КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ том 4 № 5 1988

УДК 524.6—34

Интервальный метод оценивания параметров модели Галактики

С. А. Кутузов

Предлагается использовать интервалы как для наблюдательных оценок галактических параметров, так и для значений параметров конструируемой модели. Построение результирующих интервалов основано на вычислении параметров модели, наилучшим образом согласующихся с наблюдательными оценками. Метод применен для нахождения интервальной системы галактических параметров, а также для построения специальной модели крупномасштабного гравитационного поля Галактики.

AN INTERVAL METHOD FOR ESTIMATING THE GALACTIC MODEL PARAMETERS, by Kutuzov S. A.— Intervals are suggested to be used for observational estimates of Galactic parameters as well as for the values of the parameters of the model under construction. The construction of the resultant intervals is based on the calculation of the model parameters which are in the best agreement with the observational data. The method is applied to derive the interval system of Galactic parameters as well as to construct the special model of a large-scale gravitational field of the Galaxy.

Введение. Модель звездной системы может быть общей (абстрактной) или специальной [8]. В общей модели функции описания должны удовлетворять общим уравнениям (Пуассона, звездной гидродинамики, Больцмана и др. [10]). Локальные значения функций описания назовем галактическими параметрами (ГП). В специальной модели могут быть заданы дополнительные уравнения или выражения для функций описания, включающие параметры модели (ПМ).

Задача уравнивания ГП в общей модели решалась в [5, 13]. Задача уравнивания системы ГП и ПМ возникает, когда специальную модель необходимо сделать конкретной, т. е. численно оценить ПМ по наблюдательным данным.

Наблюдательные данные имеют значительную неопределенность, хотя и предпринимаются усилия по созданию согласованной системы ГП [23]. Многообразие данных и целей построения отображается в непрерывном увеличении количества моделей и их вариантов (например, [15, 18, 22]). Целью построения модели может быть наиболее полное представление сглаженной структуры Галактики и ее подсистем, отображение спиральной структуры, описание гравитационного поля и др. Очевидно, что нельзя построить универсальную модель Галактики, которая решила бы проблему раз и навсегда. Однако многовариантность фиксированного класса моделей, которая обусловлена многообразием данных, можно устранить путем ее развития. Мы предлагаем строить сразу бесконечное множество моделей, имеющее мощность континуума, т. е. одну такую модель, параметры которой заключены в определенных интервалах. Интервалы ПМ определяются принятыми интервалами ГП. Рассмотрим такое интервальное моделирование для системы околосолнечных ГП и для специальных моделей.

Построение интервальной системы галактических параметров. Обозначим вектор-столбец из k галактических параметров

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)^{\mathrm{T}} = (R_\odot, \omega, A, \ldots)^{\mathrm{T}}, \qquad (1)$$

где Т — символ транспонирования; $R_\odot$ — расстояние Солнца от центра Галактики; ω — околосолнечная круговая частота; A — параметр Оорта. Набор ГП от одной задачи к другой может изменяться. Он зависит от наличия соответствующих наблюдательных данных, а также от используемых уравнений связи. Целесообразно включать в систему такие ГП, для которых имеются независимые наблюдательные оценки.

Наблюдательные данные можно представить в виде интервалов ГП

$$\delta y_i = [y_i', y_i''], \quad i = \overline{1, k}, \tag{2}$$

в которые с вероятностью P_i попадают точные значения ГП. Из компонентов (2) составляем вектор-интервал $\delta\mathbf{y}$. Если события $y_i \in \delta y_i$ независимы, то вероятность события $\mathbf{y} \in \delta\mathbf{y}$ есть произведение $P = P_1 P_2 \ldots P_k$. Она быстро уменьшается с увеличением k. Чем шире интервалы, тем больше P. Однако чересчур широкие интервалы малоинформативны. Следует пользоваться по возможности более узкими интервалами, отражающими современный уровень знаний о ГП.

