Кинематика и физика небесных тел, 1987, т. 3, № 4

УДК 521.31

О геометрическом методе определения невозмущенной орбиты из наблюдений с использованием групповых преобразований

В. Б. Титов

Рассмотрены группы преобразований фазовых траекторий пространственной задачи двух тел. Предложен геометрический метод определения орбит, основанный на выведенных групповых соотношениях. Получены уравнения для определения ориентации плоскости орбиты из наблюдений.

ON A GEOMETRIC METHOD FOR DETERMINING THE NON-PERTURBED ORBIT FROM OBSERVATIONS USING THE TRANSFORMATION GROUPS, by Titov V. B.— The transformation groups of phase trajectories of three-dimensional two-body problem are considered. These groups are used for development of geometric («angle only» observations) method of orbit determination. The equations for orbit plane determination are given.

В работе [2] определены группы преобразований, оставляющих инвариантным пространство фазовых траекторий плоской задачи двух тел. Рассмотренные группы использованы для разработки метода определения орбит по трем положениям без засечек времени. Поставим задачу, во-первых, обобщить приведенную в [2] группу на трехмерное пространство (это сделать нетрудно) и, во-вторых, дать метод определения орбит из наблюдений с использованием этой группы.

Чтобы распространить группу преобразований фазовых траекторий плоской задачи двух тел на пространственный случай, достаточно заменить однопараметрическую группу поворотов $O(2)$ на трехпараметрическую группу вращений $O(3)$. Получим

$$\mathbf{r}' = dc\mathbf{T}\mathbf{r}/\{c + [\mathbf{r}\Delta\mathbf{c}]\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{v}' = d^{-1/2}\mathbf{T}\,(\mathbf{v} + \Delta), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — векторы положения и скорости исходной орбиты (штрих означает, что эти величины относятся к преобразованной орбите); $\mathbf{T}$ — матрица вращений, зависящая от трех параметров (например, углы Эйлера); $[\mathbf{r}\Delta\mathbf{c}]$ — смешанное произведение векторов; $\mathbf{c}=\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ — момент количества движения; $c=|\mathbf{c}|$ — постоянная площадей; Δ — вектор, определяющий двухпараметрическую группу сдвигов в пространстве скоростей, причем он должен лежать в плоскости исходной орбиты

$$\Delta\mathbf{c} = 0, \tag{3}$$

наконец, d определяет группу растяжений.

Нетрудно убедиться в том, что вектор момента количества движения преобразуется по закону

$$\mathbf{c}' = d^{1/2}\mathbf{T}\mathbf{c}, \tag{4}$$

а преобразования (1), (2) действительно определяют группу, т. е. если выполнить второе преобразование (для экономии места формулы для скорости не приводятся) $\mathbf{r}''=d'c'\mathbf{T}'\mathbf{r}'/\{c'+[\mathbf{r}'\Delta'\mathbf{c}']\}$ при условии $\Delta'\mathbf{c}'=0$, то получим результирующее преобразование $r''=d''c\mathbf{T}''\mathbf{r}/\{c+[\mathbf{r}\Delta''\mathbf{c}]\}$, причем $\Delta''\mathbf{c}=0$, а групповой закон умножения будет иметь вид

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{T}'\cdot\mathbf{T}, \quad d'' = d'd, \quad \Delta'' = \Delta + d\mathbf{T}^{-1}\Delta'. \tag{5}$$

Отсюда легко получить обратное преобразование

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}^{-1}, \quad d' = d^{-1}, \quad \Delta' = -d^{-1}\mathbf{T}\Delta. \tag{6}$$

Преобразование (1) сохраняет центральные углы. Из (1) и (2) нетрудно получить интересующие нас выражения для различных величин; например,

$$\dot{r}' = d^{-1/2}\,(\dot{r} + c\,(\mathbf{r}\Delta)/r). \tag{7}$$

Перейдем ко второй части задачи. Из позиционных наблюдений попробуем получить такие параметры групповых преобразований d, Δ, $\mathbf{T}=(\mathbf{p}\ \mathbf{q}\ \mathbf{w})$, чтобы по формулам (1) и (2) точки некоторой произвольно заданной орбиты преобразовывались в точки искомой орбиты. Как только будут определены неизвестные параметры, будет решена и задача определения орбиты из наблюдений: из (1) и (2) можно получить положение и скорость, например, на момент первого наблюдения.

