_R = B_R(o)$, $B_{R_1,R_2}(x) = \{y \in X\colon R_1 < \operatorname{dist}(y, x) < R_2\}$, $B_{R_1,R_2} = B_{R_1,R_2}(o)$.

При $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in \hat{K}_M$, $j = 1, \dots, d(\delta)$ можно определить функции $\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^\infty(X)$, $\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^\infty(X \setminus \{o\})$, такие, что для семейств

$$\Phi_T = \{\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}), 0 \le \eta \le n(\lambda,T)-1, \delta \in \hat{K}_m, 1 \le j \le d(\delta)},$$

$$\Psi_T = \{\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}), 0 \le \eta \le n(\lambda,T)-1, \delta \in \hat{K}_m, 1 \le j \le d(\delta)},$$

выполнены аналоги соотношений (3), (4), см. [5, Part 2].

Для $a \in G$ положим $\tau_a f = f(a^{-1} \cdot)$, $\Psi_{T,a} = \tau_a \Psi_T = \{f(a^{-1} \cdot) \colon f \in \Psi_T\}$.

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(X)$, $U \subset X$ открыто, $A \subset G$ – множество такое, что $A \cdot o \cap U = \varnothing$, $A \cdot o$ пересекается с каждой ограниченной компонентой связности множества $X \setminus U$.*

Тогда

$$\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi_T \cup \bigcup_{a \in A} \Psi_{T,a} = C^\infty_T(U).$$

Доказательство. Положим $r = r(T)$ и зафиксируем $E \in \mathcal{D}'_\natural(X)$, $E \times T = \delta_o$.

Возьмём произвольное $w \in \mathcal{E}'(U) \subset \mathcal{E}'(X)$, ортогональное Φ и Ψ_a, $a \in A$. Положим $v = w \times E$, тогда $w = v \times T$. Зафиксируем $R, \varepsilon > 0$,

$$0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} w, X \setminus U), \tag{7}$$

$$\operatorname{supp} w \subset B_R, R > 0. \tag{8}$$

Покажем тогда, что:

(а) $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a \cdot o)$, $\forall a \in A$;

(б) $v = 0$ на $B_{R,\infty}$;

(в) если $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(s)$, $s \in X \setminus U$, то $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon}(s)$.

(а) Пусть $\psi \in C^\infty_\natural(X)$ – произвольная функция, такая что

$$\operatorname{supp}\psi \subset B_{\varepsilon/2}. \tag{9}$$

Для произвольного $x \in B_{r+\varepsilon/2}(a\cdot o) = a\cdot B_{r+\varepsilon/2}$ имеем:

$$x = ag\cdot o, \text{для некоторого } g \in G, g\cdot o \in B_{r+\varepsilon/2}, \tag{10}$$

$$(v\times\psi)(x) = (w\times E\times\psi)(ag\cdot o) = \langle w, \tau_{ag}E\times\psi\rangle = \langle w, \tau_a\tau_g E\times\psi\rangle\,. \tag{11}$$

Но $(\tau_g E\times\psi)\times T = \tau_g E\times\psi\times T = \tau_g E\times T\times\psi = \tau_g\psi$. В силу (9),(10), $\operatorname{supp}\tau_g\psi = g\cdot\operatorname{supp}\psi \subset g\cdot B_{\varepsilon/2} = B_{\varepsilon/2}(g\cdot o) \subset B_{r+\varepsilon}$. Значит, $\tau_g E\times\psi \in C^\infty_T(B_{\varepsilon,\infty}) = \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})}\Phi\cup\Psi$, и $\tau_a\tau_g E\times\psi \in \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty}(a\cdot o))}\Phi_a\cup\Psi_a = \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty}(a\cdot o))}\Phi\cup\Psi_a$. Поскольку $a\cdot o \in X\setminus U$, то из (7) следует, что $w \in \mathcal{E}'(B_{\varepsilon,\infty}(a\cdot o))$, и, так как w ортогонально Φ и Ψ_a, по непрерывности имеем $\langle w, \tau_a\tau_g E\times\psi\rangle = 0$. В силу (10),(11), теперь $v\times\psi = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a\cdot o)$. Устремляя ψ, удовлетворяющее (9), к δ_o, видим, что $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a\cdot o)$.