Пусть между ГП имеется l фундаментальных уравнений связи

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = 0; \qquad \mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_l)^{\mathrm{T}}, \quad l < k. \tag{3}$$

Из множества компонентов вектора $\mathbf{y}$ выберем $k-l$ параметров в качестве независимых элементов и образуем из них вектор элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-l})^{\mathrm{T}}$, которому соответствует вектор-интервал значений $\delta\mathbf{x}$. Выразим остальные ГП через элементы в виде параметрических фундаментальных уравнений [9]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Сюда включены тождества для самих элементов. Следует обеспечить однозначность функций (4) в области их определения $\delta\mathbf{x}$.

Далее отклоняемся от классического уравнивания по элементам [9]. Составим функционал

$$\chi(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{k} w_i\, [1 - f_i(\mathbf{x})/\bar{y}_i]^2, \quad \bar{y} = (y_i' + y_i'')/2, \tag{5}$$

в который входят относительные отклонения ГП, вычисленных по формулам (4), от центров $\bar{y}_i$ исходных интервалов и вектор весов $\mathbf{w}$ с компонентами w_i. Безразмерные веса целесообразно брать пропорциональными некоторой отрицательной степени длин интервалов

$$w_i = C_1\, |\bar{y}_i/(y_i'' - y_i')|^{\tau}. \tag{6}$$

Естественным значением может быть $\tau = 2$. Нормирующий коэффициент C_1 определяется так, чтобы сумма всех весов составляла единицу.

Безразмерный функционал (5) — мера близости элементов и вычисляемых по ним ГП к центрам принятых интервалов. Чтобы получить наилучшее в этом смысле решение, необходимо найти минимум функционала по $\mathbf{x}$ при ограничениях

$$\mathbf{x} \in \delta\mathbf{x}. \tag{7}$$

Это — задача нелинейного динамического программирования, для решения которой разработано множество алгоритмов [12]. Поскольку в функционал входят центры интервалов, то получаемое решение $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ будем называть центральным.

Далее исследуем влияние каждого из наблюдательных интервалов δy_j, $j = \overline{1, k}$ в отдельности. Выберем и зафиксируем индекс j. В j-м члене функционала (5) заменяем поочередно центр интервала $\bar{y}_j$ левым y'_j и правым y''_j концами и, каждый раз решая задачу минимизации, получаем векторы-интервалы решений

$$\delta\tilde{\mathbf{x}}_j = [\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}''_j], \quad \delta\tilde{\mathbf{y}}_j = [\mathbf{f}(\mathbf{x}'_j), \mathbf{f}(\mathbf{x}''_j)], \quad j = \overline{1, k}, \tag{8}$$

которые будем называть сепаратными. В (8) намеренно отказываемся от операций интервального анализа [2], так как в случае сложных выражений интервалы увеличиваются за пределы разумного.

Если решение $\tilde{\mathbf{y}}_j$ монотонно зависит от y_j, то $\delta\tilde{\mathbf{y}}_j$ является однозначным отображением δy_j, т. е. все решения для $y_j \in \delta y_j$ принадлежат $\delta\tilde{\mathbf{y}}_j$. Если же некоторые компоненты данного решения имеют экстремумы, то их интервалы следует расширить, заменив один из концов экстремальным значением. Чем у́же интервалы δy_j, тем вероятнее монотонность. Частичным контролем монотонности может быть вхождение центрального решения в сепаратный интервал.

За окончательные интервалы принимаем объединения сепаратных интервалов

$$\delta\tilde{\mathbf{x}} = \bigcup_{j=1}^{k} \delta\tilde{\mathbf{x}}_j, \quad \delta\tilde{\mathbf{y}} = \bigcup_{j=1}^{k} \delta\tilde{\mathbf{y}}_j. \tag{9}$$

Представляет интерес проверка включений

$$\delta\tilde{\mathbf{x}} \subset \delta\mathbf{x}, \quad \delta\tilde{\mathbf{y}} \subset \delta\mathbf{y} \tag{10}$$

и вхождения

$$\tilde{\mathbf{y}} \in \delta\mathbf{y}. \tag{11}$$

Первое включение (10) должно выполняться в силу ограничения (7). Если выполняется второе включение (10), то задача решена успешно и исходные интервалы (наблюдения) хорошо согласуются с уравнениями (теорией). Если же нет, то либо точные значения ГП в действительности не принадлежат интервалам (плохие наблюдения), либо уравнения неверно описывают Галактику (плохая теория), либо происходит и то и другое вместе. Ситуацию все же можно признать удовлетворительной, если выполняется вхождение (11), т. е. центральное решение не выходит из исходных интервалов ГП.

