УДК 52—64

Разложение элементов матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям в задаче переноса поляризованного излучения в средах, состоящих из полностью ориентированных осесимметричных частиц

В. Н. Кузьмин

На основе аппарата обобщенных сферических функций получены главные соотношения симметрии для элементов матрицы рассеяния в случае системы осесимметричных частиц, ориентированных в одном направлении. Эти соотношения можно эффективно использовать при решении задач переноса поляризованного излучения в атмосферах планет и межзвездной среде.

EXPANSION OF THE SCATTERING MATRIX ELEMENTS IN GENERALIZED SPHERICAL FUNCTION SERIES RELEVANT TO THE TRANSFER OF POLARIZED LIGHT IN A MEDIUM CONTAINING PERFECTLY ORIENTED AXISYMMETRIC PARTICLES, by Kuz'min V. N.— On the basis of the generalized spherical function method the main relationships of symmetry between the elements of scattering matrix for axisymmetric perfectly oriented particles are found. These relationships can be effectively used to solve some problems of the transfer of polarized light in planetary atmospheres and interstellar medium.

В задачах переноса поляризованного излучения, которые, как правило, решаются лишь численно, значительную роль играют возможные свойства симметрии первичных радиационных характеристик. Они позволяют, во-первых, упростить процесс алгоритмизации задачи и, во-вторых, существенно уменьшить время расчета искомых величин. Особенно важен учет этих свойств при использовании сложных модельных представлений о структуре рассеивающих центров, когда резко усложняются функциональные зависимости величин, входящих в уравнение переноса, от внутренних параметров системы.

В настоящей работе рассмотрен случай рассеивающей среды, состоящей из совокупности частиц в виде тел вращений, оси симметрии которых ориентированы строго в одном направлении.

Важные сведения о характеристиках рассеяния можно, очевидно, получить, исходя лишь из свойств симметрии отдельных рассеивателей и их статистики. Взаимосвязь свойств симметрии и первичных радиационных характеристик наиболее просто можно выявить с помощью специально выбранных представлений. Эти представления должны быть такими, чтобы при каких-либо изменениях, связанных с операцией симметрии, присущей данной модели, интересующие нас величины трансформировались наиболее простым, линейным образом. Выбор, очевидно, основан на тщательном изучении того, как традиционно используемые представления трансформируются под воздействием какого-либо оператора (например, наиболее важного для данной работы оператора поворота системы отсчета).

В общем случае закон изменения параметров Стокса при комплексно-линейном преобразовании базисных векторов получен в [5]. Для этого вектор напряженности электрического поля разлагался по специальному базису эллиптически поляризованных составляющих (*ep*-представление), и на данной основе рассматривался переход к новому базису аналогичных составляющих. Инвариантами такого преобразования оказались интенсивность, степени поляризации, эллиптичности и однородности. В частном случае в качестве базисных могут быть выбраны линейные (*lp*-представление) или круговые (*cp*-представление) векторы. Тогда переход к новому базису в рамках одного и того же представления дается оператором поворота, а для вектор-параметра Стокса можно записать

$$\mathbf{S}^{\text{н}}(\vartheta_1, \varphi_1) = \mathbf{M}(\Psi)\,\mathbf{S}^{\text{c}}(\vartheta, \varphi),$$

где переменные сферической системы координат в новом (ϑ_1, φ_1) и старом (ϑ, φ) базисах, а также угол между меридиональными плоскостями луча (Ψ) в этих базисах связаны следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}(\varphi-\alpha) = \cos\beta\operatorname{ctg}(\varphi_1+\gamma) + \operatorname{ctg}\vartheta_1\sin\beta/\sin(\varphi_1+\gamma);\\ \cos\vartheta = \cos\vartheta_1\cos\beta - \sin\vartheta_1\sin\beta\cos(\varphi_1+\gamma); \qquad (1)\\ \operatorname{ctg}\Psi = \cos\vartheta_1\operatorname{ctg}(\varphi_1+\gamma) + \operatorname{ctg}\beta\sin\vartheta_1/\sin(\varphi_1+\gamma),\end{gathered}$$

