КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ ТОМ 4 N 2 1988

УДК 521.28:519.281.2

Об одном способе обработки наблюдений звезд на равных высотах

Л. Я. Халявина, А. В. Гожий

Для обработки наблюдений звезд на равных высотах применен малоизвестный в кругу астрометристов алгоритм Чебышева — Немчинова. Он позволяет включать в рассмотрение дополнительные неизвестные без пересоставления системы нормальных уравнений и без полного повторения ее решения, допускает получение различных статистических характеристик. Алгоритм может быть полезен при решении тех астрометрических задач, в которых число определяемых неизвестных может меняться по ходу решения.

ON A METHOD OF THE REDUCTION OF EQUAL ALTITUDE OBSERVATIONS, by Khalyavina L. Ya., Gozhij A. V. — For reduction of equal altitude observations the Chebyshev — Nemchinov algorithm was used. It allows adding or excluding unknowns without the reiteration of the system of normal equations and without complete repetition of its solutions. Besides, the algorithm gives opportunity to obtain a lot of statistic parameters. The algorithm can be useful for solving those astrometric problems in which the number of unknowns may change during the calculation process.

Вводные замечания. Чаще всего из наблюдений звезд на равных высотах определяют поправки времени Δu, широты $\Delta\varphi$ и зенитного расстояния Δz. В тех случаях, когда необходимо учесть изменение положения альмукантарата наблюдений по тем же наблюдениям определяют дополнительно $\Delta\dot{z}$ или $\Delta\dot{z}$, $\Delta\dot{\varphi}$, $\Delta\dot{u}$. Для случая определения шести неизвестных исходные уравнения погрешностей имеют следующий вид:

$$\Delta u \sin A_i + \Delta\varphi \cos A_i - \Delta z + \Delta\dot{z}\Delta T_i + \\ + \Delta\dot{u} \sin A_i \Delta T_i + \Delta\dot{\varphi} \cos A_i \Delta T_i + l_i = v_i, \tag{1}$$

где A_i — азимут i-й звезды; l_i — свободный член; v_i — случайная погрешность наблюдений; ΔT_i — разность моментов времени наблюдений i-й звезды и некоторого условного момента T_0, к которому приводятся наблюдения всех звезд серии (например, $T_0 = \sum_{i=1}^{n} T_i/n$).

Величины $\Delta\dot{u}$ и $\Delta\dot{\varphi}$ характеризуют изменения положения альмукантарата наблюдений в плоскости первого вертикала и в плоскости меридиана, обусловленные прежде всего возможными аномальными смещениями рефракционного зенита и аномальным распределением случайных погрешностей наблюдений по азимутам, поскольку действительные изменения астрономического времени и широты на протяжении нескольких часов наблюдений весьма малы. Величина $\Delta\dot{z}$ характеризует изменения зенитного расстояния альмукантарата на протяжении наблюдений, обусловленные в основном изменением инструментального зенитного расстояния, неточным учетом нормальной рефракции и т. п.

Решение системы уравнений (1) с тремя, четырьмя и шестью неизвестными по схеме Гаусса — Дуллитля требует составления в каждом случае системы нормальных уравнений и повторного их решения. Кроме того, необходимы дополнительные вычисления для получения разных критериев и характеристик, описывающих всю совокупность определяемых неизвестных и каждое неизвестное в отдельности.

Для сокращения объема вычислений предлагается решать системы уравнений типа (1) с тремя, четырьмя и шестью неизвестными способом наименьших квадратов в полиномах Чебышева [6]. Удобные схемы решения систем линейных уравнений в полиномах Чебышева разработаны в [4]. Поскольку методика обработки экспериментальных данных способом наименьших квадратов в полиномах Чебышева, разработанная В. С. Немчиновым, малоизвестна широкому кругу астрометристов, а необходимость в определении переменного числа неизвестных на основе одних и тех же исходных данных может возникнуть и при решении других астрометрических задач, мы посчитали целесообразным остановиться на особенностях указанного алгоритма. При изложении будем придерживаться обозначений, принятых в [2, 4], а для матричных операций воспользуемся выкладками [7].