Многократной минимизации можно избежать, если, во-первых, функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ дифференцируема, и, во-вторых, решение $\mathbf{x}$ системы k—l уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{y_i^2} [y_i - f_i(\mathbf{x})] \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, k-l} \tag{12}$$

(представляющих необходимое условие минимума функционала) существует и удовлетворяет условию (7) при $\mathbf{y} \in \delta\mathbf{y}$.

Для примера выполнено интервальное оценивание системы девяти околосолнечных ГП — $R_\odot$, ω, V, A, C, Q, ν, k_θ, k_z (V — круговая скорость; C — параметр Кузмина; ν — плотность масс):

$$V^2 = -R_\odot \left[\frac{d\Phi(R, 0)}{dR}\right]_{R=R_\odot}; \quad C^2 = -\left[\frac{\partial^2\Phi(R_\odot, z)}{\partial z^2}\right]_{z=0}; \tag{13}$$

$$Q = -\frac{1}{2}\left[\frac{d\Omega(s)}{ds}\right]_{s=1}; \quad s = R/R_\odot; \quad \Omega(s) = R_\odot[\omega(s) - \omega]; \tag{14}$$

$$k_\theta = \sigma_\theta^2/\sigma_R^2; \quad k_z = \sigma_z^2/\sigma_R^2, \tag{15}$$

где $\Phi(R, z)$ — гравитационный потенциал; $\Omega(s)$ — функция Камма; σ_R, σ_θ, σ_z — дисперсии скоростей плоских подсистем, соответствующие цилиндрическим координатам R, θ, z.

Использовались пять уравнений связи (они же применялись в [13]). Выбрав в качестве элементов $R_\odot$, ω, A, C, запишем

$$V = \omega R_\odot; \qquad Q = AR_\odot; \qquad 4\pi G\nu = C^2 + 2\omega^2 - 4A\omega;$$

$$k_\theta = 1 - A/\omega; \qquad k_z = 1 - \omega/(2\omega - A). \tag{16}$$

Первые два соотношения — следствия определений, третье — уравнение Пуассона (G — гравитационная постоянная). Выражение для k_θ — формула Линдблада, а для k_z — формула Кузмина [3] в теории иррегулярных сил, хорошо удовлетворяющая наблюдательным оценкам. Данную модель можно считать общей [8].

Таблица 1. **Интервальная система галактических параметров**

Галактический параметр	Исходный интервал	Вес	Центральное решение	Объединенный интервал
$R_\odot$, кпк	[7.5, 9.5]	0.108	8.5	[8.0, 8.9]
ω, км·с$^{-1}$·кпк$^{-1}$	[24, 28]	0.254	25.5	[24.5, 26.7]
A, км·с$^{-1}$·кпк$^{-1}$	[12.1, 16.1]	0.075	14.9	[14.1, 15.4]
C, км·с$^{-1}$·кпк$^{-1}$	[65, 85]	0.084	78	[71, 83]
V, км/с	[200, 240]	0.182	217	[205, 227]
Q, км/с	[105, 140]	0.074	127	[119, 132]
ν, $M_\odot$/пк^3	[0.09, 0.15]	0.024	0.110	[0.091, 0.124]
k_θ	[0.37, 0.49]	0.077	0.42	[0.38, 0.44]
k_z	[0.24, 0.30]	0.122	0.29	[0.28, 0.30]

В табл. 1 приведены выбранный исходный интервал, вес, центральное решение и объединенный интервал. Сводки оценок основных ГП за последние годы даны в работе [20]. Принятые интервалы по $R_\odot$, ω, A, V, Q, ν, k_θ включают от 59 до 89 % этих оценок. Интервалы C и k_z основаны на данных [1, 19] и [13] соответственно. В формуле (6) принималось $\tau=2$. Ограничения (7) сняты заменой переменных: $x_i = x'_i + (x''_i - x'_i) z^2_i (1+z^2_i)^{-1}$. Для минимизации функционала использовался метод Хука и Дживса [12], в котором не требуется вычислять производные функционала. Центральное решение входит в объединенные интервалы, а последние включаются в исходные. Таким образом, согласие исходных наблюдательных интервалов с общей моделью хорошее.

