УДК 517.5

Член-корреспондент НАН Украины **В. П. Моторный, С. В. Гончаров, П. К. Нитиема**

О сходимости в среднем рядов Фурье–Якоби

Доведено збiжнiсть рядiв Фур'є–Якобi в просторах $L_{p,A,B}$ у випадку, коли константи Лебега необмеженi.

Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $(\alpha > -1, \beta > -1)$. Через $L_{p,A,B}$ обозначим пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f, для которых $fw^{1/p} \in L^p$, где весовая функция $w(x) = (1-x)^A(1+x)^B$, A, $B > -1$. Норма $\|f\|_{p,A,B} = \|fw^{1/p}\|_p$. Если $A = B = 0$, то $L_{p,0,0} = L_p$ и $\|f\|_{p,0,0} = \|f\|_p = \left\{\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,dx\right\}^{1/p}$.

Через $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ будем обозначать частную сумму порядка n ряда Фурье–Якоби функции $f \in L_{1,\alpha,\beta}$. Частные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ можно рассматривать как оператор, действующий в некотором подпространстве X пространства $L_{1,\alpha,\beta}$. Норма этого оператора

$$\|S_n^{\alpha,\beta}\|_X = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X$$

называется константой Лебега. В силу неравенства Лебега

$$\|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X \leqslant (1 + \|S_n^{\alpha,\beta}\|_X)E_n(f)_X, \tag{1}$$

где $E_n(f)_X$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве X. Ограниченность констант Лебега влечет за собой сходимость ряда Фурье–Якоби для любой функции в пространстве X, если в пространстве X имеет место теорема Вейерштрасса, а также определяет порядок сходимости частных сумм ряда Фурье–Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f в пространстве X. В работах Х. Полларда [1, 2], Дж. Неймана и У. Рудина [3], Г. Винга [4] и Б. Маккенхоупта [5] были выделены пространства интегрируемых с весом функций, в которых константы Лебега ограничены. Наиболее общий результат получен Б. Маккенхоуптом, и формулируется он следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для того чтобы $\|S_n^{\alpha,\beta}\|_{p,A,B}$ были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\left|\frac{\alpha+1}{2} - \frac{A}{p} - \frac{1}{p}\right| < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right), \tag{2}$$

$$\left|\frac{\beta+1}{2} - \frac{B}{p} - \frac{1}{p}\right| < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right). \tag{3}$$

В [6] показано, что для того чтобы каждая функция $f \in L_{p,A,B}$ имела ряд Фурье–Якоби, соответствующий весу ρ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\alpha+1}{2} - \frac{A+1}{p} > -\frac{\alpha+1}{2}, \qquad \frac{\beta+1}{2} - \frac{B+1}{p} > -\frac{\beta+1}{2}, \tag{4}$$

если $p > 1$, а при $p = 1$ в (4) знак $>$ следует заменить на $\geqslant$. Так как $A+1 > 0$ и $B+1 > 0$, то левые части неравенств (4) меньше соответственно $(\alpha+1)/2$ и $(\beta+1)/2$. Поэтому вопрос о сходимости рядов Фурье–Якоби в пространствах $L_{p,A,B}$ следует рассматривать в случаях

$$\left|\frac{\alpha+1}{2} - \frac{A+1}{p}\right| < \frac{\alpha+1}{2}, \qquad \left|\frac{\beta+1}{2} - \frac{B+1}{p}\right| < \frac{\beta+1}{2}. \tag{5}$$

Отметим, что если $\alpha, \beta \in (-1; -1/2]$ и $1 < p < \infty$, то в силу (5) условия (2), (3) заведомо имеют место. Поэтому оценку роста констант Лебега сумм Фурье–Якоби следует находить, когда $\max\{\alpha, \beta\} > -1/2$.