Основные принципы построения системы полиномов Чебышева для системы независимых переменных, заданных на дискретном множестве. Запишем исходную систему уравнений в виде

$$\underset{nm}{\mathbf{X}}\ \underset{m1}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{n1}{\mathbf{Y}}\,, \tag{2}$$

где $\underset{nm}{\mathbf{X}}$ — $(n \times m)$-мерная матрица коэффициентов исходной системы; $\underset{m1}{\boldsymbol{\beta}}$ — m-мерный вектор неизвестных, подлежащих определению; $\underset{n1}{\mathbf{Y}}$ — вектор значений функции, определяемой из наблюдений.

Рассмотрим коэффициенты при неизвестных заданной линейной системы (2) как значения некоторых независимых переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m$, заданных в n точках. Тогда для множества значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно построить систему полиномов Чебышева $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, исходя из основных свойств: *1* — $\psi_1 = x_1$ (чаще всего $x_1 = 1$); *2* — каждый последующий полином связан с предыдущими простой рекуррентной формулой

$$\psi_i = x_i - \sum_{p=1}^{i-1} t_{ip}\psi_p; \tag{3}$$

3 — система полиномов Чебышева $\{\psi_k\}^m$ ортогональна на заданном множестве значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$S(\psi_p\psi_k) = 0. \tag{4}$$

Левая часть соотношения (4) представляет собой сумму произведений соответствующих полиномов для всех точек заданного множества исходных переменных $\{x_k\}^m$, а коэффициенты t_{ip} в выражении (3) определяются из условия ортогональности (4).

Соотношение (3) определяет T-систему полиномов Чебышева, в которой каждый последующий полином выражен линейно через предыдущие. Если же произвести последовательную подстановку в (3) исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то получим K-систему полиномов Чебышева, в которой каждый i-й полином представлен как линейная комбинация переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i$, так что можно выразить полином ψ_i через исходные переменные следующим образом:

$$\psi_i = \underset{1m}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\ \underset{m1}{\mathbf{k}_i}\,, \tag{5}$$

где $\underset{m1}{\mathbf{k}_i}$ — вектор-столбец коэффициентов i-го полинома Чебышева K-системы.

Совокупность полиномов Чебышева как функций от m исходных переменных выражается, согласно (5), так:

$$\underset{1m}{\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}} = \underset{1m}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\ \underset{mm}{\mathbf{T}}\,, \tag{6}$$

где

$$\underset{mm}{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} 1 & -k_{12} & \cdots & -k_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & -k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Форма связи переменных ψ и исходных переменных x, выраженная соотношением (6), показывает, что каждому набору i исходных переменных соответствует ортогональная система i полиномов Чебышева $\{\psi_k\}^i$, определяемая элементами верхней подматрицы $\underset{ii}{\mathbf{T}}$ i-го порядка матрицы $\underset{mm}{\mathbf{T}}$.

Для каждого набора значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно вычислить значения полиномов $\{\psi_k\}^m$ и записать их в виде матрицы

$$\underset{nm}{\mathbf{\Psi}} = \begin{vmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & & \psi_m^{(1)} \\ \psi_1^{(2)} & \psi_2^{(2)} & & \psi_m^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & & \psi_m^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где верхний индекс соответствует номеру набора переменных $\{x_k\}^m$.

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ представляют собой коэффициенты уравнений системы (4), поэтому матрица $\mathbf{\Psi}$ связана с исходной матрицей $\mathbf{X}$ соотношением

$$\underset{nm}{\mathbf{\Psi}} = \underset{nm}{\mathbf{X}}\,\underset{mm}{\mathbf{T}}. \tag{9}$$

Кроме того, в силу ортогональности системы полиномов Чебышева выполняется равенство

$$\underset{mn\,nm}{\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}} = \begin{vmatrix} S(\psi_1^2) & 0 & & 0 \\ 0 & S(\psi_2^2) & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & S(\psi_m^2) \end{vmatrix} = \underset{mm}{\mathbf{D}}, \tag{10}$$

где $S(\psi_i^2)$ — сумма квадратов полинома ψ_i.

