УДК 521.1

Свойства коэффициентов основных рядов кеплеровского движения

К. В. Холшевников

Изучены свойства коэффициентов $a_k(x)$, $b_k(x)$ разложения орбитальных координат в ряд Фурье по кратным средней аномалии. Для $a_k(x)$, $b_k(x)$ и $c(x)=a_k(x)-b_k(x)$ установлены положительность, монотонность относительно индекса, монотонность или немонотонность относительно аргумента (эксцентриситета), получены некоторые оценки. В частности, из них вытекает абсолютная и равномерная сходимость исследуемых рядов при всех значениях эксцентриситета из промежутка [0, 1] и всех вещественных значениях средней аномалии.

PROPERTIES OF THE COEFFICIENTS OF KEPLER MOTION MAIN EXPANSIONS, by Kholshevnikov K. V.— Properties of the coefficients $a_k(x)$, $b_k(x)$ of the orbital coordinates Fourier-expansions in terms of the mean anomaly are examined. For $a_k(x)$, $b_k(x)$ and $c_k(x)=a_k(x)-b_k(x)$ the positivity, monotony with respect to the index, monotony or non-monotony with respect to the argument (excentricity) are established and several estimates are obtained. It follows, in particular, that the above mentioned series converge absolutely and uniformely with respect to all values of the excentricity from [0, 1] and all real values of the mean anomaly.

Удобное средство описания кеплеровского движения — аппарат рядов Фурье по кратным средней аномалии. Фундаментальное значение имеют ряды для орбитальных декартовых координат. Если ось ξ провести из притягивающего центра в перицентр эллиптической орбиты, ось η — в плоскости орбиты в сторону движения и принять большую полуось за единицу длины, то

$$\xi = -\frac{3}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\cos kM; \quad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)\sin kM, \tag{1}$$

где x — эксцентриситет; M — средняя аномалия. Считаем далее $0\leqslant x\leqslant 1$, $k=1, 2, \ldots$. Случай $x=0$ соответствует круговому движению $a_1(0)=b_1(0)=1$, $a_k(0)=b_k(0)=0$ при $k\geqslant 2$. Случай $x=1$ отвечает прямолинейно-эллиптическому движению.

Выражения a_k, b_k через функции Бесселя

$$a_k = \frac{2}{k} J'_k(kx); \quad b_k = \frac{2u}{kx} J_k(kx); \quad (u=\sqrt{1-x^2}), \tag{2}$$

(полученные Бесселем) приводятся в любом учебнике по небесной механике (см., например, [2, § 6.5]). К сожалению, в руководствах не приводятся свойства a_k, b_k (даже такое очевидное и в то же время важное, как их положительность). В настоящей статье опишем характер поведения величин $a_k(x)$, $b_k(x)$, их разности $c_k(x)=a_k(x)-b_k(x)$ и сумм

$$A_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^s(x), \quad B_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^s(x) \quad (s=1, 2).$$

Теорема. Коэффициенты разложения (1) обладают следующими свойствами:

1) $a_k(x)\geqslant 0$, $b_k(x)\geqslant 0$, причем равенство в первом соотношении достигается только при $x=0$, $k\geqslant 2$; во втором — только при $x=0$, $k\geqslant 2$ и при $x=1$, $k\geqslant 1$;