Первые работы, связанные с разложением функций по ортогональным на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическим многочленам, в основном посвящены многочленам Лежандра. Это прежде всего работы [1–4, 7, 8]. В работе [8] для оценки уклонения в пространстве $C_{[-1;1]}$ сумм Фурье–Лежандра от непрерывных или дифференцируемых функций была использована теорема Тимана об усилении теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами на отрезке. Исследование поведения констант Лебега и функций Лебега сумм Фурье–Якоби в пространстве $C_{[-1;1]}$ осуществлено в работах [9, 10], а также в других работах этих же авторов. В этом случае точные по порядку оценки приближений суммами Фурье–Якоби непосредственно следуют из неравенства Лебега (1). Как оказалось (см. [11–13]), в случае приближений суммами Фурье–Лежандра, когда $1 \leqslant p \leqslant 4/3$ и $p = 4$, неравенство Лебега приводит к грубым оценкам. Это можно объяснить тем, что с улучшением дифференциально-разностных свойств функции меньше влияет на порядок стремления к нулю величины $\|f - S_n^{0,0}(f)\|_{L_p}$ рост констант Лебега, соответствующих многочленам Лежандра. Для функций с достаточно хорошими дифференциально-разностными свойствами суммы Фурье–Лежандра осуществляют приближение в L_p, когда $1 < p \leqslant 4/3$, по порядку не хуже наилучшего. Этот результат был установлен с помощью обобщенных констант Лебега, которые были введены в [11, 12], если $1 \leqslant p \leqslant 4/3$ и $p \geqslant 4$, следующим образом:

$$D_{n,p,\theta}^{(0,0)} = \sup_{\|f/\sigma(n,\theta)\|_p \leqslant 1} \|S_n^{(0,0)}(f)\|_p,$$

где $\sigma(n,\theta,x) = (\sqrt{1-x^2} + 1/n)^\theta$, $\theta > 0$.

Позже в [10] в случаях $1 \leqslant p \leqslant 4/3$ и $p \geqslant 4$ исследовались обобщенные константы Лебега следующего вида:

$$B_{n,p,\theta}^{(0,0)} = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \|S_n^{(0,0)}(f)\sigma(n,\theta)\|_q,$$

где $1/p + 1/q = 1$, $\theta > 0$.

Известно, что поведение частных рядов Фурье–Якоби на отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ подобно поведению частных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе. Например, $\int_a^b |f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)|^p dx \to 0$, когда $n \to \infty$, для любого $p \in (1; \infty)$. Следовательно, особенности поведения частных рядов Фурье–Якоби на отрезке $[-1, 1]$, такие как сходимость, неограниченный рост констант Лебега, определяются свойствами многочленов Якоби у концов отрезка $[-1, 1]$. Этим замечанием можно мотивировать введение обобщенных констант

Лебега. Оказалось, что в случаях, когда обобщенные константы Лебега ограничены (а константы Лебега неограничены) частные суммы рядов Фурье–Лежандра функции f могут осуществлять приближение функции f по порядку не хуже наилучшего. Это следует из возможности приблизить [13] функцию в пространстве L_p алгебраическими многочленами с весом $(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{-\theta}$ по порядку не хуже наилучшего. Действительно, так как для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, $S_n^{0,0}(P_n;x) = P_n(x)$ и, в силу определения констант $D_{n,p,\theta}^{(0,0)}$, для любой функции $f \in L_p$ имеет место неравенство

$$\|S_n^{0,0}(f)\|_p \leqslant D_{n,p,\theta}^{(0,0)} \left\| \frac{f}{\sigma(n,\theta)} \right\|_p, \tag{6}$$

то

$$\|f - S_n^{0,0}(f)\|_p \leqslant \|f - P_n\|_p + \|S_n^{0,0}(f - P_n)\|_p \leqslant \|f - P_n\|_p + D_{n,p,\theta}^{(0,0)} \left\| \frac{f - P_n}{\sigma(n,\theta)} \right\|_p. \tag{7}$$

Через $H_p^{r+\gamma}$, $r = 0, 1, \ldots$, $0 < \gamma \leqslant 1$, обозначим класс функций, заданных на отрезке $[-1,1]$ и имеющих там r-ю производную $f^{(r)}(x) \in L_p$, для которой при любом $0 < h < 1$ выполняется неравенство

$$\left\{ \int_{-1}^{1-h} |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x+h)|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant Ch^{\gamma}.$$

Известно следующее утверждение [13].

Предложение 1. *Для любой функции $f \in H_p^{r+\gamma}$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше $n > 2$ таких, что*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r+\gamma}} \right\|_p \leqslant \frac{C \ln^{1/p} n}{n^{r+\gamma}}. \tag{8}$$

При этом, если под знаком нормы заменить $r+\gamma$ на меньшее число, то в правой части неравенства $\ln n$ можно убрать.

В работе [14] получен следующий результат.