(б) Пусть функция $\psi \in C^\infty_\natural(X)$, $\operatorname{supp}\psi \subset B_r$, – произвольна. Для $x = g\cdot o \in B_{R,\infty}$ имеем: $(v\times\psi)(x) = \langle w, \tau_g E\times\psi\rangle$. Но $(\tau_g E\times\psi)\times T = \tau_g\psi$, $\operatorname{supp}\tau_g\psi \subset g\cdot B_r = B_r(x) \subset \{y \in X\colon \operatorname{dist}(y,o) > R-r\}$, значит $\tau_g E\times\psi \in C^\infty_T(B_R) = \operatorname{span}_{C^\infty(B_R)}\Phi$. Согласно (8), $w \in \mathcal{E}'(B_R)$, и, значит, как и в предыдущем рассуждении, $v\times\psi = 0$ на $B_{R,\infty}$. Поэтому и $v = 0$ на $B_{R,\infty}$, в силу произвольности ψ.

(в) Из (7) получаем, что $v\times T = w = 0$ на $B_\varepsilon(s)$. Значит $v \in \mathcal{D}'_T(B_{r+\varepsilon}(s))$, и, если $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(s)$, то, по теореме единственности, [5, Part 2], $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon}(s)$.

Рассмотрим теперь множество $\{s \in X\setminus U\colon v = 0 \text{ на } B_{r+\varepsilon}(s)\}$. Вместе с каждым $s_0 \in X\setminus U$ оно содержит все $s \in X\setminus U$, $\operatorname{dist}(s_0,s) < \varepsilon/2$, по свойству (в). Значит оно открыто в $X\setminus U$, замкнуто, содержит $A\cdot o$ и $B_{R+r+\varepsilon}\cap(X\setminus U)$. Таким образом, оно содержит как все ограниченные, так и все неограниченные компоненты $X\setminus U$, то есть совпадает с $X\setminus U$. Итак, $v = 0$ на $\bigcup\limits_{s\in X\setminus U} B_{r+\varepsilon}(s)$, $\operatorname{supp}v \subset \{x \in X\colon \operatorname{dist}(x, X\setminus U) \geq r+\varepsilon\} \subset U_r$. Так как $\operatorname{supp}v \subset \overline{B}_r$ (свойство (б)), то $v \in \mathcal{E}'(U_r)$.

Теперь для любой $f \in C^\infty_T(U)$ имеем: $\langle w, f\rangle = \langle v\times T, f\rangle = \langle v, f\times T\rangle = 0$, так как $f\times T = 0$ на U_r и $\operatorname{supp}v \subset U_r$. По теореме Хана-Банаха, $C^\infty_T(U) \subset \operatorname{span}_{C^\infty(U)}\Phi\cup\bigcup\limits_{a\in A}\Psi_a$.

Обратное включение очевидно: $\Phi \subset C^\infty_T(X)$, $\Psi_a \subset C^\infty_T(X\setminus\{a\cdot o\})$, значит $\Phi|_U, \Psi_a|_U \in C^\infty_T(U)$. $\square$

Теорема 5. *Пусть L – оператор Лапласа на X, $\rho = \rho_X$, см. [5, Part 2], $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, $r = r(T)$, $U \subset X$ – открыто, V – объединение U и некоторого семейства ограниченных компонент связности $X\setminus U_r$. Тогда:*

(i) Если T обратимо и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причём единственным образом.

(ii) Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ – решение уравнения $(L+\rho^2+\lambda^2)^{n(\lambda,T)}f = 0$ на U, не продолжающееся до его решения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(L+\rho^2+\mu^2)^{n(\mu,T)}f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})\setminus\{\lambda\}$.