Преобразования (1), (2) не содержат времени. Можно считать, что (1) не зависит и от скорости, так как скорость входит в это выражение только через постоянный вектор $\mathbf{c}$. Следовательно, (1) можно считать геометрическим преобразованием и в состав наблюдений не включать момент времени, предполагая, что заданы единичный вектор направления на объект и положение пункта наблюдения. По трем таким наблюдениям определить орбиту нельзя. Необходимо, как делается обычно, задать еще промежутки времени между наблюдениями и воспользоваться динамическими соотношениями, которые в свою очередь зависят от еще не известных элементов орбиты.

Таким образом, определение орбиты по трем наблюдениям — довольно трудоемкий итерационный процесс, который по существу нельзя заметно упростить. Возможно, часть трудностей исчезнет, если отказаться от динамических соотношений, а при определении орбит использовать только геометрические. Отметим, например, что определение ориентации прямолинейной орбиты задачи двух тел по трем наблюдениям — несложная геометрическая задача. Пусть три прямые, проходящие через точки наблюдения в направлении наблюдаемого объекта, расположены в разных плоскостях. Это почти всегда справедливо (в противном случае либо трех имеющихся наблюдений недостаточно, либо построение элементарно). Эти три прямые определяют или однополостный гиперболоид, или гиперболический параболоид. В любом случае они принадлежат к одному семейству прямолинейных образующих поверхности, а прямая, часть которой является искомой орбитой,— к другому. Поскольку последняя должна проходить через центральное тело, то она полностью определена. Размер отрезка прямой (большую полуось орбиты) получить из геометрических соображений в этом случае нельзя.

В общем случае для геометрического метода определения орбит требуется более трех наблюдений. С этим недостатком можно смириться, если уравнения, которые придется решать, будут значительно проще используемых обычно. Подобный геометрический метод предложен в работе [1]. Однако формулы, приведенные там, нельзя назвать простыми. Для их решения предлагается такая же итерационная процедура, как и в классических методах, с той лишь разницей, что в процессе итерации применяются геометрические соотношения, а не «разложения по степеням времени» (т. е. не динамические). При выводе формул предлагаемого в [1] метода поставлены условия: 1) искомая траектория — плоская кривая; 2) движение происходит по коническому сечению. Эти условия в случае поиска параметров преобразования (1) выполняются автоматически, так как известно, что результат преобразования — орбита задачи двух тел. Это позволяет надеяться, что решение задачи определения орбит из наблюдений путем получения параметров групповых преобразований (1) даст больший эффект.

Итак, будем искать такие параметры преобразования (1), чтобы преобразованный радиус-вектор $\mathbf{r}'$ (который должен совпадать с истинным) удовлетворял уравнению

$$\mathbf{r}'_n=\lambda_n\rho_n+\mathbf{r}_{0n}, \tag{8}$$

где λ_n — единичный вектор, определяющий направление на наблюдаемый объект; ρ_n — расстояние от пункта наблюдения до объекта; $\mathbf{r}_{0n}$ — положение пункта наблюдения.

Предположим, что неизвестный вектор положения представляет собой результат неопределенного пока преобразования некоторой точки фиксированной произвольно (что удобно для нас) орбиты

$$dc\mathbf{T}\mathbf{r}_n/\{c+[\mathbf{r}_n\Delta\mathbf{c}]\}=\lambda_n\rho_n+\mathbf{r}_{0n}, \quad n=1,\ldots,N. \tag{9}$$

Каждое наблюдение дает векторное (три скалярных) уравнение с общими для всех наблюдений неизвестными d, $\mathbf{T}$, Δ (всего шесть) и ρ_n, $\mathbf{r}_n$, не известными для каждого наблюдения. Впрочем, $\mathbf{r}_n$ — точка известной орбиты, а одну точку (обычно первую) можно выбрать произвольно. Таким образом, из $3N$ уравнений следует определить $6+N+N-1=2N+5$ неизвестных, т. е. для определения d, $\mathbf{T}$, Δ, а следовательно, и элементов орбиты необходимо пять наблюдений. Обозначим их i, j, k, l, m.

Перепишем (9) в виде

$$d\mathbf{cr}_n/\{c+[\mathbf{r}_n\Delta\mathbf{c}]\}=\mathbf{T}^{-1}\lambda_n\rho_n+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}_{0n}, \tag{10}$$

$\mathbf{T}^{-1}$ — матрица, обратная $\mathbf{T}$ (т. е. просто транспонированная).

