Кинематика и физика небесных тел, 1987, т. 3, № 3

УДК 521.98

# Сравнение точности среднеквадратичной и равномерной полиномиальных дискретных аппроксимаций в задачах компактного представления астрономических эфемерид

Н. Н. Васильев, Е. З. Хотимская

Получена оценка для соотношения погрешностей среднеквадратичной и равномерной полиномиальных дискретных аппроксимаций. На примерах дискретной аппроксимации астрономических эфемерид показано практическое преимущество использования равномерного приближения по сравнению со среднеквадратичным.

*COMPARISON OF ACCURACY OF DISCRETE LEAST-SQUARES AND UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS IN THE PROBLEMS OF COMPACT REPRESENTATION OF ASTRONOMICAL EPHEMERIDES, by Vasil'ev N. N., Khotimskaya E. Z.*— An estimate is obtained for the ratio of the maximum errors of discrete least-squares and uniform polynomial approximations. A practical advantage of using the uniform approximation instead the least-squares one is shown for the case of the discrete approximation of astronomical ephemerides.

Полиномиальная аппроксимация астрономических эфемерид играет все большую роль в небесной механике. В настоящее время в ряде ежегодников уже перешли на новую форму публикации эфемерид в виде обобщенных полиномов $\sum a_i T_i(x)$, где $T_i(x)$ — полиномы Чебышева 1-го рода. Искомое приближение строится чаще всего путем интерполяции в корнях полинома Чебышева соответствующей степени или по методу наименьших квадратов. Равномерное приближение для построения астрономических эфемерид в компактной форме использовалось в работах [2—7]. В [7] исследовано поведение ошибок равномерной и среднеквадратичной дискретных полиномиальных аппроксимаций астрономических эфемерид и сделан вывод о преимуществе использования в подобных задачах равномерной аппроксимации по сравнению со среднеквадратичной. Однако следует отметить, что методы построения полиномов наилучшего равномерного приближения, известные до недавнего времени, были весьма громоздки и поэтому не могли конкурировать с простыми алгоритмами интерполяции или аппроксимации по методу наименьших квадратов. Положение радикально изменилось с появлением алгоритмов равномерной аппроксимации, основанных на сведении к задаче линейного программирования. Для решения последней существует весьма эффективный симплекс-метод. В связи с этим интересно рассмотреть вопрос о соотношении точности равномерного и среднеквадратичного приближений исходной функции функциями заданного вида.

Введем следующие обозначения:

$C[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций;

$M_n$ — множество, состоящее из $n+1$ равноотстоящих точек отрезка $[a,b]$, $M_n=\{a+i(b-a)/n\}$, $i=0,1,\dots,n$;

$M_\infty$ — отрезок $[a,b]$;

$\|f\|_n=\max\limits_{x\in M_n}|f(x)|$, $\|f\|_\infty=\max\limits_{x\in M_\infty}|f(x)|$ — нормы на $C[a,b]$;

$V_m$ — пространство полиномов степени $m$;

$Q_{m,n}(f)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения на $M_n$ для $f\in C[a,b]$;

$Q_m(f)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения на $M_n$ для $f\in C[a,b]$;

$\varepsilon_T^{m,n}(f)$ — ошибка равномерного приближения на $M_n$,

$$\varepsilon_T^{m,n}(f)=\max_{x\in M_n}|f(x)-Q_{m,n}(x)|;$$

$\varepsilon_T^m(f) = \varepsilon_T^{m,\infty}(f)$ — ошибка равномерного приближения на $M_\infty$,

$$\varepsilon_T^m(f) = \max_{x \in M} |f(x) - Q_{m,n}(x)|;$$

$\bar{Q}_{m,n}(f)$ — многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения на $M_n$ для $f \in C[a, b]$;

$\bar{Q}_m(f)$ — многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения на $M_\infty$ для $f \in C[a, b]$;

$\varepsilon_L^{m,n}(f)$ — чебышевская ошибка на $M_n$ полинома $\bar{Q}_{m,n}$;

$\varepsilon_L^m(f) = \varepsilon_L^{m,\infty}(f)$ — чебышевская ошибка на $M_\infty$ полинома $\bar{Q}_m$.