Построение интервальной системы параметров модели. Эта задача сходна с предыдущей, однако есть два существенных различия. Во-первых, кроме оценок локальных (по существу) ГП, можно использовать оценки отдельных функций описания в некотором диапазоне их аргументов. Сюда относятся функция Камма, ход звездной плотности с расстоянием в определенных направлениях, для других галактик — распределение поверхностной яркости, поле скоростей звезд и дисперсий скоростей. Во-вторых, не для всех ПМ существуют ограничения типа (7). Обычно ограничения на ПМ — весьма широкого характера, так как вытекают из критериев физической корректности (неотрицательности плотности масс, конечности массы и др.).

Пусть модель имеет n параметров, которые образуют вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$. Считаем, что модель дает выражения для k галактических параметров:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{R}), \quad y_i = g_i(\mathbf{p}, \mathbf{r}_i), \quad i = \overline{1, k}, \tag{17}$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки, к которой относится ГП; $\mathbf{R}$ — матрица $k\times 3$, строки которой образуют $\mathbf{r}^T_i$. Для околосолнечных параметров в галактоцентрической системе координат $\mathbf{r}_i=(R_\odot,\ 0,\ 0)^T$. Далее ограничимся использованием функции Камма (14). Описываемый алгоритм легко обобщается на большее количество функций. Пусть модель дает для функции Камма некоторое выражение

$$\Omega(s)=g_{k+1}(\mathbf{p},s),\quad s=R/R_\odot, \tag{18}$$

а из наблюдений известны интервалы $\delta\Omega(s)$ в диапазоне аргумента $[a,\ b]$. При заданном $\mathbf{p}$ значение (18) в общем случае отклоняется от центра интервала $\overline{\Omega}(s)$. Составим функционал, который отличается от функционала (5) добавлением интегральных членов для каждой из используемых функций:

$$\psi(\mathbf{p};\ \overline{\mathbf{y}},\mathbf{W},\Omega)=W_1\sum_{i=1}^{k} w_i\,[1-g_i(\mathbf{p},\mathbf{r}_i)/\overline{y}_i]^2+$$
$$+\frac{W_2}{b-a}\int_a^b w(s)\,[1-g_{k+1}(\mathbf{p},\ s)/\overline{\Omega}(s)]^2ds. \tag{19}$$

Групповые веса W_1, W_2 назначаются так, чтобы их сумма составляла единицу. Здесь $\overline{\mathbf{y}}$ — вектор центров интервалов ГП, определяемый по (2) и (5), веса в сумме задаются согласно (6), $w(s)$ — некоторая весовая функция. Второй член функционала — это средневзвешенное в диапазоне $[a,\ b]$ относительное отклонение модельных значений функции от центров ее наблюдательных интервалов. Зададим m интервалов $\delta\Omega(s_j)$ в точках $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$ (вообще неравноотстоящих) и применим для вычисления интеграла формулу трапеций с коэффициентами Ньютона—Котеса

$$c_j=(s_{j+1}-s_{j-1})/[2(b-a)],\quad j=\overline{1,m},\quad s_0=s_1,\quad s_{m+1}=s_m,\quad \sum_{j=1}^{m}c_j=1. \tag{20}$$

Значения весовой функции в этих точках вычисляем аналогично (6):

$$w(s_j)=C_2\,[\,|\overline{\Omega}(s_j)|/|\,\delta\Omega(s_j)\,|]^\tau. \tag{21}$$