а переменные α, β и γ — углы Эйлера, характеризующие взаимное расположение старой и новой систем отсчета. Матрица преобразования для разных представлений параметров Стокса различна. Для *lp*- и *cp*-представлений она имеет простой вид [8]:

$$\mathbf{M}^{lp}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & \cos 2\Psi, & \sin 2\Psi, & 0\\ 0, & -\sin 2\Psi, & \cos 2\Psi, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}^{cp}(\Psi) = \begin{pmatrix} \exp(2i\Psi), & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \exp(-2i\Psi)\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Очевидно, что рассматриваемое преобразование в этих наиболее часто используемых представлениях нелинейно относительно переменных ϑ и φ. Оказалось, что можно найти такой однозначно связанный с параметрами Стокса набор величин, для которого данное преобразование будет линейным. В частности, в [7] показано, что разложение параметров Стокса в *cp*-представлении по обобщенным сферическим функциям или функциям Вигнера [2, 3] дает коэффициенты суперпозиции, которые при повороте системы преобразуются линейным образом. Аналогичные разложения предложены и для *lp*-представления [8].

Матрица преобразования параметров Стокса, или энергетическая матрица рассеяния, при поворотах трансформируется по закону

$$\mathbf{D}^{\text{н}}(\vartheta_1, \varphi_1; \vartheta_1', \varphi_1') = \mathbf{M}(\Psi)\,\mathbf{D}^{\text{c}}(\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi')\,\mathbf{M}^{-1}(\Psi'), \qquad (3)$$

где штрихом обозначены переменные, описывающие падающее на частицу излучение. Инварианты матрицы рассеяния по отношению к операции вращения вокруг направлений распространения излучения найдены в [4], а линейные представления для изотропных систем — в [7, 8]. В работах [1, 6] получены коэффициенты разложения матрицы рассеяния системой сферических частиц по обобщенным сферическим функциям.

Чтобы найти базис разложения матрицы рассеяния осесимметричными частицами, введем новое представление параметров Стокса — симметричное, или *s*-представление, которое, как можно будет убедиться в дальнейшем, удобно для теоретических исследований. Компоненты

s-представления определим по формуле

$$\mathbf{S}_s(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} S^s_{-2}(\vartheta, \varphi) \\ S^s_{-0}(\vartheta, \varphi) \\ S^s_0(\vartheta, \varphi) \\ S^s_2(\vartheta, \varphi) \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{S}^{lp}(\vartheta, \varphi),$$

где прямая и обратная матрицы задаются выражениями

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0, & 1, & -i, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -i \\ 1, & 0, & 0, & i \\ 0, & 1, & i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 1 \\ i, & 0, & 0, & -i \\ 0, & i, & -i, & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования $\mathbf{M}(\Psi)$ в этом представлении имеет вид (2). Следовательно, в повернутой системе координат вектор-параметр Стокса равен

$$\mathbf{S}^s_\mu(\vartheta_1, \varphi_1) = \mathbf{S}^s_\mu(\vartheta, \varphi)\exp(-i\mu\Psi), \qquad \mu = -2, -0, 0, 2. \tag{4}$$

Представим вектор-параметр в старой системе в виде разложений

$$\mathbf{S}^s_\mu(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} S^{mn}_\mu \exp(-im\varphi)\, d^n_{m\mu}(\vartheta); \qquad d^n_{m-0}(\vartheta) = d^n_{m0}(\vartheta), \tag{5}$$

где $d^n{}_{m\mu}(\vartheta)$ — ортогональные функции, входящие в определение обобщенных сферических функций [3] или D-функций Вигнера [2]:

$$D^n_{mk}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-im\alpha)\, d^n_{mk}(\beta)\exp(-ik\gamma).$$

Коэффициенты разложения $S^{mn}{}_\mu$ находятся из интегральных соотношений, определенных во всем телесном угле:

$$S^{mn}_\mu = \left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{-1} \int_{4\pi} S^s_\mu(\vartheta, \varphi)\exp(im\varphi)\, d^n_{m\mu}(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Подставляя (5) в (4) и используя определение D-функций Вигнера, получаем

$$S^s_\mu(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{nm} S^{mn}_\mu D^n_{m\mu}(\varphi, \vartheta, \Psi).$$

Учитывая, что функции Вигнера преобразуются с помощью соотношений (1) и формулы [2]

$$D^n_{mk}(\varphi, \vartheta, \Psi) = \sum_{l=-n}^{n} D^n_{ml}(\alpha, \beta, \gamma)\, D^n_{lk}(\varphi_1, \vartheta_1, 0), \tag{6}$$