Выберем исходную орбиту так, чтобы плоскость ее совпадала с плоскостью xy. Тогда $z_n\equiv 0$ и

$$\rho_n=-(\mathbf{r}_{0n}\mathbf{w})/(\lambda_n\mathbf{w}).$$

Разумеется, пункт наблюдения не должен находиться в плоскости орбиты $\mathbf{r}_{0n}\mathbf{w}=0$, или, что то же самое, $\lambda_n\mathbf{w}\neq 0$. Это условие показывает, что геометрическим методом нельзя определить орбиту, если наблюдения проводятся в ее плоскости. Это вполне ясно и из простых «физических» соображений. Такие же «особые» наблюдения встречаются и в классических методах определения орбит, и мы пока их не рассматриваем.

Итак

$$\frac{dc}{c+[\mathbf{r}_n\Delta\mathbf{c}]}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda_n\mathbf{w}}\begin{pmatrix}-(\lambda_n\times\mathbf{r}_{0n})\,\mathbf{q}\\ (\lambda_n\times\mathbf{r}_{0n})\,\mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{a}_n\mathbf{q}\\ \mathbf{a}_n\mathbf{p}\end{pmatrix},$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_n=\lambda_n^{\times}\mathbf{r}_{0n}. \tag{12}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению параметров преобразования d, α, β в плоском случае. Она уже решена в [2]. Для определения этих параметров требуются три наблюдения. Правые части (11) содержат неизвестные $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, которые должны быть получены из дополнительных наблюдений.

Как и в [2], для определения d, α, β имеем линейную систему уравнений

$$a\eta_n\alpha-a\xi_n\beta+ad=\sigma_n, \tag{13}$$

где $\sigma_n=\sqrt{\mathbf{a}_n^2-(\mathbf{a}_n\mathbf{w})^2}/|\lambda_n\mathbf{w}|$, a — характеризует размер исходной орбиты (его значение нас пока не интересует). Выбрав из пяти наблюдений какие-нибудь три (например, i, j, k), из (13) определим d, α, β

$$\begin{gathered}d=[\sigma_i(\xi_j\eta_k-\xi_k\eta_j)+\sigma_j(\xi_k\eta_i-\xi_i\eta_k)+\sigma_k(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i)]/(a\det),\\ \alpha=[\sigma_i(\xi_k-\xi_j)+\sigma_j(\xi_i-\xi_k)+\sigma_k(\xi_j-\xi_i)]/(a\det),\\ \beta=[\sigma_i(\eta_k-\eta_j)+\sigma_j(\eta_i-\eta_k)+\sigma_k(\eta_j-\eta_i)]/(a\det),\\ \det=\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i+\xi_k\eta_i-\xi_i\eta_k+\xi_j\eta_k-\xi_k\eta_j.\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13) для n-го наблюдения, получим уравнение для определения ориентации плоскости орбиты

$$\begin{gathered}\sigma_i[(\xi_j\eta_k-\xi_k\eta_j)-(\xi_j\eta_n-\xi_n\eta_j)+(\xi_k\eta_n-\xi_n\eta_k)]+\sigma_k[(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i)-\\ -(\xi_i\eta_n-\xi_n\eta_i)+(\xi_j\eta_n-\xi_n\eta_j)]+\sigma_j[-(\xi_i\eta_k-\xi_k\eta_i)+(\xi_i\eta_n-\xi_n\eta_i)-\\ -(\xi_k\eta_n-\xi_n\eta_k)]+\sigma_n[-(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i)+(\xi_i\eta_k-\xi_k\eta_i)-(\xi_j\eta_k-\xi_k\eta_j)]=0.\end{gathered} \tag{15}$$

В это уравнение входят четыре наблюдения i, j, k, n. Для пяти наблюдений таких уравнений будет $\binom{5}{4}=5$. Отметим, что если рассматривать их как систему линейных уравнений относительно σ_s, то определитель этой системы будет тождественно равен нулю. Уравнение (15) определяет ориентацию плоскости орбиты, оно не зависит от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, а только от $\mathbf{w}$. Действительно, обозначим

$$\mathbf{b}_{ij}=\mathbf{a}_i\times\mathbf{a}_j,$$

$$c_{jkl}=(\xi_i\eta_k-\xi_k\eta_i)-(\xi_j\eta_l-\xi_l\eta_j)+(\xi_k\eta_l-\xi_l\eta_k).$$