В знаменателе находится длина интервала, нормирующий множитель определяется из условия

$$\sum_{j=1}^{m}c_jw(s_j)=1. \tag{22}$$

В результате получаем функционал

$$\psi(\mathbf{p};\ \overline{\mathbf{y}},\mathbf{W},\Omega)=W_1\sum_{i=1}^{k}w_i\,[1-g_i(\mathbf{p},\mathbf{r}_i)/\overline{y}_i]^2+$$
$$+W_2\sum_{i=k+1}^{k+m}w_i\,[1-g_{k+1}(\mathbf{p},\ s_{i-k})/\overline{\Omega}(s_{i-k})]^2;$$
$$w_i=c_{i-k}w(s_{i-k}),\quad i=\overline{k+1,\ k+m}. \tag{23}$$

Вектор весов $\mathbf{W}$ имеет компоненты: $w_1,\ \ldots,\ w_{k+m},\ W_1,\ W_2$. Данный функционал отличается от предыдущего на величину погрешности квадратурной формулы, что не имеет принципиального значения.

Функционалы (19) и (23) являются мерами согласия модельных значений ГП и функции Камма с центрами соответствующих наблюдательных интервалов. Так как они безразмерные и имеют нормированные веса, то их можно использовать для сравнения различных моделей с наблюдательными данными. Минимизируя функционал по вектору р при имеющихся ограничениях на ПМ, получаем центральное решение $\tilde{\mathbf{p}}$. Ему, по выражениям (17) и (18), соответствуют модельные значения $\tilde{\mathbf{y}}$, $\tilde{\Omega}(s)$. Далее исследуем влияние каждого из наблюдательных интервалов δy_j, $j=\overline{1,\ k}$ в отдельности, а также влияние совокупности интервалов $\delta\Omega(s_{j-k})$, $j=\overline{k+1,\ k+m}$. По определению, функция Камма должна проходить через точку (1, 0) (положительная слева и отрицательная справа от нее). В формуле (23) заменяем $\tilde{\Omega}(s_{i-k})$ левыми концами интервалов функции одновременно для всех аргументов, меньших единицы, и правыми концами для остальных аргументов, а затем — наоборот. Минимизируя каждый раз функционал, получаем сепаратные интервалы ПМ, по которым вычисляем с помощью (17) и (18) сепаратные интервалы ГП и функции Камма. Окончательные интервалы находим как их объединения

$$\delta\tilde{\mathbf{p}} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \delta\tilde{\mathbf{p}}_j; \qquad \delta\tilde{\mathbf{y}} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \delta\tilde{\mathbf{y}}_j; \qquad \delta\tilde{\Omega}(s) = \bigcup_{j=1}^{k+1} \delta\tilde{\Omega}(s)_j. \tag{24}$$

Проверим включение и вхождение

$$\delta\tilde{\mathbf{y}} \subset \delta\mathbf{y}, \quad \tilde{\mathbf{y}} \in \delta\mathbf{y}, \tag{25}$$

подразумевая переобозначение $y_{k+j} = \Omega(s_j)$, $j = \overline{1, m}$. Предлагаем следующий критерий качества модели. Если модельные интервалы ГП включаются в исходные, то модель хорошая. При этом модель тем лучше, чем сильнее сужаются по сравнению с исходными окончательные интервалы, которые по существу являются отображением исходных посредством модели и алгоритма определения ПМ. Если включение отсутствует, но каждый модельный интервал перекрывается с исходным, т. е.

$$\delta\tilde{y}_i \cap \delta y_i \neq \varnothing, \quad i = \overline{1, k+m}, \tag{26}$$

то при наличии сжатия интервалов модель можно считать удовлетворительной. Удовлетворительной считаем модель и тогда, когда вычисленные по центральному решению модельные ГП попадают в исходные интервалы. В остальных случаях модель неудовлетворительная.