В работе [8] показано, что справедливо следующее неравенство:

$$\varepsilon_L^m(f) \leqslant 1 + \varepsilon_T^m(f) \max_{x \in M_\infty} \int_a^b \omega(y) \left| \sum_{i=0}^m \Phi_i(x) \Phi_i(y) \right| dy, \tag{1}$$

где $\Phi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ — ортонормированная система полиномов с весом $\omega$ на отрезке $[a, b]$, т. е. $\int_a^b \omega(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x)\, dx = \delta_j^i$, где $\delta_j^i$ — символ Кронекера. Выражение $\max_{x \in M_\infty} \int_a^b \omega(y) \left| \sum_{i=0}^m \Phi_i(x) \Phi_i(y) \right| dy$ представляет собой чебышевскую норму оператора наилучшего среднеквадратичного приближения с весом $\omega$ полиномами степени $m$ на отрезке $[a, b]$. Аналогичная оценка может быть получена для аппроксимации функции $f$ на отрезке с помощью произвольного линейного оператора проектирования $B{:}C[a, b] \to V_m$. В этом случае для произвольной функции будет выполнено неравенство

$$\max_{x \in M_\alpha} |f(x) - Bf(x)| \leqslant \varepsilon_T^{m,\alpha}(f)(1 + \|B\|_\alpha). \tag{2}$$

Параметр $\alpha$ в (2) может принимать конечные натуральные значения и значение $\alpha = \infty$. Таким образом, приведенная оценка погрешности может быть применена для непрерывной и для дискретной аппроксимаций.

В случае непрерывного приближения функции $f$ на отрезке $[a, b]$ эта оценка не может быть улучшена [1], т. е. при $\alpha = \infty$ величина $1 + \|B\|_\alpha$ в неравенстве (2) не может быть заменена меньшим числом. Приведя отрезок $[a, b]$ к стандартному интервалу $[-1, 1]$, для $\omega(x) = 1$ получаем

$$\varepsilon_L^m(f) \leqslant \left(1 + \max_{x \in [-1, 1]} \int_{-1}^1 \left| \sum_{i=0}^m \frac{1}{2i+1} P_i(x) P_i(y) \right| dy \right) \varepsilon_T^m(f), \tag{3}$$

где $P_i$ — многочлен Лежандра.

Для случая дискретной аппроксимации на множестве $M_n$ норма оператора дискретного среднеквадратичного приближения полиномами степени $m$ может быть выражена через полиномы, ортогональные на дискретном множестве точек. Путем замены аргумента $t = n(x - a)/(b - a)$ множество $M_n$ взаимно однозначно отображается на множество $\{0, 1, \ldots, n\}$, на котором ортогональную систему функций образуют полиномы Чебышева

$$P_{k,n}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i C_k^i C_{k+1}^i}{(n)_i} (x)_i, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Вычислим норму оператора дискретного среднеквадратичного приближения и подставим полученное значение в (2):

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) \leqslant \left(1 + \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{l=0}^{m} \alpha_l P_{l,n}(x) P_{l,n}(k) \right|\right) \varepsilon_T^{m,n}(f), \qquad (5)$$

где $\alpha_l = (2l+1)(n)_l/(n+l+1)(n+l)_l$.

Оценка (5) аналогична оценке (1) для ошибки непрерывной аппроксимации, но в дискретном случае эта оценка не точна; более того, не достигается ни для какой функции $f$. Рассмотрим для примера функцию $f$, заданную на множестве $M_n = \{0, 1, 2\}$, и будем аппроксимировать ее линейной функцией ($n=3$, $m=1$). Тогда

$$\varepsilon_T^{1,3}(f) = \frac{1}{4}|f_0 - 2f_1 + f_2|, \qquad \varepsilon_L^{1,3}(f) = \frac{1}{3}|f_0 - 2f_1 + f_2|,$$
$$\varepsilon_L^{1,3}(f) = \frac{4}{3}\varepsilon_T^{1,3}(f). \qquad (6)$$

Для этого случая из (5) следует, что $\varepsilon_L^{1,3}(f) \leqslant \frac{7}{3}\varepsilon_T^{1,3}(f)$. Если обозначим

$$K(m,n) = 1 + \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{l=0}^{m} \alpha_l P_{l,n}(x) P_{l,n}(k) \right|, \qquad (7)$$

$$L(m,n) = \inf\{d \mid \forall f \in C[a,b], \varepsilon_L^{m,n}(f) \leqslant d\varepsilon_T^{m,n}(f)\}, \qquad (8)$$

то, согласно (5),

$$L(m,n) \leqslant K(m,n). \qquad (9)$$

Оценка (9) для $L(m, n)$ является точной только асимптотически. Покажем, что и в дискретном случае можно получить неулучшаемую оценку погрешности среднеквадратичного приближения, т. е. вычислим точное значение $L(m, n)$. Для этого докажем следующее утверждение. Для $f \in C[a, b]$ и натуральных $m$ и $n$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) \leqslant \max_{i \in M_n} \left( \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{l=0}^{m} \alpha_l P_{l,n}(i) P_{l,n}(k) - \delta_k^i \right|\right) \varepsilon_T^{m,n}(f) \qquad (10)$$