легко находим

$$S^s_\mu(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{nm} S^{mn}_{\mu 1} D^n_{m\mu}(\varphi_1, \vartheta_1, 0), \tag{7}$$

где

$$S^{mn}_{\mu 1} = \sum_{k=-n}^{n} S^{kn}_\mu D^n_{km}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{8}$$

Если поставить в соответствие величинам $S^s{}_\mu$ величины $S^{mn}{}_\mu$, то, как видно из (8), получим линейное к операции вращения представление параметров Стокса. Заметим, что если выполнить такие выкладки для cp-представления, то получим аналогичные результаты. Чтобы отразить специфику s-представления, обратим внимание на то, что для него выполняются следующие равенства: $S^s{}_\mu(\vartheta, \varphi) = S^{s*}_{-\mu}$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Следовательно, два последних соотношения в разложении (7) можно записать в таком виде:

$$S_0^s(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{nm} S_{-0}^{mn*} D_{m0}^{n*}(\varphi_1, \vartheta_1, 0); \qquad S_2^s(\vartheta_1, \varphi_1) = \sum_{nm} S_{-2}^{mn*} D_{m-2}^{n*}(\varphi_1, \vartheta_1, 0).$$

Подобного рода равенства можно получить и для элементов матрицы рассеяния, которые находятся из соотношений

$$\mathbf{D}^s = \mathbf{L}\cdot\mathbf{D}^{lp}\cdot\mathbf{L}^{-1}.$$

Здесь и далее для упрощения записи аргументы в матрице рассеяния опущены. С учетом этих равенств запишем элементы матрицы рассеяния в виде разложений

$$D_{\mu\nu} = D^*_{-\mu-\nu} = \sum_{nl}^{\infty} \sum_{|m|\leqslant n} \sum_{|k|\leqslant l} a_{\mu\nu}^{mnkl} D_{m\mu}^{n}(\varphi, \vartheta, 0)\, D_{k\nu}^{l*}(\varphi', \vartheta', 0), \tag{9}$$

где коэффициенты $a^{mnkl}{}_{\mu\nu}$ легко получить, используя соотношения ортогональности D-функций Вигнера. Здесь они не приводятся, так как формулы (9) имеют промежуточный характер.

Переход к новой, повернутой относительно старой на углы Эйлера (α, β, γ) системе координат проводится с помощью формулы (3), (2) и (1). Если воспользоваться первыми двумя из них, то соотношения (9) изменятся лишь в том, что нулевые аргументы D-функции перейдут соответственно в Ψ- и Ψ'-факторы. Приняв во внимание формулы (1) и (6), легко показать, что соотношения (9) верны и в новой системе координат, но с измененными коэффициентами разложения. Связь между новыми и старыми коэффициентами задается формулой

$$(a_{\mu\nu}^{mnkl})^{\text{н}} = \sum_{|r|\leqslant a}^{a=\min(n,l)} \sum_{|s|\leqslant a} D_{rm}^{n}(\alpha, \beta, \gamma)\, (a_{\mu\nu}^{rnsl})^{\text{c}} D_{sk}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \sum_{rs} \exp\left[-i(m-k)\gamma\right] d_{rm}^{n}(\beta)\, (a_{\mu\nu}^{rnsl})^{\text{c}} d_{sk}^{l}(\beta) \exp\left[-i(r-s)\alpha\right]. \tag{10}$$

Рассмотрим частицу с осью симметрии бесконечного порядка. Если ввести систему координат так, чтобы ось Z проходила вдоль оси симметрии частицы, то поворот вокруг этой оси, очевидно, не должен привести ни к каким изменениям в характеристиках рассеяния. Учитывая, что (10) при произвольном α принимает вид

$$(a_{\mu\nu}^{mnkl})^{\text{н}} = \exp\left[-i(m-k)\alpha\right] (a_{\mu\nu}^{mnkl})^{\text{c}},$$

