УДК 681.142.2;622.02.658.284;621.325

Член-кореспондент НАН України **В. В. Грицик, Д. Д. Пелешко, Ю. М. Рашкевич**

Гільбертові простори у векторній моделі подання зображень і наборів зображень

Розроблено векторну модель подання сигналу-зображення на основі поняття потоку абстрактної вектор-функції. Через визначення скалярного добутку та метрики побудовано та досліджено гільбертові сепарабельні простори операторного подання наборів зображень. Визначено задачу факторизації цих просторів для подальшої розробки методів попередньої обробки зображень та наборів зображень.

Постановка задачі. Метою роботи є побудова гільбертових сепарабельних просторів для наборів зображень для організації теоретичних досліджень методами диференціальної геометрії та функціонального аналізу. Для досягнення цієї мети необхідно ввести скалярний добуток і метрику в просторі зображень як стохастичних сигналів.

Практичним завданням є визначення задачі факторизації простору набору зображень для побудови нових методів обробки.

Модель подання зображення та наборів зображень. Дискретне подання цифрового зображення (надалі — просто зображення) є відображенням скінченного дискретного набору значень з $\mathrm{N}^{2,+}$. Функцію C можна записати у вигляді

$$C\colon \mathbf{X}^{2,+,d} \to \mathbf{Q}^d, \tag{1}$$

де $\mathbf{X}^{2,+,d} \subset \mathbf{N}^{2,+}$ — двовимірний топологічний многовид [1], як хаусдорфовий топологічний підпростір [1–3] евклідового простору $\mathbf{N}^{2,+}$ [2, 3], $\mathbf{Q}^d \subset \mathrm{Color}$ — замкнені обмежені підмножини просторів $\mathbf{N}^{2,+}$ та Color відповідно, які є вимірними за Жорданом [1]. Зважаючи на зліченність просторів $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^{2,+}$, $\mathbf{X}^{2,+,d}$ та $\mathbf{Q}^d$ є також зліченними [3].

Фізичні розміри рисунка P визначаються розмірами області $\mathbf{X}^{2,+,d}$. В більшості випадків $\mathbf{X}^{2,+,d}$ є прямокутником. Тому її можна подати у вигляді

$$\mathbf{X}^{2,+,d} = \{dtp_{i,j} = (i,j) \mid i = \overline{1,l} \wedge j = \overline{1,h}\}, \tag{2}$$

де $l, h \in N^+$ — довжина та висота рисунка P. Добуток $s = lh$ — площа, яка визначає розмірність області $\mathbf{X}^{2,+,d}$ та рисунка P.

У разі розгляду набору з N рисунків (1) та (2) видозмінюються

$$\mathbf{P} = \{P_z\colon P_z = C_z(\mathbf{X}_z^{2,+,d})\}_{z=\overline{1,N}}, \tag{3}$$

де

$$C_z\colon \mathbf{X}_z^{2,+,d} \to \mathbf{Q}_z^d, \qquad z = \overline{1,N}; \tag{4}$$

$$\mathbf{X}_z^{2,+,d} = \{dtp_{z,i,j} = (i,j) \mid i = \overline{1,l_z} \wedge j = \overline{1,h_z}\}, \qquad \forall\, z\colon l_z, h_z \in \mathbf{N}^+. \tag{5}$$

Тут $\mathbf{P}$ — набір з N рисунків P_z, а $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ — область визначення функції C_z z-го рисунка P_z. Фактично в даному випадку треба говорити про оператор набору $\mathbf{C}$, який визначений на гільбертовому просторі [3] $\{C_z\}$ і подається набором операторів кожного із зображень набору

$$\mathbf{C} = \{C_z\}_{z=1,\ldots,N}. \tag{6}$$

Модель вектор-функції для подання зображення та наборів зображень. За основу математичної моделі векторного подання зображень приймається гіпотеза про існування деякого векторного поля [3] (вектор-функції від векторного аргументу, який виступає точкою простору). За вектор-функцію приймається вектор $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^1(\mathbf{X}_z^{2,+,d}),\ldots,\mathbf{C}^{N_{\mathrm{pal}}}(\mathbf{X}_z^{2,+,d}))$, де N_{pal} — розмірність палітри кольорів.