и это неравенство не может быть улучшено, т. е.

$$L(m,n) = \max_{i \in M_n} \left( \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{l=0}^{m} \alpha_l P_{l,n}(i) P_{l,n}(k) - \delta_k^i \right|\right). \qquad (11)$$

Известно, что полином наилучшего дискретного среднеквадратичного приближения $\overline{Q}_{m,n}(f)$ может быть получен с помощью разложения $f$ в ряд Фурье по системе ортогональных функций $P_{l,n}(x)$. Вычисляя коэффициенты ряда Фурье и суммируя, получим

$$\overline{Q}_{m,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \alpha_k f(l) P_{k,n}(x) P_{k,n}(l) = \sum_{l=0}^{n} f(l) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k P_{k,n}(x) P_{k,n}(l) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} f(l) \lambda_l^x;$$

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) = \max_{x=0,1,\ldots,n} |f(x) - \overline{Q}_{m,n}(f)(x)| =$$
$$= \max_{x=0,1,\ldots,n} |f(x) - Q_{m,n}(x) + Q_{m,n}(x) - \overline{Q}_{m,n}(f)(x)| =$$

$$= \max_{x=0,1,\ldots,n} | f(x) - Q_{m,n}(x) - \overline{Q}_{m,n}(f - Q_{m,n})(x) | =$$

$$= \max_{x=0,1,\ldots,n} \left| \sum_{l=0}^{n} (f(l) - Q_{m,n}(l)) \delta_l^x - \sum_{l=0}^{n} (f(l) - Q_{m,n}(l)) \lambda_l^x \right| =$$

$$= \max_{x=0,1,\ldots,n} \left| \sum_{l=0}^{n} (f(l) - Q_{m,n}(l)) (\lambda_l^x - \delta_l^x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | f(l) - Q_{m,n}(l) | \, | \lambda_l^x - \delta_l^x | \leqslant \varepsilon_T^{m,n}(f) \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x |;$$

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) \leqslant \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x | \, \varepsilon_T^{m,n}(f). \tag{12}$$

Таким образом,

$$L(m, n) \leqslant \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x |. \tag{13}$$

Чтобы доказать обратное неравенство, покажем, что для некоторой функции $f \in C[a, b]$ выполняется точное равенство

$$\varepsilon_T^{m,n}(f) = \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x | \, \varepsilon_T^{m,n}(f). \tag{14}$$

Пусть максимальное значение $\sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x |$ достигается при $x = x_0$. Примем $f(l) = \operatorname{sign}(\lambda_l^{x_0} - \delta_l^{x_0})$, тогда

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) \max_{x=0,1,\ldots,n} \left| \sum_{l=0}^{n} f(l) (\lambda_l^x - \delta_l^x) \right| \geqslant \left| \sum_{l=0}^{n} f(l) (\lambda_l^{x_0} - \delta_l^{x_0}) \right| = \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^{x_0} - \delta_l^{x_0} | \geqslant$$

$$\geqslant \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x | \, \varepsilon_T^{m,n}(f).$$

Таким образом, оценка (12) не может быть улучшена, и для $L(m, n)$ справедливо выражение

$$L(m, n) = \max_{x=0,1,\ldots,n} \sum_{l=0}^{n} | \lambda_l^x - \delta_l^x |. \tag{15}$$

Окончательно получаем

$$\varepsilon_L^{m,n}(f) \leqslant L(m, n) \, \varepsilon_T^{m,n}(f). \tag{16}$$

Для приведенного примера аппроксимации функции, определенной на множестве $M_n = \{0, 1, 2\}$, полиномом первой степени из (15) и (16) следует соотношение $\varepsilon_L^{1,3}(f) \leqslant \frac{4}{3} \varepsilon_T^{1,3}(f)$, которое согласуется с (6). Результаты вычисления постоянных $K(m, n)$ и $L(m, n)$ для различных $m$ и $n$ представлены в табл. 1. При фиксированном значении $n$ функции $L(m, n)$ и $K(m, n)$ как функции от $m$ ведут себя крайне нерегулярно. Например, при $n = 100$ значения $L(m, n)$ при $m$, равном 20, 25, 30 и 40, приблизительно одинаковы. То же самое отмечается для $K(m, n)$. Из сопоставления функций $L(m, n)$ и $K(m, n)$ видно, что для конкретных значений $m$ и $n$ оценка $K(m, n)$ сильно завышена, несмотря на то что