Теорема 6. *Система* $\{\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j},\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}_{\lambda\in\mathcal{Z}(\widetilde{T}),0\le\eta\le n(\lambda,T)-1,\delta\in\hat{K}_m,1\le j\le d(\delta)}$ *топологически линейно независима в* $\mathcal{D}'(B_{R_1,R_2})$, $0\le R_1<R_2-2r$, *то есть каждая функция системы не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных.*

4. Случай компактного симметрического пространства ранга один. Аналогичные результаты имеют место для симметрического пространства $X=G/K$ компактного типа ранга один. В этом случае мы при определении обратимости распределения T дополнительно предполагаем, что фундаментальное решение E определено на всём X, то есть $|\widetilde{T}(\rho_X+2l)|\ge C(l+1)^{-\gamma}$ для некоторых $C,\gamma>0$, не зависящих от $l\in\mathbb{Z}_+$, где $\rho_X=n-1$, если $X=\mathbb{S}^n$, $\rho_X=(n-1)/2$, если $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $\rho_X=n$, если $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\rho_X=2n+1$, если $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{H}}$, и $\rho_X=11$, если $X=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}\mathrm{a}}$.

Будем считать, что диаметр X равен $\pi/2$. $\mathrm{Ant}\,o=\{p\in X\colon \mathrm{dist}_X(p,o)=\pi/2\}$ – антиподальное многообразие. Следуя [5, Part 3], обозначим $\mathfrak{X}=X\setminus\mathrm{Ant}\,o$, и отождествим $\mathfrak{X}$ с $\mathbb{R}^{a_X}$ со специальным образом заданной римановой метрикой, явный вид метрики – см. в [5]. При этом отождествлении o соответствует начало координат, $\mathrm{dist}_X(x,o)=\mathrm{arctg}\,|x|$, $x\in\mathfrak{X}$. Для $x\in\mathfrak{X}$ обозначим $\varrho(x)=|x|=\mathrm{tg}\,\mathrm{dist}_X(x,o)$, $\sigma(x)=x/|x|$; $B_{R_1,R_2}=\{x\in X\colon R_1<\mathrm{dist}_X(x,o)<R_2\}$. Пространство сферических гармоник степени $k\in\mathbb{Z}_+$ на единичной сфере в $\mathbb{R}^{a_X}$ распадается в сумму пространств $\mathcal{H}^{k,m}$, $m=0,\dots,M_X(k)$, см. [5], обозначим $\{Y_j^{k,m}(\sigma)\}_{j=1}^{d_X^{k,m}}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}$. Далее, $\mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$ – пространство инвариантных относительно K распределений на X с носителями, содержащимися в $\mathfrak{X}$, $\widetilde{T}$ – сферическое преобразование $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$, [5]. Тогда можно определить функции $\Phi_{\lambda,\eta,k,m,j}=\Phi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho)Y_j^{k,m}(\sigma)$, $\Psi_{\lambda,\eta,k,m,j}=\Psi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho)Y_j^{k,m}(\sigma)$, $1\le j\le d_X^{k,m}$, см. [5]. Семейства Φ_T и Ψ_T определяются аналогично некомпактному случаю. Более подробно используемые здесь обозначения см. [5, Part 3].

Пусть $k\in\mathbb{Z}_+$, $0\le m\le M_X(k)$, $1\le j\le d_X^{k,m}$ фиксированы. Для $z\in\mathbb{C}$, следуя [5], положим $A=(\rho_X+z)/2+k-m$, $B=(\rho_X-z)/2+k-m$, $C=k+\alpha_X+1$, где $\alpha_X=a_X/2-1$.