Значительное увеличение интервалов может свидетельствовать о некорректности данной задачи, являющейся обратной. В принципе уже при минимизации можно на р накладывать неявное ограничение вида включения или хотя бы вхождения (25), но это сильно усложнит задачу. Здесь также возможен (в случае дифференцируемости g по р) переход к уравнениям вида (12) с заменой f_i на g_i, однако выражения для g_i (а тем более производных g_i) в сложных моделях гораздо более громоздки, чем для f_i.

Оценивание ПМ по наилучшему согласию с наблюдательными данными становится тенденцией. Так, в [15] минимизируется взвешенная сумма абсолютных отклонений с размерными весами, в [18] вводятся уже относительные отклонения, в [11] задача дополняется ограничениями на ГП.

Для примера мы определили интервальную систему параметров частного случая ($\gamma=0$, $\varkappa=1$) модели [6]. Цель построения данной модели — дать относительно простое выражение для гравитационного потенциала, позволяющее исследовать орбиты звезд и скоплений [7]. Потенциал зависит от одного аргумента ξ, являющегося функцией безразмерных цилиндрических координат ρ и ζ:

$$\Phi(R, z) = \alpha\Phi_0 (\alpha - 1 + \sqrt{1 + \xi^2})^{-1}; \tag{27}$$

$$\xi^2 = (1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \zeta})^2 + \rho^2 - 1; \qquad \rho = R/r_0; \qquad \zeta = z/r_0. \tag{28}$$

Модель содержит два масштабных параметра r_0, Φ_0 и два структурных ε, α. Для связи с околосолнечными ГП в число ПМ необходимо включить и безразмерное расстояние Солнца от центра Галактики $\rho_{\odot}$. В плоскости симметрии $\zeta = 0$ имеем потенциал Кузмина—Маласидзе [4]. Модель [21] получается как частный случай при $\alpha = 1$. При малом ε выделяется дискообразная составляющая, погруженная в гало.

Таблица 2. **Модельные интервалы галактических параметров**

Галактический параметр	Исходный интервал	Вес	Центральное решение	Объединенный интервал
$R_{\odot}$, кпк	[7.5, 9.5]	0.095	8.4	[7.6, 8.9]
V, км/с	[200, 240]	0.158	222	[208, 234]
U, км/с	[400, 600]	0.033	410	[362, 454]
A, км·с$^{-1}$·кпк$^{-1}$	[12.1, 16.1]	0.065	14.1	[12.7, 15.0]
C, км·с$^{-1}$·кпк$^{-1}$	[65, 85]	0.074	72	[64, 79]
D, кпк$^{-2}$	[16.5, 21.5]	0.076	19.2	[16.7, 21.7]
Ω (0.4), км/с	[248, 318]	0.103	272	[214, 329]
Ω (0.6), км/с	[123, 173]	0.111	142	[112, 166]
Ω (0.8), км/с	[45, 85]	0.033	57	[46, 65]
Ω (1.0), км/с	[—15, 15]	0	0	[0, 0]
Ω (1.2), км/с	[—64, —28]	0.021	—40	[—45, —34]
Ω (1.4), км/с	[—80, —50]	0.059	—69	[—77, —59]
Ω (1.6), км/с	[—100, —70]	0.102	—92	[—101, —79]
Ω (1.8), км/с	[—115, —85]	0.070	—109	[—120, —94]

В качестве ГП принимаем шесть околосолнечных ($R_{\odot}$, V, U, A, C, D) и восемь равноотстоящих в диапазоне $s \in [0.4, 1.8]$ значений функции Камма. Здесь

$$U = \sqrt{2\Phi(R_{\odot}, 0)}; \qquad D = -\left[\frac{\partial \ln \nu (R_{\odot}, z)}{\partial (z^2)}\right]_{z=0}; \tag{29}$$

U—скорость освобождения; D — параметр кривизны спада плотности в z-направлении. Привлекая еще параметр Оорта B, можно записать уравнение Пуассона в z-окрестности Солнца в виде

$$4\pi G\nu (R_{\odot}, z) = [C^2 - 2(A^2 - B^2)] (1 - Dz^2 + \ldots). \tag{30}$$

Набор околосолнечных ГП отличается от рассмотренной выше системы (его выбор вообще неоднозначен). Дисперсии скоростей исключаются из-за отсутствия выражений для них, поскольку модель не гидродинамическая. Так как в специальной модели уравнения связи, вытекающие из определений, удовлетворяются автоматически, то нет смысла использовать ω, Q, ν (что было бы равносильно увеличению весов $R_{\odot}$, V, A, C).

