Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2010

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 621.3(075.8)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О Фурье-комбинированном сингуларисном разложении периодических несинусоидальных сигналов

Дано обгрунтування для Фур'є-комбінованого сингуларисного розкладання періодичних несинусоїдальних сигналів.

В работах [1, 2] представлены сингуларисные разложения скачкообразной функции $1(t) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{matrix} \right\}$ в виде

$$U1(t) = U\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right), \tag{1}$$

где α — коэффициент затухания; t — время; ω_k — круговая частота k-й гармоники; U_{a1} — амплитуда k-й гармоники; $U_{a1} = 1/\pi$, $U_{ak} = U_{a1}/k$, $k = \omega_k/\omega_1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = 1$, $n \approx 12$, и функции $U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ в виде

$$U_a \sin(\omega t \pm \varphi) = \pm U_a(1 - e^{-\alpha t})\sin(\omega t \pm \varphi) + U_a e^{-\alpha t}\sin(\pm\varphi)\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t, \tag{2}$$

где φ — угол сдвига.

В этих разложениях коэффициент α значительно больше коэффициента затухания электрической цепи с реактивными элементами. При $\alpha = \infty$ выражения (1) и (2) принимают вид $U1(t)$ и $U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ соответственно. При $t = \infty$ (установившийся режим функционирования системы) (1) = $U1(t)$ и (2) = $U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$.

Известно [3, 4], что периодические функции с периодом 2π, удовлетворяющие условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье. Так в работе [4] формулой (7.4) представлен следующий ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega t + \varphi_2) + \cdots = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s\sin(s\omega t + \varphi_s). \tag{3}$$

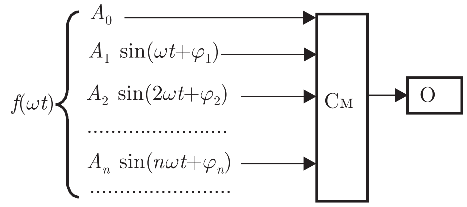

Рис. 1

В этой же работе приведены графики однополупериодных одно-, двух- и трехфазных импульсов на выходе выпрямителей.

Однополупериодные однофазные (полусинусоидальные) импульсы в Фурье-разложении имеют вид [4]

$$f_1(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right). \tag{4}$$

Зная [3], что $\cos x = \sin(\pi/2 - x) = -\sin(x - \pi/2)$, выражение (4) запишем в следующей форме:

$$f_1(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{1\cdot 3}\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3\cdot 5}\sin\left(4\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5\cdot 7}\sin\left(6\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots\right]. \tag{5}$$

Как видим, выражения (3) и (5) по форме подобны.

Далее сделаем акцент на выражении (3). Сигнал, записываемый в виде (3), представляет собой полигармонический сигнал с постоянной составляющей. Структурная схема этого сигнала изображена на рис. 1, где См — сумматор; О — объект (схема, цепь и т. д.), на который подается полигармонический сигнал (3). В работах [5, 6] представлено явление автоматической реструктуризации в электрических цепях с реактивными элементами и в механических колебательных системах при входных полигармонических напряжениях и силовых воздействиях соответственно, т. е. в этих объектах каждой входной гармонике соответствует свое реактивное сопротивление [7]. При линейности объекта действует принцип суперпозиции [2], а это значит, что каждая составляющая сигнала, описываемого выражением (3), вызывает в объекте соответствующие ей переходной и установившиеся процессы. Как видно из (3), при подаче сигнала (3) на объект в момент $t = 0$

$$f(0) = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin\varphi_s. \tag{6}$$

Сигнал, описываемый выражением (6), представляет собой комбинированный импульс, который можно записать в виде

$$f(0) = A_0 1(t) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s 1(t)\sin\varphi_s. \tag{7}$$

С учетом (7) Фурье-разложение (3) представим следующим соотношением:

$$f(\omega t) = A_0 1(t) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s 1(t)\sin(s\omega t + \varphi_s). \tag{8}$$

Из (8) видно, что к этому Фурье-разложению можно применить сингуларисные разложения (1) и (2) соответственно к $A_0 1(t)$ и к $\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s 1(t) \sin(s\omega t + \varphi_s)$. Тогда (8) с учетом (1) и (2) будет иметь вид

$$f(\omega t) = A_0 \left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \left[A_s (1 - e^{-\alpha t}) \sin(s\omega t + \varphi_s) + A_s e^{-\alpha t} \sin \varphi_s \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right]. \qquad (9)$$

В (9) сгруппируем однородные члены. Тогда (9) представим в виде

$$f(\omega t) = (1 - e^{-\alpha t}) \left[A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin(s\omega t + \varphi_s)\right] +$$
$$+ \left(e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t\right) \left(A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin \varphi_s\right). \qquad (10)$$

Выражения (9) приобретают Фурье-комбинированное сингуларисное разложение периодической несинусоидальной функции $f(\omega t)$. Такое название, считает автор, может войти в практику математического описания периодических несинусоидальных функций. Заметим, что при $\alpha = \infty$ $f(\omega t) = (3)$, при $t = 0$ $f(0) = (6)$, т. е. при принятых условиях выражение (9) соответствует (3).

Реакция объекта, например электрической цепи с реактивными элементами, на сигнал в виде (9) представляет собой комбинацию переходных и установившихся процессов от каждой s-й гармоники и от постоянного сигнала A_0, который также своими затухающими гармониками $e^{-\alpha t} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t$ вызывает в указанной электроцепи автоматическую реструктуризацию на время $t_p \approx 4{,}6 \dfrac{1}{\alpha}$. На подобные гармоники, имеющиеся в выражении $e^{-\alpha t} \sin \varphi_s \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t$, указанная цепь также автоматически реструктуризируется и в ней возникает на время $t_p \approx 4{,}6 \dfrac{1}{\tau}$ дополнительный (скоротечный) переходный процесс.

Таким образом, в работе представлено математическое описание нового разложения периодических несинусоидальных сигналов, названного автором Фурье-комбинированным сингуларисным разложением.

1. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электроцепях // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
2. *Божко А. Е.* О сингуларисном разложении скачкообразной функции // Там само. – 2008. – № 2. – С. 42–47.
3. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
4. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
5. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
6. *Божко А. Е.* Эффект автоматической реструктуризации механических систем, работающих в условиях действия полигармонических вибраций и ударов // Там само. – 2005. – № 1. – С. 47–49.

7. *Божко А. Е.* Об условных сопротивлениях электроцепей при полигармонических входных сигналах // Там само. – 2007. – № 2. – С. 87–95.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 01.04.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On a Fourier-combined singularisnal expansion of periodic nonsinusoidal signals

The substantiation of a Fourier-combined singularisnal expansion of periodic nonsinusoidal signals is given.