можно записать

$$(a_{\mu\nu}^{mnkl})^{\text{c}} = \delta_{mk} a_{\mu\nu}^{mln}, \tag{11}$$

где δ_{mk} — символ Кронекера. Подставим (11) в (9) и перейдем к lp-представлению. Это даст такие соотношения:

$$D_{11}^{lp} = \operatorname{Re} \sum_{nl} \sum_{|m|\leqslant \min(n,l)} (a_{-0-0}^{mnl} + a_{-00}^{mnl})\, D_{m0}^{n}(\varphi, \vartheta, 0)\, D_{m0}^{l*}(\varphi', \vartheta', 0);$$

$$D_{12}^{lp} = \operatorname{Re} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{02}^{mnl*} + a_{-02}^{mnl*})\, D_{m0}^{n*} D_{m2}^{l};$$

$$D_{13}^{lp} = \operatorname{Im} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{02}^{mnl*} + a_{-02}^{mnl})\, D_{m0}^{n*} D_{m2}^{l};$$

$$D_{14}^{lp} = \operatorname{Im} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{-0-0}^{mnl} + a_{0-0}^{mnl})\, D_{m0}^{n} D_{m0}^{l*}.$$

$$D_{21}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{20}^{mnl*} + a_{2-0}^{mnl*}) D_{m2}^{n*} D_{m0}^{l};$$

$$D_{22}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{22}^{mnl*} D_{m2}^{n*} D_{m2}^{l} + a_{-2+2}^{mnl} D_{m-2}^{n} D_{m2}^{l*});$$

$$D_{23}^{lp} = \mathrm{Im} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{22}^{mnl*} D_{m2}^{n*} D_{m2}^{l} - a_{-22}^{mnl} D_{m-2}^{n} D_{m2}^{l*});$$

$$D_{24}^{lp} = \mathrm{Im} \sum_{nl} \sum_{m} (a_{20}^{mnl*} - a_{2-0}^{mnl*}) D_{m2}^{n*} D_{m0}^{l};$$

$$D_{31}^{lp} = - \mathrm{Im} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{20}^{mnl*} + a_{2-0}^{mnl*}) D_{m2}^{n*} D_{m0}^{l}; \tag{12}$$

$$D_{32}^{lp} = - \mathrm{Im} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{22}^{mnl*} D_{m2}^{n*} D_{m2}^{l} + a_{-22}^{mnl} D_{m-2}^{n} D_{m2}^{l*});$$

$$D_{33}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{22}^{mnl*} D_{m2}^{n*} D_{m2}^{l} - a_{-22}^{mnl} D_{m-2}^{n} D_{m2}^{l*});$$

$$D_{34}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{20}^{mnl*} - a_{2-0}^{mnl*}) D_{m2}^{n*} D_{m0}^{l};$$

$$D_{41}^{lp} = - \mathrm{Im} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{-0-0}^{mnl} - a_{0-0}^{mnl*}) D_{m0}^{n} D_{m2}^{l*};$$

$$D_{42}^{lp} = - \mathrm{Im} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{02}^{mnl*} - a_{-02}^{mnl*}) D_{m0}^{n*} D_{m2}^{l};$$

$$D_{43}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{02}^{mnl*} - a_{-02}^{mnl*}) D_{m0}^{n*} D_{m2}^{l};$$

$$D_{44}^{lp} = \mathrm{Re} \sum_{ln} \sum_{m} (a_{-0-0}^{mnl} - a_{0-0}^{mnl*}) D_{m0}^{n} D_{m0}^{l*}.$$

Далее следует заметить, что любая плоскость, проходящая через ось симметрии частицы, является плоскостью симметрии. Инвариантность формы частицы к операции отражения в плоскости требует, чтобы для элементов матрицы $D^{lp}{}_{ij}(\vartheta, \varphi;\ \vartheta', \varphi')$ с индексами 11, 12, 21, 22, 33, 34, 43 и 44 выполнялись равенства

$$D_{ij}(\vartheta, \varphi;\ \vartheta', \varphi') = D_{ij}(\vartheta, -\varphi;\ \vartheta', -\varphi'),$$

а для остальных элементов —

$$D_{ij}(\vartheta, \varphi;\ \vartheta', \varphi') = -D_{ij}(\vartheta, -\varphi;\ \vartheta', -\varphi').$$