При такому підході характеристикою зображення P_z виступає потік абстрактного вектора $\mathbf{C}$ через деяку плоску гіперповерхню $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ [1, 3, 4], яка, в свою чергу, за геометричними параметрами дорівнює площині зображення P_z. Це означає, що кожному P_z ставиться у відповідність скалярний поверхневий інтеграл, який є потоком вектора $\mathbf{C}$ крізь поверхню $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$

$$P_z \to \Phi_z = \int\limits_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} \mathbf{C}\cdot d\mathbf{X}_z^{2,+,d}, \qquad z = 1,\ldots,N. \tag{7}$$

При цьому вектор $\mathbf{C}$ приймається направлений по нормалі до поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Більше того, допускається існування векторного елемента поверхні $d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ майже всюди на $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ [1]. Оскільки $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ є замкненою і обмеженою поверхнею, то координатні напрями (i,j) впорядковуються так, щоб напрямок вектора $d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ збігався по нормалі з напрямом вектора $\mathbf{C}$. Очевидно, що площа $\int\limits_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} d\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ повинна існувати.

Описаний підхід визначає існування деякого силового поля. Зображення фактично є ніби деяким перпендикулярним зрізом цього поля.

Координати вектора $\mathbf{C}$ на поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ можуть визначатися вектором

$$\mathbf{C}_z = \underbrace{(c^d_{z(1,1)},\ldots,c^d_{z(l_z,h_z)})}_{l_z h_z} \tag{8}$$

або матрицею

$$\mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} c^d_{z(1,1)} & \cdots & c^d_{z(l,1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^d_{z(1,h)} & \cdots & c^d_{z(l,h)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Маючи координати вектор-функції $\mathbf{C}$ на поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$, можна ввести другу характеристику P_z, а саме, градієнт кольору $\operatorname{grad}\mathbf{C}_z$ [1] як векторну функцію на евклідовому просторі координат вектора $\mathbf{C}$ на поверхні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$.

Відповідно до (3), для набору $\mathbf{P}$ має місце наступне: якщо в просторі $(\Omega_{\mathbf{C}})$ відносно (8) або (9) ввести операцію додавання "$\oplus$" (як додавання векторів для (8) або додавання матриць (9)) та множення на скаляр "$\cdot$", то многовид $(\Omega_{\mathbf{C}})$ стає лінійним простором.

Із обмеженості простору ($z = 1$ та $z = N$) та зліченності $(\Omega_{\mathbf{C}})$ випливає його замкненість. Оскільки лінійний многовид $(\Omega_{\mathbf{C}})$ є замкненим, то він утворює векторний простір.

Побудова гільбертових просторів при векторній моделі подання зображень. Введення скалярного добутку дає змогу ввести норму і перейти до нормованих чи гільбертових просторів. Розглянемо різні способи організації гільбертових та нормованих просторів над набором $\mathbf{P}$ при векторному поданні зображень.

Простір $(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\boldsymbol{\Phi}})$. Скалярний добуток введемо так:

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \rangle = \Phi_{z_1} \Phi_{z_2}. \tag{10}$$

Тоді норму можна визначити

$$\|\mathbf{C}_z\|_{\mathbf{C},\Phi} = \Phi_z, \tag{11}$$

а метрикою може виступати звичайна евклідова відстань

$$d_{\mathbf{C},\Phi}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = |\Phi_{z_1} - \Phi_{z_2}|. \tag{12}$$

Завдяки цьому поле $\Omega_{\mathbf{C}}$ можна розглядати нормованим векторним простором $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$.

Теорема 1. *Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є гільбертовим.*

Доведення. Для скалярного добутку (10) виконуються умови:

1) додатної визначеності

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_1} \rangle = \Phi_{z_1}^2 \geqslant 0; \tag{13}$$

2) ермітової симетрії

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \rangle = \Phi_{z_1} \Phi_{z_2} = \Phi_{z_2} \Phi_{z_1} = \overline{\langle \mathbf{C}_{z_2}, \mathbf{C}_{z_1} \rangle}; \tag{14}$$

3) асоціативності

$$\alpha \langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \rangle = \alpha \Phi_{z_1} \Phi_{z_2} = \Phi_{z_1}(\alpha \Phi_{z_2}) = \langle \mathbf{C}_{z_1}, \alpha \mathbf{C}_{z_2} \rangle; \tag{15}$$

4) дистрибутивності

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} \rangle + \langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_3} \rangle = \Phi_{z_1} \Phi_{z_2} + \Phi_{z_1} \Phi_{z_3} = \Phi_{z_1}(\Phi_{z_2} + \Phi_{z_3}) = \langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} + \mathbf{C}_{z_3} \rangle. \tag{16}$$

Отже, простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є унітарним. Унітарний скінченний простір є повним [1, 2], а повний унітарний векторний простір (банаховий простір) є гільбертовим.

Доведення теореми 1 може бути простішим: оскільки простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є нормованим і скінченновимірним, то він є повним, тобто банаховим. А банаховий простір із введеним скалярним добутком є гільбертовим.