Предложение 2. *Многочлены $P_n(x)$ в предложении 1 можно выбрать так, что в знаменателе дроби, стоящей в левой части неравенства* (8)*, слагаемое $1/n$ можно убрать.*

В настоящей работе изучаются обобщенные константы Лебега для частных сумм Фурье–Якоби в пространствах $L_{p,A,B}$ и оценки уклонений частных сумм Фурье–Якоби от функций в пространствах $L_{p,A,B}$. Приведем примеры пространств и классы функций, имеющих достаточно высокую гладкость, для которых частные суммы Фурье–Якоби осуществляют приближение по порядку не хуже наилучшего. Сразу заметим, что это возможно тогда, когда $(\alpha+1)/2 - (A+1)/p \in (-(\alpha+1)/2; -1/4]$ и $(\beta+1)/2 - (B+1)/p \in (-(\beta+1)/2; -1/4]$. Если же $(\alpha+1)/2 - (A+1)/p \in [1/4; (\alpha+1)/2)$ или $(\beta+1)/2 - (B+1)/p \in [1/4; \beta+1)/2)$, то порядок приближения суммами Фурье–Якоби, также как и для сумм Фурье–Лежандра, определяется ростом констант Лебега.

Для любых n, p, θ, δ, α, β, A, B положим

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\rho(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \leqslant 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p,A,B},$$

где $\rho(n,\theta,\delta,x) = (\sqrt{1-x}+1/n)^{\theta}(\sqrt{1+x}+1/n)^{\delta}$, $\theta,\delta \geqslant 0$. Эти константы совпадают с классическими константами Лебега, если $\gamma = \delta = 0$.

Далее будем использовать параметры μ и ν, которые определяются следующим образом: $\mu = (2A+2)/p - \alpha - 3/2$, $\nu = (2B+2)/p - \beta - 3/2$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\max\{\alpha,\beta\} > -1/2$, *для чисел* α, β, A, B *выполняется условие* (5) *и* $\theta \geqslant \mu \geqslant 0$, $\delta \geqslant \nu \geqslant 0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} \leqslant \begin{cases} C_{\theta,\delta}, & \text{если } \theta > \mu,\ \delta > \nu, \\ C_{\mu,\nu}\ln^{1/q} n, & \text{если } \theta = \mu \text{ или } \delta = \nu \text{ и } \mu,\ \nu > 0, \\ C\ln(n+1), & \text{если } \theta = \mu = 0 \text{ или } \delta = \nu = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Из теоремы 2 и предложения 2 следует утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha = \beta$; $\mu = \nu = (2A+2)/p - \alpha - 3/2 \geqslant 0$, $A = B \in (-1/2; 0)$, $f \in H_p^{r+\gamma}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_{p,A,A} \leqslant \begin{cases} \dfrac{C_\gamma}{n^{r+\gamma}}, & \text{если } \gamma > \mu - \dfrac{2A}{p}, \\ C\dfrac{\ln^{1/p}(n+1)}{n^{-\mu+2A/p+2\gamma}}, & \text{если } \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{A}{p} < \gamma \leqslant \mu - \dfrac{2A}{p}. \end{cases} \tag{10}$$

Чтобы сформулировать следующую теорему, приведем результат М. К. Потапова [15] о структурной характеристике классов функций с заданным порядком наилучших приближений. Для этого введем один из вариантов функции обобщенного сдвига. Пусть $f \in L_{p,A,B}$, положим

$$f(x,t,A,B) = \frac{1}{\phi(A,B)} \int_0^1 \int_{-1}^1 f\left[x\cos t + rz\sin t\sqrt{1-x^2} - (1-r^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2}\right] \times$$
$$\times (1-r^2)^{A-B-1} r^{2B+1} (1-z^2)^{B-1/2} dzdr,$$

где

$$\phi(A,B) = \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-r^2)^{A-B-1} r^{2B+1} (1-z^2)^{B-1/2} dzdr, \qquad A > B > -\frac{1}{2p}.$$

Предложение 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, *числа* A, B, θ, δ, p *и* γ *таковы, что* $0 < \gamma < 2$, θ, $\delta \geqslant 0$, $\gamma/2 < 1 + 1/p + \min\{-\theta/2 + A/p, -\delta/2 + B/p\}$, $A > B > -1/2$. *Для того чтобы функция* f *удовлетворяла условию*

$$\left\|\left[f(x) - f\left(x,t,\frac{A}{p},\frac{B}{p}\right)\right]\left(1 - x + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\theta/2}\left(1 + x + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\delta/2}\right\|_{p,A,B} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{\gamma}, \tag{11}$$