Очевидно, что эти соотношения выполняются, если коэффициенты разложения в (12) действительные. Обозначив их как $c^{mnl}{}_{ij}$, можно записать:

$$D_{11}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi - \varphi') = \sum_{ln} \sum_{m} c_{11}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi');$$

$$D_{12}^{lp} = \sum_{ln} \sum_{m} c_{12}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi');$$

$$D_{13}^{lp} = \sum_{ln} \sum_{m} c_{12}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');$$

$$D_{14}^{lp} = - \sum_{ln} \sum_{m} c_{11}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');$$

$$
\begin{aligned}
D_{21}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{21}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi');\\
D_{22}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} [c_{22}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') + c_{23}^{mnl} d_{m-2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta')] \cos m(\varphi - \varphi');\\
D_{23}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} [c_{22}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') - c_{23}^{mnl} d_{m-2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta')] \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{24}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{34}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{31}^{lp} &= -\sum_{ln}\sum_{m} c_{21}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{32}^{lp} &= -\sum_{ln}\sum_{m} [c_{22}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') + c_{23}^{mnl} d_{m-2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta')] \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{33}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} [c_{22}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') - c_{23}^{mnl} d_{m-2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta')] \cos m(\varphi - \varphi');\\
D_{34}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{34}^{mnl} d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi');\\
D_{41}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{44}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{42}^{lp} &= -\sum_{ln}\sum_{m} c_{43}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \sin m(\varphi - \varphi');\\
D_{43}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{43}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi');\\
D_{44}^{lp} &= \sum_{ln}\sum_{m} c_{44}^{mnl} d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m(\varphi - \varphi').
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Обратная связь между элементами матрицы рассеяния и коэффициентами $c^{mnl}{}_{ij}$ следует из ортогональности тригонометрических и обобщенных сферических функций:

$$
\begin{aligned}
c_{11}^{mnl} &= \nu \int D_{11}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{12}^{mnl} &= \nu \int D_{12}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{21}^{mnl} &= \nu \int D_{21}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{34}^{mnl} &= \nu \int D_{34}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{22}^{mnl} &= \nu \int [D_{22}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi) + D_{33}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)]\, d_{m2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{43}^{mnl} &= \nu \int D_{43}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{23}^{mnl} &= \nu \int [D_{22}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi) - D_{33}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)]\, d_{m-2}^{n}(\vartheta)\, d_{m2}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
c_{44}^{mnl} &= \nu \int D_{44}^{lp}(\vartheta, \vartheta', \varphi)\, d_{m0}^{n}(\vartheta)\, d_{m0}^{l}(\vartheta') \cos m\varphi\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi;\\
\nu &= (2n+1)(2l+1)/(16\pi^2); \qquad \mu' = \cos\vartheta'; \qquad \mu = \cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из (13) и (14) следует: чтобы иметь полное описание матрицы рассеяния, достаточно знать ее элементы при $\varphi'=0$. Необходимо обратить внимание также на то, что $c^{mnl}{}_{11}$ и $c^{mnl}{}_{44}$ четны по индексу m и, следовательно, элементы $D^{lp}{}_{14}$ и $D^{lp}{}_{41}$ обращаются в нуль

Предположим, что рассеивающая частица симметрична не только относительно оси Z, но и относительно плоскости, перпендикулярной этой оси. Последнее означает, что замена аргументов ϑ и ϑ' на $\pi-\vartheta$ и $\pi-\vartheta'$ в матрице (13) не должна привести к изменениям. Отсюда следуют равенства

$$c_{ij}^{mnl}=c_{ij}^{-mnl}(-1)^{n+l} \tag{15}$$

которые изменяют структуру матрицы так, что функции, зависящие от меридиональных аргументов ϑ и ϑ', заменяются на симметричные

$$d_{mi}^{n}(\vartheta)\,d_{mj}^{l}(\vartheta')\to\{d_{mi}^{n}(\vartheta)\,d_{mj}^{l}(\vartheta')+d_{mi}^{n}(\pi-\vartheta)\,d_{mj}^{l}(\pi-\vartheta')\}, \tag{16}$$

а суммирование по индексу m идет лишь по положительным значениям. Найдем равенства, которым должны удовлетворять коэффициенты $c^{mnl}{}_{ij}$ при выполнении соотношений взаимности между элементами матрицы рассеяния в lp-представлении [8]:

$$\mathbf{D}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi')=\mathbf{T}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\pi-\vartheta',\pi-\varphi';\pi-\vartheta,\pi-\varphi)\,\mathbf{T}^{-1},$$

где $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица, а $\mathbf{T}$ имеет такой вид:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое выражение:

$$D_{11}^{lp}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi')=D_{11}^{lp}(\pi-\vartheta',\pi-\varphi';\pi-\vartheta,\pi-\varphi). \tag{17}$$