Решение системы уравнений способом наименьших квадратов в полиномах Чебышева. Для решения системы уравнений (2) в новых переменных — полиномах Чебышева — осуществим переход от исходных переменных x к новым переменным ψ

$$\underset{nm}{\mathbf{\Psi}}\,\underset{m1}{\alpha} = \underset{n1}{\mathbf{Y}}, \tag{11}$$

где α — совокупность новых неизвестных, а матрица $\mathbf{\Psi}$ связана с исходной матрицей $\mathbf{X}$ соотношением (9). Согласно (9) и (11), множество неизвестных β однозначно связано со значениями новых неизвестных α соотношением

$$\beta = \alpha\mathbf{T}. \tag{12}$$

На основании (9) легко получить необходимую для статистических оценок нешкалированную ковариационную матрицу

$$\mathbf{C} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Решение системы (11) способом наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\alpha = (\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi})^{-1}\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$$

или

$$\alpha_i = S(y\psi_i)/S(\psi_i^2). \tag{14}$$

Из (14) видно, что оценки наименьших квадратов для каждого α_i зависят только от соответствующего полинома ψ_i и не зависят от порядка системы.

Переход от неизвестных $\boldsymbol{\alpha}$ к искомым неизвестным $\boldsymbol{\beta}$ легко провести с помощью рекуррентных соотношений

$$\beta_i = \alpha_i; \qquad \underset{i'1}{\boldsymbol{\beta}^{(i)}} = \underset{i'1}{\boldsymbol{\beta}^{(i')}} + \alpha_i \underset{i'1}{\mathbf{k}_i}, \tag{15}$$

где $\underset{i'1}{\mathbf{k}_i}$ — ненулевая часть вектора коэффициентов i-го полинома Чебышева; $\underset{i'1}{\boldsymbol{\beta}^{(i')}}$ — совокупность значений неизвестных, являющихся решением системы (2) порядка $i'=i-1$. Таким образом, соотношение (15) позволяет осуществить переход от решения системы (2) порядка i' к решению системы на порядок выше. Кроме того, матрица $\underset{ii}{\mathbf{C}}$ связана с аналогичной матрицей $\underset{i'i'}{\mathbf{C}}$ для системы более низкого порядка следующим образом:

$$\underset{ii}{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} \underset{i'i'}{\mathbf{C}'} & \underset{i'1}{\mathbf{L}} \\ \underset{1i'}{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}} & c_{ii} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$c_{ii} = 1/S(\psi_i^2), \tag{17}$$

$$\underset{i'1}{\mathbf{L}} = c_{ii} \underset{i'1}{\mathbf{k}_i}, \tag{18}$$

$$\underset{i'i'}{\mathbf{C}'} = \underset{i'i'}{\mathbf{C}} + \underset{i'1}{\mathbf{L}} \underset{1i'}{\mathbf{k}_i^{\mathrm{T}}}. \tag{19}$$

Таким образом, имея систему полиномов Чебышева, определенных на дискретном множестве n значений независимых переменных $\{x_k\}^m$, мы можем последовательно получать решения системы (4) с $1, 2, \ldots, m$ неизвестными, а также нешкалированную ковариационную матрицу соответствующего порядка.

Преимущество способа наименьших квадратов в полиномах Чебышева состоит также в том, что остаточная сумма квадратов (RSS) легко определяется из соотношений

$$(RSS)_m = S(y^2) - \sum_{p=1}^{m} \alpha_p^2 S(\psi_p^2)$$

или

$$(RSS)_i = (RSS)_{i'} - \alpha_i^2 S(\psi_i^2). \tag{20}$$

Второе выражение (20) позволяет вычислить различие остаточных сумм квадратов, обусловленное введением дополнительного неизвестного; при этом не выполняется обычная процедура обратной подстановки неизвестных $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ в уравнения системы (2) для вычисления остаточных уклонений.