В табл. 2 приведены исходные интервалы для ГП и функции Камма. Интервалы для $R_{\odot}$, V, A, C взяты из табл. 1. Для интервала U учитываются оценки из [14, 15]. Параметр D по модели [17] получается равным 18 кпк$^{-2}$. Нахождение оценок D непосредственно по наблюдательным данным требует специальных предположений. Центры интервалов функции Камма соответствуют данным [16]. При минимизации ограничения снимались заменой переменных и применялся метод Хука и Дживса [12]. Рассчитывались варианты с групповым весом околосолнечных параметров $W_1 = 0.1$, 0.5, 0.9 (соответственно вес функции Камма $W_2=0.9$, 0.5, 0.1). При переходе от одного варианта к другому увеличиваются значения центрального решения для V, U (остальные ГП изменяются незначительно) и массы модели. Максимум круговой скорости, увеличиваясь по значению, удаляется от центра модели и достигает в последнем варианте солнечного расстояния. В табл. 2 даны результирующие веса (произведения группового и индивидуальных весов, вычисленных с $\tau=2$), центральные решения и объединенные интервалы для второго варианта. Объединенные интервалы для U, C, D и четырех крайних значений Ω не удовлетворяют включению (25). Однако все центральные решения попадают в исходные интервалы, так что по нашему критерию модель следует признать удовлетворительной. Значение функционала (23) для центрального решения $\omega=0.0038$. Заметим, что использованным в [7] значениям ПМ соответствует $\psi=0.1065$, а найденным в [11] — $\psi=0.0189$ и $\psi=3.94$ для первого и второго вариантов соответственно. Центральное решение дает следующие значения ПМ: $r_0=2.05$ кпк, $\Phi_0=1.60\cdot10^5$ км^2/с^2, $\varepsilon=$ $=0.14$, $\rho_\odot=4.1$, $\alpha=3.5$. Объединенным интервалам ПМ соответствует интервал массы модели $[1.9, 4.1]\cdot10^{11}$ $M_\odot$.

Заключение. Изложенный метод интервального оценивания параметров модели позволяет охватить сразу большинство наблюдательных оценок (а при желании — все) и построить одновременно несчетное множество моделей. Его математическая сложность — одного порядка с методом наименьших квадратов. Однако он уступает последнему в вероятностной интерпретации. Для построения модели достаточно задать исходные интервалы ГП и функций описания, а также групповые веса. Снят вопрос о том, сколько оценок функций описания следует использовать. Это число произвольно, чем оно больше, тем лучше (точнее квадратурная формула).

Исходные интервалы не определяются однозначно, но по мере уточнения наблюдательных данных они должны все более сужаться. Это будет означать все более суровые требования к моделям, и все большее их число будет попадать в разряд неудовлетворительных.

При демонстрации применения метода здесь не использовалась функция Камма во внутренней области. Соответствующую двугорбую кривую вращения можно аппроксимировать с помощью составной модели, которая будет описана в другой работе.

Автор признателен Л. П. Осипкову за ценные советы и замечания, участникам семинара К. Ф. Огородникова за обсужде~~ние работы~~, Т. И. Вавиловой за составление и отладку двух подпрограмм по минимизации функционала методом Хука и Дживса.