2) $a_1(x)$, $b_1(x)$ — убывающие функции от x;
3) $a_k(x)$, $b_k(x)$ при каждом $k \geqslant 2$ с увеличением x от 0 до 1 сначала возрастают, затем убывают;
4) $ka_k(x)$, $kb_k(x)$ при каждом x — убывающие функции от k;
5) $a_k(x) \leqslant \sqrt{\frac{2u_1}{\pi k^3}\frac{\exp u}{1+u}}\, v^{k-1}$; $b_k(x) \leqslant \sqrt{\frac{2u}{\pi k^3}\frac{\exp u}{1+u}}\, v^{k-1}$, где $u_1 = \sqrt{1+x^2}$; $v = x(1+u)^{-1}\exp u$. Условия достижения равенств те же, что в свойстве 1; 6) $c_k(x) \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $x=0$; 7) $c_k(x)$ при каждом k возрастает с увеличением x; 8) $kc_k(x)$ при каждом x убывает с увеличением k; 9) $c_k(x) \leqslant \sqrt{\frac{8}{\pi k^3 u_1}\frac{1+u}{(u+u_1)\exp u}}\, v^{k+1}$, причем равенство достигается лишь при $x=0$; 10) $A_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$; $B_1(x) = \frac{u}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin E\,(1 - x\cos E)\operatorname{ctg}\frac{E - x\sin E}{2}\,dE$; 11) $A_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $B_2(x) = 1 - x^2$.

Доказательство. Свойства 1—3 вытекают из определения $J_k(z)$ рядом Маклорена и соотношений [1, § 15.3] для наименьших положительных корней j_k, j'_k, j''_k функций $J_k(z)$, $J'_k(z)$, $J''_k(z)$: $j_k > j'_k > k$; $j''_1 > 1$, $j''_k < k$ $(k \geqslant 2)$. Свойства 4, 5 доказаны Ватсоном [1, § 8.5] с помощью представления $J_k(kx)$, $J'_k(kx)$ определенным интегралом от быстроубывающей (а не осциллирующей) функции. Мы воспользуемся тем же методом для доказательства свойств 6—9.

Из упомянутого представления следует

$$\frac{k\pi}{2} c_k(x) = \int\limits_0^\pi \frac{g(t,x)}{x} \exp[-kf(t,x)]\,dt. \tag{3}$$

Здесь

$$f(t,x) = \ln\frac{t+y}{x\sin t} - y\operatorname{ctg} t; \quad g(t,x) = g_1(t,x) - u,$$

где

$$y = \sqrt{t^2 - x^2\sin^2 t}; \quad g_1(t,x) = \begin{cases} (t - x^2\sin t\cos t)/y & \text{при } t > 0, \\ u & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Сформулируем нужные нам свойства величин f, g_1, g [1, § 8.5]. Функции g_1, g непрерывны в прямоугольнике $\Pi(0 \leqslant t \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$; функция f непрерывна в Π за исключением сторон $x=0$, $t=\pi$, где она обращается в $+\infty$;

$$f(t,x) - f(0,x) \geqslant \frac{y^2}{2u_1}; \quad f(0,x) = -\ln v \geqslant 0, \tag{4}$$

так что $x^{-1}\exp(-kf)$ непрерывна в Π;

$$\frac{1}{x}\exp[-kf(t,x)] \leqslant \frac{1}{x}\exp[-kf(0,x)] = \frac{v^{k-1}}{1+u}\exp u; \tag{5}$$

$$u \leqslant \frac{\partial y}{\partial t} = g_1 < u_1; \quad 0 \leqslant g < 2x^2(u+u_1)^{-1}, \tag{6}$$

причем равенства в (5), (6) достигаются при $t=0$.

Второе неравенство (6) влечет свойство 6. Продифференцируем (3) под знаком интеграла

$$\frac{k\pi}{2} c'_k(x) = \int\limits_0^\pi h(t,x)\exp[-kf(t,x)]\,dt, \tag{7}$$

где

$$h(t, x) = \frac{g(kg_1 - 1)}{x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial g}{\partial x}; \tag{8}$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\sin t\,(-2t^2\cos t + t\sin t + x^2\sin^2 t\cos t)}{y^3} + \frac{1}{u}. \tag{9}$$

Согласно (6) первое слагаемое (8) непрерывно на П. Раскрывая в (9) неопределенность при $t \to 0$, $0 \leqslant x < 1$, получаем $\frac{1}{x}\,\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = \frac{1}{x} \times$ $\times \frac{\partial g(0, x)}{\partial x}$, так что второе слагаемое в (8) также непрерывно. Законность дифференцирования под знаком интеграла (3) при $0 \leqslant x < 1$ установлена. При $x = 1$ функция $c_k(x)$ теряет гладкость из-за множителя u в (2).