Твердження 1. *Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є сепарабельний.*

Доведення. Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є нормованим простором з нормою (11). А будь-який скінченновимірний нормований простір є сепарабельним [1, 2].

Теорема 2. *$\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}$ є метрикою над фактор-простором $\Omega_{\mathbf{C},\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}}/^{\sim}$ гільбертового простору $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$.*

Доведення. Згідно з (7) і (8), маємо

$$d_{\mathbf{C},\Phi}(\mathbf{C}_z, \mathbf{C}_z) = 0, \tag{17}$$

тобто (8) є напівметрикою (псевдометрикою) [3]. А напівметрика є метрикою фактор-простору.

Відзначимо, що норма $\|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi}$ не є напівнормою [1], тому простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\Phi})$ є нормованим напівметричним векторним простором.

Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},p})$. Якщо ввести скалярний добуток таким чином

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\rangle = \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l}\delta_{i,j}c^d_{z_1,(i,j)}c^d_{z_2,(i,j)}, \tag{18}$$

де $\delta_{i,j}$ — метричний тензор, то можна ввести p-норму (гельдерові норми [3]) (при $p = 2$ отримуємо евклідову норму)

$$\|\mathbf{C}_z\|_{\mathbf{C},p} = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l}(c^d_{z,(i,j)})^p}. \tag{19}$$

Тоді метрику можна визначити так:

$$d_{\mathbf{C},p}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{lh}\delta_{i,j}|c^d_{z_1,k} - c^d_{z_2,k}|^p}; \qquad k = k(i,j), \tag{20}$$

а до розгляду приймати нормований векторний простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},p})$.

Твердження 2. *Простір* $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},p})$ *є сепарабельним і гільбертовим.*

Доведення. При введеному скалярному добутку (18) гільбертовість простору $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},p})$ випливає із скінченної вимірності простору і евклідової метрики (20) [2].

Сепарабельність простору $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},p})$ випливає із скінченної вимірності і нормованості (19) простору [2].

Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\text{Фрб}})$. Якщо визначити скалярний добуток (10) таким чином

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\rangle = \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l}c^d_{z_1,(i,j)}c^d_{z_2,(i,j)}, \tag{21}$$

то можна вести матричну норму Фробеніуса з метрикою Фробеніуса

$$\|\mathbf{C}_z\|_{\mathbf{C},\text{Фрб}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l}|c^d_{z,(i,j)}|^2} = \sqrt{TrC_z^{\dagger}C_z}; \tag{22}$$

$$d_{\mathbf{C},\text{Фрб}}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l}|c^d_{z_1,(i,j)} - c^d_{z_2,(i,j)}|^2}, \tag{23}$$

де $\mathbf{C}_z^{\dagger}$ — матриця, спряжена до $\mathbf{C}_z$; Tr — слід матриці. В результаті отримаємо нормований векторний простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\text{Фрб}})$.

Твердження 3. *Простір* $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\text{Фрб}})$ *є сепарабельним і гільбертовим.*

Доведення аналогічне доведенню твердження 2.

Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\mathbf{det}})$. Скалярний добуток можна визначити через детермінант добутку матриць координат

$$d_{\mathbf{C},\text{Фрб}}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{l} |c^d_{z_1,(i,j)} - c^d_{z_2,(i,j)}|^2}. \tag{24}$$

Тоді норма і метрика простору $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$ будуть такими:

$$\|\mathbf{C}_z\|_{\mathbf{C},\det} = |\det(\mathbf{C}_z)| = \sqrt{(\det(\mathbf{C}_z))^2}; \tag{25}$$

$$d_{\mathbf{C},\det}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = |\det(\mathbf{C}_{z_1}) - \det(\mathbf{C}_{z_2})|. \tag{26}$$

В результаті цього отримаємо нормований векторний простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$.

Теорема 3. *Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$ є гільбертовим.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 1. Для скалярного добутку (24) виконуються умови: додатної визначеності, ермітової симетрії, асоціативності та дистрибутивності

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_1}\rangle = \det(\mathbf{C}_{z_1})^2 \geqslant 0, \tag{27}$$

$$\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\rangle = \det(\mathbf{C}_{z_1})\det(\mathbf{C}_{z_2}) = \det(\mathbf{C}_{z_2})\det(\mathbf{C}_{z_1}) = \overline{\langle \mathbf{C}_{z_2}, \mathbf{C}_{z_1}\rangle}, \tag{28}$$

$$\alpha\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\rangle = \alpha\det(\mathbf{C}_{z_1})\det(\mathbf{C}_{z_2}) = \det(\mathbf{C}_{z_1})(\alpha\det(\mathbf{C}_{z_2})) = \langle \mathbf{C}_{z_1}, \alpha\mathbf{C}_{z_2}\rangle, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}\rangle + \langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_3}\rangle &= \det(\mathbf{C}_{z_1})\det(\mathbf{C}_{z_2}) + \det(\mathbf{C}_{z_1})\det(\mathbf{C}_{z_3}) = \\ &= \det(\mathbf{C}_{z_1})(\det(\mathbf{C}_{z_2}) + \det(\mathbf{C}_{z_3})) = \langle \mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2} + \mathbf{C}_{z_3}\rangle.\end{aligned} \tag{30}$$

Отже, простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$ є унітарним. А будь-який скінченний унітарний простір є повним [1, 2]. Повний унітарний векторний простір (банаховий простір) є гільбертовим.