Алгоритм Немчинова и его особенности. Алгоритм Немчинова — одна из реализаций способа наименьших квадратов в полиномах Чебышева. В его основе лежит процедура последовательной ортогонализации, в процессе которой вычисляются элементы матриц **D** и **T**, полностью определяющих решение. Эта процедура описывается следующей совокупностью формул:

$$\psi_i = x_i^{(i')}, \quad (\psi_1 = x_1), \tag{21}$$

$$x_p^{(i)} = x_p^{(i')} - k_{ip}^{(i)}\psi_i, \quad (p > i), \tag{22}$$

$$k_{ip}^{(i)} = S(x_p\psi_i)/S(\psi_i^2), \tag{23}$$

$$S[(x_p^{(i)})^2] = S[(x_p^{(i')})^2] - k_{ip}^{(i)} S(x_p\psi_i), \tag{24}$$

$$S(x_p\psi_i) = S(x_p x_i) - \sum_{j=1}^{i'} k_{jp}^{(i')} S(x_j x_p), \tag{25}$$

$$\underset{mm}{\mathbf{T}^{(i)}} = \underset{mm}{\mathbf{T}^{(i')}} \mathbf{E}^{(i)} \, (\mathbf{T}^{(0)} = \underset{mm}{\mathrm{I}}), \tag{26}$$

где $i=1, \ldots, m$; $x_p^{(i)}$ — промежуточный полином относительно переменной x_p на i-м этапе ортогонализации, который вычисляется согласно рекуррентному соотношению (22) и ортогонален совокупности полиномов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i$. Он задается посредством суммы квадратов (24) и коэффициентов при переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Эти коэффициенты содержатся в p-м столбце матрицы $\underset{mm}{\mathbf{T}^{(i)}}$ (26). Матрица $\underset{mm}{\mathbf{E}^{(i)}}$ отличается от единичной тем, что в i-й строке для $p > i$ расположены коэффициенты $-k_{ip}^{(i)}$ (со знаком минус).

Наиболее распространенные статистические оценки можно получить по следующим формулам:

$$\sigma_q = \sqrt{(RSS)_i c_{qq}/(n-i)}, \tag{27}$$

$$F = \beta_q^2/\sigma_q^2, \tag{28}$$

$$F > F^{\lambda}_{1,n-i}, \tag{29}$$

где $\sigma_q (q=1, \ldots, i)$ — погрешности неизвестных; статистика F сравнивается с критерием достоверности Фишера $F^{\lambda}_{1,n-i}$ при $\lambda \times 100$ % уровне значимости с $(1, n-i)$ степенями свободы; c_{qq} — q-й диагональный элемент матрицы $\underset{ii}{\mathbf{C}}$.

Повторив процедуру ортогонализации вместе с процедурами вычисления матрицы $\mathbf{C}$ и статистического оценивания в соответствии с (27)—(29) m раз, получим m решений исходной системы (2) с 1, 2, ..., m неизвестными, из которых выберем те, которые нас интересуют.

Алгоритму Немчинова присущ ряд особенностей.

1. В нем в качестве исходных данных используются элементы матрицы нормальных уравнений $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$.

2. Применение процедуры последовательной ортогонализации к матрице нормальных уравнений расширенной системы $\underset{nm+1}{\mathbf{X}_1} = |\underset{nm}{\mathbf{X}}\ \underset{n1}{\mathbf{Y}}|$ позволяет на каждом i-м этапе получать решение $\underset{i1}{\boldsymbol{\beta}^{(i)}}$ исходной системы (2) соответствующего порядка как коэффициенты промежуточного полинома $x^{(i)}{}_{m+1}$, где $x_{m+1}=y$. Эти коэффициенты будут находиться в последнем столбце расширенной на порядок матрицы $\underset{m+1\, m+1}{\mathbf{T}^{(i)}}$. Остаточная сумма квадратов $(RSS)_i$ также совпадает с суммой квадратов промежуточного полинома $x^{(i)}{}_{m+1}$. Таким образом можно упростить программу вычислений.