Определим при $X\ne\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ функцию

$$\Xi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho)=\left(\frac{d}{dz}\right)^{\varkappa}\left(\varrho^k(1+\varrho^2)^{m+1-\mathcal{N}(k+1)}F\left(A,B,A+B+1-C,\frac{1}{1+\varrho^2}\right)\right),$$

где $\varkappa=\eta$ при $\lambda\ne0$ и $\varkappa=2\eta$ при $\lambda=0$, а F – гипергеометрическая функция Гаусса, [3]. Пусть

$$\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}(x)=\Xi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho(x))Y_j^{k,m}(\sigma(x)).$$

Тогда можно показать, что $\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}$ продолжается по непрерывности на $\mathrm{Ant}\,o$ и является гладкой функцией на $X\setminus\{o\}$. Кроме того,

$$(L+\lambda^2-\rho_X^2)^{\eta+1}\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}=0,\tag{12}$$

где L – оператор Лапласа на X. Аналогичные функции $\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}$ (несколько более громоздким образом) можно определить и для $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Положим $\Xi_T = \{\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}\} \subset C^\infty(X \setminus \{o\})$, где $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \le \eta \le n(\lambda, T) - 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le m \le M_X(k)$, $1 \le j \le d_X^{k,m}$, $n(\lambda, T)$ определяется также, как и для X некомпактного типа; и $\Xi_{T,a} = \{f(a^{-1}\cdot)\colon f \in \Xi_T\}$, где $a \in G$. Следующие результаты являются аналогами теорем 1-6 для компактного случая.

Теорема 7. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$ обратимо, $U \subset X$ – открыто, $A \subset G$ – множество такое, что $A\cdot o \cap U = \varnothing$, $A\cdot o$ пересекается с каждой компонентой связности $X \setminus U$. Тогда*

$$\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \bigcup_{a\in A} \Xi_{T,a} = C_T^\infty(U).$$

Следствие. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$ обратимо, $U \subset \mathfrak{X}$ – открыто, $A \subset G$ – множество такое, что $A \cdot o \cap U = \varnothing$, $\mathrm{Ant}\, o \cup A \cdot o$ пересекается с каждой компонентой связности $X \setminus U$. Тогда*

$$\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi_T \cup \bigcup_{a\in A} \Xi_{T,a} = C_T^\infty(U).$$

Заметим, что теорема 7 имеет место для любого обратимого T и семейства Ξ_T такого, что

$$\operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})} \Xi_T = C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}),\ \forall \varepsilon > 0,$$

а следствие из неё – для таких T и Ξ_T и произвольного семейства Φ_T, для которого $\operatorname{span}_{C^\infty(\mathfrak{X})} \Phi_T = C_T^\infty(\mathfrak{X})$.

Теорема 8. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$, $r = r(T)$, $U \subset X$ – открыто, V – объединение U и некоторого семейства компонент связности множества $X \setminus U_r$ (очевидно, V открыто). Тогда:*

(i) Если T обратимо и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причём единственным образом.

(ii) Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus (\rho_X + 2\mathbb{Z}_+)$, Ψ_λ – решение уравнения $(L + \lambda^2 - \rho_X^2)^{n(\lambda,T)} = 0$ на U, не продолжающееся до его решения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(L + \mu^2 - \rho_X^2)^{n(\mu,T)} f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

Теорема 9. *Пусть $0 \le R_1 < R_2 - 2r$, $R_2 \le \pi/2$. Система*

$$\left\{\Phi_{\lambda,\eta,k,m,j}, \Psi_{\lambda,\eta,k,m,j}\right\}_{\lambda\in\mathcal{Z}(\widetilde{T}),0\le\eta\le n(\lambda,T)-1,k\in\mathbb{Z}_+,0\le m\le M_X(k),1\le j\le d_X^{k,m}}$$

топологически линейно независима в $\mathcal{D}'(B_{R_1,R_2})$, то есть каждая функция системы не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных.

1. *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454p.
2. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. – М.: Мир, 1986. – 464с.; Том 2. – М.: Мир, 1986. – 456с.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. – М.: Наука, 1973. – 296с.; Том 2. – М.: Наука, 1974. – 296с.
4. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736с.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Uniqueness theorems and descriptions of solutions for convolution equations on symmetric spaces and for the twisted convolution equation on $\mathbb{C}^n$. – Донецк: Издательство Донецкого национального университета, 2005. – 82с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
zaraisky@skif.net

Получено 16.05.08