где $f(x,t,A/p,B/p)$ — *функция обобщенного сдвига, необходимо и достаточно, чтобы нашлась последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$ *таких, что*

$$\left\|\frac{f(x) - P_n(x)}{(\sqrt{1-x}+1/n)^{\theta}(\sqrt{1+x}+1/n)^{\delta}}\right\|_{p,A,B} \leqslant \frac{C_2}{n^{\gamma}}. \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $A > B > -1/2$, *числа* A, B, θ, δ, p *и* γ *таковы, что* $0 < \gamma < 2$, $\theta \in (\mu; \mu + 1/2)$, $\delta \in (\nu; \nu + 1/2)$, *где* $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, *и для функции* $f \in L_{p,A,B}$ *выполняется условие* (11). *Тогда*

$$\|f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_{p,A,B} \leqslant \frac{C_3}{(n+1)^{\gamma}}. \tag{13}$$

Действительно, из условия теоремы вытекает условие предложения 3 и, следовательно, имеет место необходимость предложения 3, а тогда, в силу (9) и (12), имеет место (13).

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $A > B > -1/2$, *числа* A, B, θ, δ, γ, p *и* r *таковы, что* $r-$ *натуральное число,* $0 < \gamma \leqslant 1$, $\theta \in (\mu; \mu + 1/2)$, $\delta \in (\nu; \nu + 1/2)$, *где* $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$. *Функция* $f \in L_{p,A,B}$ *имеет абсолютно непрерывную производную* $r-1$ *порядка на любом отрезке* $[a,;b] \subset (-1;1)$, $f^{(r)}(x,t,A,B)$ — *функция обобщенного сдвига производной* $f^{(r)}(x)$, *для которой выполняется условие*

$$\left\| \left[f^{(r)}(x) - f^{(r)}\left(x, t, \frac{A}{p} + \frac{r}{2}, \frac{B}{p} + \frac{r}{2}\right) \right] (1-x)^{r/2} (1+x)^{r/2} \left(1 - x + \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{-\theta/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + x + \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{-\delta/2} \right\|_{p,A,B} \leqslant C_4 \left|\sin \frac{t}{2}\right|^{\gamma}.$$

Тогда

$$\|f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_{p,A,B} \leqslant \frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}}. \tag{14}$$

Заметим [6], что для указанных границ изменения параметров μ, ν константы Лебега $\|S_n^{\alpha,\beta}\|_{p,A,B}$ имеют степенной рост [6]:

$$\|S_n^{\alpha,\beta}\|_{p,A,B} \asymp C_{\mu,\nu} \begin{cases} n^{\max\{\mu,\nu\}}, & \text{если} \quad \max\{\mu,\nu\} > 0, \\ \ln(n+1), & \text{если} \quad \mu = \nu = 0. \end{cases}$$

Поэтому применение неравенства (1) дает порядок приближения функций гораздо хуже, нежели соотношения (10), (13), (14).

1. *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series // Trans. Amer. J. Math. Soc. – 1947. – **62**. – P. 387–403. – Ibedem. – 1948. – **63**. – P. 355–367.
2. *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series // Duke Math. J. – 1949. – **16**, No 1. – P. 189–191.
3. *Neuman J., Rudin W.* Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**. – P. 219–222.
4. *Wing G. M.* The mean convergence of orthogonal series // Amer. J. Math. – 1950. – **72**. – P. 792–807.
5. *Muckehoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **23**, No 2. – P. 306–310.
6. *Казакова Н. М.* О порядках констант Лебега сумм Фурье–Якоби в пространствах. – Свердловск, 1981. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.06.1981, № 3053–81.
7. *Gronwall T. H.* Uber die Laplacesche Reihe // Math. Ann. – 1913. – **74**. – P. 213–270.
8. *Суетин П. К.* О представлении непрерывных и дифференцируемых функций по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР. – 1964. – **158**, № 6. – С. 1275–1277.
9. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функции Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. – 1968. – **1**, № 1. – С. 11–23.

10. *Бадков В. М.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 4. – С. 51–106.
11. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 4. – С. 788–790.
12. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 135–147.
13. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p // Там же. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874–899.
14. *Ходак Л. Б.* Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 28–31.
15. *Потапов М. К.* О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **134**. – С. 260–277.

Днепропетровский национальный университет
Университет Уагадугу, Буркина-Фасо

Поступило в редакцию 13.07.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. P. Motornyi, S. V. Goncharov, P. C. Nitiema**

On the mean convergence of Fourier–Jacobi series

We study the convergence of Fourier–Jacobi series in the space $L_{p,A,B}$ in the case where the Lebesgue constants are unbounded.