Докажем положительность h при $0 < x < 1$, $0 < t \leqslant \pi$. Преобразуем (9)

$$\frac{1}{x}\,\frac{\partial g}{\partial x} = \sin t\,\frac{(t\sin t - t^2\cos t) - \cos t\,(t^2 - x^2\sin^2 t)}{y^3} + \frac{1}{u} =$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - x^2\beta}} + \frac{t\sin t\,(\sin t - t\cos t)}{y^3} > \frac{1 - \alpha}{u} > 0, \tag{10}$$

где введены обозначения $\alpha = \sin t\cos t/t$, $\beta = \sin^2 t/t^2$. Аналогично

$$g = \frac{1 - x^2\alpha}{\sqrt{1 - x^2\beta}} - u < \frac{1 - x^2\alpha}{u} - u = \frac{x^2(1 - \alpha)}{u}. \tag{11}$$

При $g_1 \geqslant 1$ из (8), (10) следует положительность h. При $g_1 < 1$ с учетом (11)

$$\frac{g(kg_1 - 1)}{x^2} \geqslant \frac{g(g_1 - 1)}{x^2} > \frac{1 - \alpha}{u}(g_1 - 1) > -\frac{1 - \alpha}{u},$$

так что с учетом (10) $h > 0$. Свойство 7 установлено.

Временно считая k непрерывным положительным параметром, получаем дифференцированием (3) под знаком интеграла

$$\frac{\pi x}{2}\,\frac{\partial}{\partial k}[kc_k(x)] = -\int_0^{\pi} f(t, x)\,g(t, x)\exp[-kf(t, x)]\,dt.$$

Законность дифференцирования при $0 \leqslant x \leqslant 1$ устанавливается элементарно. Положительность подынтегральной функции при $0 < x \leqslant 1$, $0 < t < \pi$ влечет свойство 8.

С учетом (4), (6) умноженная на x правая часть (3) не превышает

$$\exp[-kf(0, x)]\int_0^{\pi} g_1\left(1 - \frac{u}{g_1}\right)\exp\left[-\frac{ky^2}{2u_1}\right]dt < \exp[-kf(0, x)] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\int_0^{\pi}\exp\left[-\frac{ky^2}{2u_1}\right]dy.$$

Последний интеграл меньше, чем

$$\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{ky^2}{2u_1}\right]dy = \sqrt{\frac{\pi u_1}{2k}},$$

откуда следует свойство 9.

Первая из формул (1) дает в перицентре

$$-\frac{3}{2}x + A_1(x) = \xi\,|_{M=0} = \cos E - x\,|_{M=0} = 1 - x,$$

где E — эксцентрическая аномалия. Отсюда $A_1(x) = 1 + x/2$.

Воспользуемся теперь формулой [3, § 3.6]

$$2\sum_{m=1}^{n}\sin mM = \operatorname{ctg}\frac{M}{2} - \frac{\cos(n+1/2)M}{\sin\frac{M}{2}}\ . \tag{12}$$

Домножим вторую из формул (1) на (12)

$$\sin E\operatorname{ctg}\frac{M}{2} - \frac{\sin E}{\sin M/2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)M = 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\bar{b}_k\sin kM\sin mM =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\bar{b}_k + \ldots\ . \tag{13}$$

Здесь $\bar{b}_k = b_k/u$, точками обозначены слагаемые, пропадающие после интегрирования по M от 0 до π. Поскольку функция $\sin E/\sin\frac{M}{2}$ интегрируема, то по теореме Римана [3, § 3.2] интеграл от второго слагаемого слева в (13) стремится к нулю с ростом n. Интегрируя (13) от 0 до π и устремляя n к бесконечности, получим

$$\frac{\pi}{u}B_1 = \int_0^{\pi}\sin E\operatorname{ctg}\frac{M}{2}\,dM.$$

Переходя к интегрированию по E, установим свойство 10. К сожалению, элементарной формулы для B_1 нет.