Твердження 4. *Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$ є сепарабельний.*

Доведення аналогічне доведенню твердження 1.

Теорема 4. *$\|\cdot\|_{\mathbf{C},\det}$ є метрикою над фактор-простором $\Omega_{\mathbf{C},\|\cdot\|_{\mathbf{C},\det}}/\!\sim$ гільбертового простору $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\det})$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.

Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\mathbf{singl}})$. Особливий інтерес в практичних задачах обробки зображень може становити сингулярна норма [1] із сингулярною метрикою

$$\|\mathbf{C}_z\|_{\mathbf{C},\text{singl}} = \max_i \sigma_i(\mathbf{C}_z); \tag{31}$$

$$d_{\mathbf{C},\text{singl}}(\mathbf{C}_{z_1}, \mathbf{C}_{z_2}) = \max_i \sigma_i(\mathbf{C}_{z_1} - \mathbf{C}_{z_2}), \tag{32}$$

де σ_i — i-те власне число матриці $\mathbf{C}_z$.

Твердження 5. *$(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\text{singl}})$ є векторним простором із мультиплікативною метрикою.*

Доведення. Метрика (32) є підлеглою [1] евклідовій нормі векторів, а тому вона є мультиплікативною [2].

Простір $(\Omega_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|_{\mathbf{C},\text{singl}})$ є нормованим метричним векторним простором із мультиплікативною метрикою.

За умови прийнятої гіпотези і (7) оператор набору (6) можна подати у вигляді вектора над гільбертовим простором векторів $\mathbf{C}_z$

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_z\}_{z=1,\dots,N} = \left\{ \begin{array}{c} (c^d_{1(1,1)}, \dots, c^d_{1(l_1,h_1)}) \\ (c^d_{2(1,1)}, \dots, c^d_{2(l_2,h_2)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (c^d_{N(1,1)}, \dots, c^d_{N(l_N,h_N)}) \end{array} \right\}. \qquad (33)$$

Тоді $\mathbf{P}$ у відповідність ставиться набір вектор-функцій кольору $\mathbf{C}$ крізь різні $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$. Цей набір виступає третьою характеристикою, але виключно набору зображень

$$\mathbf{P} \to \{\Phi_z\}_{z=1,\dots,N}. \qquad (34)$$

Над евклідовим простором $\{\Phi_z\}$ можна ввести аксіоматику Колмогорова [5] і перейти до обробки зображень та наборів зображень за допомогою класичних методів теорії ймовірностей і кореляційного аналізу.

Таким чином, в роботі запропоновано векторну модель подання зображення та набору зображень, яка дозволяє привнести в обробку зображень методи теорії векторного поля. Визначено базові характеристики моделі розробки алгоритмів практичної обробки зображень. На основі цієї моделі можна будувати різноманітні гільбертові простори, які мають властивість сепарабельності.

Наведені приклади побудови гільбертового сепарабельного простору зображення та набору зображень дають змогу математично обґрунтовано будувати нові методи обробки зображень та наборів на основі зміни метрик простору.

Введення метрики (12) дає можливість відразу сформулювати задачу факторизації сепарабельного гільбертового простору набору зображень.

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа: 4-е изд. – Москва: Наука, 1976. – 544 с.
3. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. – Москва: ГИФМЛ, 1963. – 264 с.
4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Наука, 1972. – Т. 2. – 572 с.
5. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей: 2-е изд. – Москва: Наука, 1974. – 122 с.

Державний науково-дослідний інститут
інформаційної інфраструктури, Львів
Національний університет "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 25.08.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Grytsyk, D. D. Peleshko, Yu. M. Rashkevych**

Hilbert spaces in a vector model of representation of images and sets of images

A vector model of representation of a signal-image on the basis of the notion of the flow of an abstract vector-function is developed. By defining a scalar product and a metric, Hilbert separable spaces for the operator representation of sets of images are constructed and studied. The problem of the factorization of these spaces is posed for the further development of methods of the preliminary processing of images and sets of images.