1. *Йыеввэр М.* Строение подсистемы долгопериодических цефеид в галактовертикальном направлении // Tartu Astron. Observ. Teated.— 1984.— № 46.— P. 18—33.
2. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа.— М. : Наука, 1986.—217 с.
3. *Кузмин Г. Г.* Об изменении дисперсии скоростей звезд // Публ. Тарт. астрон. обсерватории.— 1961.—33, № 5/6.— С. 351—370.
4. *Кузмин Г. Г., Маласидзе Г. А.* Об одной форме гравитационного потенциала, допускающей решение задачи о плоских орбитах звезд в эллиптических интегралах // Там же.— 1969.—38.— С. 181—250.
5. *Кутузов С. А.* Уравнения для определения системы околосолнечных галактических параметров // Сообщ. Тарт. астрон. обсерватории.— 1964.— № 9.— С. 1—24.
6. *Кутузов С. А., Осипков Л. П.* Моделирование пространственного гравитационного потенциала звездных систем // Астрон. журн.— 1980.—57, вып. 1.— С. 28—37.
7. *Кутузов С. А., Осипков Л. П.* Методы расчета галактических орбит звездных скоплений // Движения искусственных и естественных небесных тел.— Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1981.— С. 46—62.
8. *Кутузов С. А., Эйнасто Я.* О построении моделей звездных систем. I. К классификации моделей // Публ. Тарт. астрофиз. обсерватории.— 1967.—36, № 5/6.— С. 341—356.
9. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.— М. : Физматгиз, 1962.—352 с.

10. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем.— М. : Физматгиз, 1958.—636 с.
11. *Рязанов А. П.* Определение параметров модели Галактики по данным радионаблюдений нейтрального водорода // Астрон. циркуляр.— 1983.— № 1276.— С. 1—4.
12. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М. : Мир, 1975.— 536 с.
13. *Эйнасто Я., Кутузов С. А.* Предварительная система околосолнечных галактических параметров // Сообщ. Тарт. астрон. обсерватории.— 1964.— № 10.— С. 1—10.
14. *Alexander J. B.* The velocity of escape from the Galaxy in the solar neighbourhood // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.— 1982.—**201**, N 2.— P. 579—594.
15. *Caldwell J. A. R., Ostriker J. P.* The mass distribution within our Galaxy: a three component model // Astrophys. J.— 1981.—**251**, N 1.— P. 61—87.
16. *Clemens D. P.* Massachusetts — Stony Brook galactic plane CO survey: the galactic disk rotation curve // Ibid.— 1985.—**295**, N 2.— P. 422—436.
17. *Einasto J., Jõeveer M., Kaasik A.* The mass of the Galaxy // Tartu Astron. Observ. Teated.— 1976.— N 54.— P. 3—75.
18. *Haud U., Einasto J.* A galactic mass model with massive corona.— Tartu, 1986.— 40 p.— (Prepr. / Tartu Astrofüüs. Observ.; A10).
19. *Jõeveer M., Einasto J.* Galactic mass density in the vicinity of the Sun // Tartu Astron. Observ. Teated.— 1976.— N 54.— P. 77—92.
20. *Kerr F. J., Lynden-Bell D.* Review of galactic constants // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.— 1986.—**221**, N 4.— P. 1023—1038.
21. *Miyamoto M., Nagai R.* Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies // Publs Astron. Soc. Jap.— 1975.—**27**, N 4.— P. 533—543.
22. *Perek L.* Distribution of mass in oblate stellar systems // Adv. Astron. and Astrophys.— 1962.—1.— P. 165—287.
23. *Wielen R.* Structure and dynamics of the galactic system. Report 1981—1984 // Astron. Rechen-Inst. Heidelb. Mitt. Ser. A.— 1986.— N 176.— P. 1—127.

Ленингр. ун-т им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 30.06.87,
после доработки 03.12.87

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 521.937

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ ПО АСТРОМЕТРИЧЕСКИМ НАБЛЮДЕНИЯМ НА СТАНЦИЯХ ЕВРОАЗИАТСКОГО РЕГИОНА В 1978.0—1984.0/

Корсунь А. А., Чолий В. Я.

(Рукопись деп. в ВИНИТИ; № 4399-В88)

На основании наблюдений времени и широты, выполненных в 1978.0—1984.0 на 22 инструментах, расположенных в евроазиатском регионе, получены 5-суточные значения параметров вращения Земли в региональной астрономической системе земных координат, задаваемой положениями станций наблюдений и обозначенной нами SSC(GAOUA)87A06.