3. В приведенном алгоритме предусмотрена возможность исключения любой переменной, оказавшейся недостаточно статистически обоснованной, что важно при решении задач регрессионного анализа. В основе процедуры исключения лежат такие соображения. Поскольку окончательное решение не должно зависеть от порядка следования переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то $\boldsymbol{\beta}$ и элементы матрицы $\mathbf{C}$ должны оставаться одинаковыми, но иметь лишь другие порядок в столбце $\boldsymbol{\beta}$ и положение в матрице $\mathbf{C}$. Тогда для исключения из решения системы (например, неизвестного β_p) необходимо, чтобы относящиеся к нему элементы вектора $\boldsymbol{\beta}$ и матрицы $\mathbf{C}$ оказались последними. На основании формул (15)—

(20) можно легко осуществить обратный переход от решения системы m-го порядка к решению системы порядка $m-1$. Таким же способом можно провести дальнейшее исключение других неизвестных.

Алгоритм Немчинова допускает включение в анализ новых неизвестных, что достигается незначительным изменением процедуры ортогонализации.

4. Приведенный алгоритм легко адаптируется для получения некоторых других статистических критериев и характеристик; например, v^2-критерия [1, 3], коэффициентов частной и множественной корреляции, коэффициента обусловленности исходной системы, который характеризует степень линейной зависимости изучаемых переменных и степень влияния случайных ошибок на решение. Алгоритм Немчинова легко приспособить также для задачи определения «наилучшей регрессии» [5].

Практическое применение алгоритма Чебышева — Немчинова при обработке наблюдений звезд на равных высотах с выделением трех, четырех и шести неизвестных подтвердило его высокую эффективность. Применение этого алгоритма будет полезным и при решении других астрометрических задач, в которых число определяемых неизвестных заранее не установлено и может изменяться по ходу решения.

1. *Зверев М. С., Курьянова А. Н., Положенцев Д. Д., Яцкив Я. С.* Сводный каталог фундаментальных слабых звезд со склонениями от +90° до —20° (ПФКСЗ-2).— Киев : Наук. думка, 1980.—108 с.
2. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи.— М. : Наука, 1973.—900 с.
3. *Курьянова А. Н., Кизюн Л. Н.* Опыт использования ортогональных полиномов для установления связи между измеренными и идеальными координатами // Кинематика и физика небес. тел.— 1985.—1, № 2.— С. 9—14.
4. *Немчинов В. С.* Полиномы Чебышева и математическая статистика // Избр. произведения: В 6 т.— М. : Наука, 1967.— Т. 1.— С. 182—299.
5. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ.— М. : Мир, 1980.—456 с.
6. *Чебышев П. Л.* Математический анализ // Полн. собр. соч.: В 5 т.— М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1947.— Т. 2.—520 с.
7. *Bjerhammar A.* Theory of errors and generalized matrix inverses.— Amsterdam etc.: Elsevier, 1973.—420 p.

Полтав. гравиметр. обсерватория
Ин-та геофизики им. С. И. Субботина АН УССР

Поступила в редакцию 23.02.87,
после доработки 02.07.87

РЕФЕРАТ ДЕПОНИРОВАННОЙ РУКОПИСИ

УДК 524.3—325.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ИСХОДНЫХ КАТАЛОГОВ СПЕЦИАЛЬНОГО СВОДНОГО КАТАЛОГА АБСОЛЮТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД / Рыбка С. П.

(Рукопись деп. в ВИНИТИ; № 8030-В87)

Проведено сравнение шести исходных каталогов, полученных по фотографической части плана КСЗ и составляющих основу создания специального сводного каталога абсолютных собственных движений звезд. Приводятся результаты определения систематических и случайных различий данных каталогов.