Подставляя в (17) величины из (13), получаем

$$\sum_{nl}\sum_{m}[c_{11}^{mnl}d_{m0}^{n}(\vartheta)\,d_{m0}^{l}(\vartheta')\cos m(\varphi-\varphi')]=\sum_{nl}\sum_{m}[c_{11}^{mnl}d_{m0}^{n}(\pi-\vartheta')\times$$
$$\times\, d_{m0}^{l}(\pi-\vartheta')\cos m(\varphi-\varphi')].$$

Учитывая, что $d_{m0}^{n}(\pi-\vartheta)=(-1)^{n}d_{-m0}^{n}(\vartheta)$, приходим к соотношению

$$c_{11}^{mnl}=c_{11}^{-mnl}(-1)^{n+l},$$

а предполагая выполнение (15), получаем более простое выражение

$$c_{11}^{mnl}=c_{11}^{mln}. \tag{18}$$

Аналогично доказываются и другие формулы типа (18):

$$\begin{aligned}&c_{12}^{mnl}=c_{21}^{mln};\quad c_{34}^{mnl}=-c_{43}^{mln};\quad c_{44}^{mnl}=c_{44}^{mln};\\ &c_{22}^{mnl}=c_{22}^{mln};\quad c_{23}^{mnl}=c_{32}^{-mln}.\end{aligned} \tag{19}$$

Для выполнения соотношений (18) и (19) достаточно, чтобы соотношения взаимности (16) были справедливы хотя бы для одного набора углов. В частности, для случая, который здесь рассматривается, набор подобных углов можно взять из равенства $\cos\vartheta=\cos\vartheta'$. При таком выборе углов, как следует из (13) и (16), выполняются соотношения

$$D_{12}^{lp}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi')=D_{21}^{lp}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi');\quad D_{34}^{lp}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi')=-D_{43}^{lp}(\vartheta,\varphi;\vartheta',\varphi').$$

Отмеченная взаимосвязь между углами ϑ и ϑ' тождественно выполняется в случае рассеяния света бесконечно длинным цилиндром, и это приводит к известной структурной форме матрицы рассеяния [4]:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11}, & D_{12}, & D_{13}, & D_{14} \\ D_{12}, & D_{22}, & D_{23}, & D_{24} \\ -D_{13}, & -D_{23}, & D_{33}, & D_{34} \\ D_{14}, & D_{24}, & -D_{34}, & D_{44} \end{pmatrix},$$

причем, как было показано, элемент D_{14} обращается в нуль.

Требования выполнения теоремы взаимности для любого направления эквивалентны шаровой симметрии частицы. При этом, как следует из (10), коэффициенты разложения $c^{mnl}{}_{ij}$ не должны зависеть от индекса m и должны отличаться от нуля лишь при $n=l$, т. е.

$$c_{ij}^{mnl} = c_{ij}^{n}\delta_{nl}. \qquad (20)$$

Если подставить (20) в (13) и учесть (19), то получим матрицу рассеяния для сферической частицы в виде разложения по обобщенным сферическим функциям, предложенного в [1, 6].

В заключение отметим, что нами рассмотрен только один частный случай симметрии рассеивающих частиц, но на основе введенных представлений радиационных характеристик можно проанализировать и другие ситуации.

1. *Бугаенко О. И.* Обобщенные сферические функции в задаче Ми // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1976.— **12**, № 6.— С. 603—611.
2. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента.— Л. : Наука, 1975.— 440 с.
3. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп.— М. : Наука, 1965.— 588 с.
4. *Кузьмин В. Н., Бабенко В. А., Лейко С. Т.* Рассеяние света системами сильно вытянутых частиц.— Минск, 1986.— 44 с.—(Препр. / Ин-т физики АН БССР; № 410).
5. *Розенберг Г. В.* Вектор-параметр Стокса // Успехи физ. наук.— 1955.— **41**, № 1.— С. 77—110.
6. *Domke H.* Fourier expansion of the phase matrix for Mie scattering // Z. Meteorol.— 1975.— **25**, N 6.— P. 357—361.
7. *Kuščer I., Ribarič M.* Matrix formalism in the theory of diffusion of light // Opt. acta.— 1959.— **6**, N 1.— P. 42—51.
8. *Sekera Z.* Scattering matrices and reciprocity relationships for various representations of the state polarization // J. Opt. Soc. Amer.— 1966.— **56**, N 12.— P. 1732—1740.

Ин-т физики АН БССР,
Минск

Поступила в редакцию 21.09.87,
после доработки 07.12.87