Подставим в последнее равенство формулу (12)

$$c_{ijl}=\{(\mathbf{b}_{jk}\mathbf{w})(\lambda_i\mathbf{w})-(\mathbf{b}_{jl}\mathbf{w})(\lambda_k\mathbf{w})+(\mathbf{b}_{kl}\mathbf{w})(\lambda_j\mathbf{w})\}/[(\lambda_j\mathbf{w})(\lambda_k\mathbf{w})(\lambda_l\mathbf{w})].$$

Обозначим далее

$$\theta_n = \sqrt{\mathbf{a}_n^2 - (\mathbf{a}_n \mathbf{w})^2},$$
$$d_{jkl} = (\mathbf{b}_{jk}\mathbf{w})(\lambda_l \mathbf{w}) - (\mathbf{b}_{jl}\mathbf{w})(\lambda_k \mathbf{w}) + (\mathbf{b}_{kl}\mathbf{w})(\lambda_j \mathbf{w}), \tag{16}$$

где $\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_{st}$ — известные векторы; $\mathbf{w}$ — единичный вектор, определяющий ориентацию плоскости орбиты. Перепишем (15) в виде

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i \mathbf{w})\,\theta_i d_{jkn} - \operatorname{sgn}(\lambda_j \mathbf{w})\,\theta_j d_{ikn} + \operatorname{sgn}(\lambda_k \mathbf{w})\,\theta_k d_{ijn} - \operatorname{sgn}(\lambda_n \mathbf{w})\,\theta_n d_{ijk} = 0. \tag{17}$$

Как уже отмечалось, для пяти наблюдений можно составить пять таких уравнений. Для нахождения вектора $\mathbf{w}$ достаточно любых двух. Эту систему из двух уравнений с двумя неизвестными нетрудно решить любым подходящим численным методом, после чего определение орбиты становится тривиальным, так как мы фактически уже знаем пять положений. Легко получаются и параметры группового преобразования. Зафиксировав до сих пор произвольную точку r_i, находим условие для определения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Затем из линейной системы уравнений (13) получим d, α, β.

Схема определения орбит, в которой часть параметров вычисляется из решения линейной, а при избыточных наблюдениях — нормальной системы уравнений, предложена в [3]. Правда, в этой схеме решение линейной системы — часть итерационного процесса, который включает в себя и довольно сложные вычисления. В предлагаемом здесь методе искомые переменные разделяются: часть, касающаяся ориентации плоскости орбиты, определяется из решения не очень сложной (два уравнения) системы нелинейных уравнений, после чего остальные параметры находятся из линейной системы уравнений, а в случае избыточности данных можно составить нормальные уравнения и получить подходящие значения параметров. Однако можно пойти еще дальше. Если ориентация плоскости орбиты приближенно известна, например, из решения уравнений (17), то можно из линеаризованных уравнений (17) найти малое вращение, пренебрегая величинами второго порядка. Выполнив предварительный поворот, чтобы приближенно известная плоскость орбиты совпала с плоскостью $z=0$, и представив матрицу $\mathbf{T}$ в виде

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & q_x & w_x \\ -q_x & 1 & w_y \\ =w_x & -w_y & 1 \end{pmatrix},$$

получим линейную систему уравнений вида

$$s_{ijkn} + f_{ijkn} w_x + g_{ijkn} w_y = 0,$$

где s_{ijkn}, f_{ijkn}, g_{ijkn} — зависят только от известных векторов λ_m и $\mathbf{r}_{0m}$, причем таких уравнений можно написать $\binom{N}{4}$.

В данной работе описан метод определения орбит. При разработке соответствующего алгоритма необходимо решить еще много вопросов. Прежде всего, как выявить и можно ли использовать наблюдения с $\lambda_n \mathbf{w}=0$? Более простой вопрос — как решить систему уравнений (17)? Поскольку уравнений всего два, то решить их можно надежно и быстро. Во всяком случае использование групповых преобразований траекторий задачи двух тел значительно упростило решение задачи определения орбит из наблюдений без привлечения динамических соотношений.

1. *Курышев В. И., Перов Н. И.* О нетрадиционном способе определения элементов орбит неизвестных космических объектов по данным обработки обзорных фотоснимков на ЭВМ // Астрон. журн.— 1982.— **59**, вып. 6.— С. 1212—1217.
2. *Титов В. Б.* Группы преобразований фазовых траекторий задачи двух тел // Астрономия и геодезия.— 1986.— Вып. 14.— С. 74—81.
3. *Neutsch W.* A simple method of orbit determination // Astron .and Astrophys.— 1981.— **102,** N 1.— P. 59—64.

Астрон. обсерватория
Ленингр. ун-та им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
23.06.86