Выражения для A_2, B_2 даются формулой Парсеваля

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\xi + \frac{3}{2}x\right)^2 dM;\quad B_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\eta^2 dM.$$

Переходя к интегрированию по E, установим свойство 11. Теорема доказана.

Упростим неравенства, представляющие свойства 5 и 9. Коэффициенты при v^{k-1} в оценках для a_k, b_k убывают с увеличением x, тогда как коэффициент при v^{k+1} в оценке для c_k возрастает. Поэтому

$$a_k(x),\ b_k(x) \leqslant \frac{e}{\sqrt{2\pi k^3}}v^{k-1} = \frac{1.0844}{k^{3/2}}v^{k-1}; \tag{14}$$

$$c_k(x) \leqslant \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{\pi k^3}}v^{k+1} = \frac{0.9488}{k^{3/2}}v^{k+1}. \tag{15}$$

Из теоремы вытекает абсолютная и равномерная в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < M < \infty$ сходимость рядов (1) вопреки неверным утверждениям, содержащимся в некоторых руководствах по небесной механике. Легко показать, что при $x < 1$ ряды (1) можно почленно дифференцировать по x и по M сколько угодно раз. Сходимость будет абсолютной и равномерной в полосе $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $-\infty < M < \infty$ при любом положительном $x_0 < 1$.

При $x = 1$ ряд (1) для η превращается в ряд из нулей. Ряд для $\partial\xi/\partial x$ продолжает абсолютно сходиться, так как из дифференциального уравнения для функций Бесселя следует $a'_k(1) = -a_k(1)$. Ряд для $\partial\xi/\partial M$ при $x=1$ сходится лишь условно и неравномерно в окрестности $M=0$, поскольку скорость при соударении обращается в бесконечность.

Разумеется, характер сходимости можно установить и непосредственно по свойствам E как функции от x, M. В частности, равномерная сходимость рядов (1) в указанной полосе вытекает из абсолютной непрерывности эксцентрической аномалии. Теорема же позволяет дать количественные оценки. Вычислим, например, погрешность r_n в определении положения небесного тела, вызванную отбрасыванием гармоник с номерами выше $n \geqslant 0$. Поскольку операции поворота осей и тригонометрических разложений коммутативны, можно воспользоваться орбитальной системой координат

$$r_n^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kM\right)^2 + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin kM\right)^2.$$

Перемножим почленно абсолютно сходящиеся ряды

$$2r_n^2 = \sum_{k,m=n+1}^{\infty} [(a_k a_m + b_k b_m)\cos(k-m)M + (a_k a_m - b_k b_m)\cos(k+m)M].$$

По свойствам 1, 6 коэффициенты при косинусах положительны. Поэтому наибольшее на эллипсе значение достигается в перицентре при $M=0$:

$$\|r_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = A_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

где $\|r_n\|$ означает наибольшее значение функции на оси $-\infty < M < \infty$. В силу свойства 10

$$\|r_n\| = 1 + \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Если же воспользоваться свойством 5, то для $\|r_n\|$ придем к тому же неравенству 5, где $k^{-3/2}v^{k-1}$ следует заменить на

$$\tilde{r}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3/2} v^{k-1}.$$

Вынося за знак суммы верхнюю границу первого или второго множителя, получаем

$$\tilde{r}_n < \frac{v^n}{(n+1)^{3/2}(1-v)}; \quad \tilde{r}_n < \sqrt{\frac{8}{2n+1}}\, v^n.$$

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— Ч. 1.— 800 с.
2. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию.— М. : Наука, 1968.— 800 с.
3. *Харди Г. Х., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье.— М. : Физматгиз, 1959.— 156 с.

Ленингр. ун-т
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 04.04.88,
после доработки 20.06.88