$$\lim_{n \to \infty} (L(m, n) - K(m, n)) = 0.$$

Обратимся к сравнению точности построенных с помощью машинных алгоритмов дискретных полиномиальных аппроксимаций астрономических эфемерид. Заметим, что оценка $L(m, n)$ при наличии программы построения полинома наилучшего равномерного приближения может быть использована для проверки надежности программ получения наилучшего среднеквадратичного приближения. А именно: если для какой-либо функции $f$ известно, что ошибка полинома наилучшей равномерной аппроксимации равна $\varepsilon$, то тестируемая программа должна строить среднеквадратичное приближение с ошибкой, существенно не превосходящей значение $L(m, n)\varepsilon$. Известно, что нахождение коэффициентов аппроксимирующей функции, которая является наилучшим приближением в смысле наименьших квадратов, приводит к решению системы нормальных уравнений. Имеющаяся в стандартном математическом обеспечении машины БЭСМ-6 программа LSQ реализует этот алгоритм. Для получения полиномов наилучшего равномерного приближения использовался алгоритм, в котором задача дискретной равномерной аппроксимации сводится к задаче линейного программирования [2—4]. За исходные функции взяты таблицы прямоугольных гелиоцентрических координат Венеры в интервале 200 сут с шагом 8 сут. Приближение строилось в виде $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, поскольку именно в такой форме представляется искомый полином в результате работы программы LSQ.

*Таблица 1.* **Значения постоянных $L(m, n)$ и $K(m, n)$**

| Степень полинома | Число точек | $L(m, n)$ | $K(m, n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1.64 | 2.48 |
| | 16 | 2.13 | 2.58 |
| | 30 | 2.40 | 2.68 |
| | 100 | 2.57 | 2.65 |
| | 1000 | 2.657 | 2.665 |
| 5 | 100 | 3.33 | 3.94 |
| | 1000 | 4.210 | 4.281 |
| 10 | 100 | 2.90 | 4.01 |
| | 1000 | 5.261 | 5.489 |
| 15 | 100 | 3.07 | 3.91 |
| | 1000 | 5.770 | 6.222 |
| 20 | 100 | 2.81 | 3.98 |
| 25 | 100 | 2.81 | 4.08 |
| 30 | 100 | 2.80 | 3.97 |
| 40 | 100 | 2.79 | 4.09 |

*Таблица 2.* **Точность равномерной и среднеквадратичной дискретных полиномиальных аппроксимаций**

| Степень полинома | $\varepsilon_L^{m,n}(f)$ | $\varepsilon_T^{m,n}(f)$ | $\varepsilon_L^{m,n}/\varepsilon_T^{m,n}$ | $L(m, n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | $2.15\cdot10^{-3}$ | $1.62\cdot10^{-3}$ | 1.33 | 2.27 |
| | $1.29\cdot10^{-3}$ | $9.01\cdot10^{-4}$ | 1.43 | |
| | $4.73\cdot10^{-4}$ | $3.19\cdot10^{-4}$ | 1.48 | |
| 7 | $2.06\cdot10^{-4}$ | $1.44\cdot10^{-4}$ | 1.43 | 2.28 |
| | $2.80\cdot10^{-4}$ | $1.79\cdot10^{-4}$ | 1.56 | |
| | $1.39\cdot10^{-4}$ | $8.93\cdot10^{-5}$ | 1.56 | |
| 8 | $1.19\cdot10^{-5}$ | $3.59\cdot10^{-6}$ | 3.31 | 2.25 |
| | $3.65\cdot10^{-5}$ | $1.66\cdot10^{-5}$ | 2.20 | |
| | $1.57\cdot10^{-5}$ | $7.39\cdot10^{-6}$ | 2.12 | |
| 9 | $1.81\cdot10^{-5}$ | $2.70\cdot10^{-6}$ | 6.70 | 2.25 |
| | $3.12\cdot10^{-5}$ | $6.70\cdot10^{-6}$ | 4.66 | |
| | $1.91\cdot10^{-5}$ | $3.00\cdot10^{-6}$ | 6.37 | |
| 10 | $4.10\cdot10^{-5}$ | $2.60\cdot10^{-6}$ | 15.77 | 2.25 |
| | $1.75\cdot10^{-5}$ | $8.75\cdot10^{-7}$ | 20.00 | |
| | $5.17\cdot10^{-6}$ | $2.88\cdot10^{-7}$ | 17.95 | |
| 11 | $9.20\cdot10^{-5}$ | $2.15\cdot10^{-7}$ | 427.91 | 2.20 |
| | $1.13\cdot10^{-4}$ | $5.51\cdot10^{-7}$ | 205.08 | |
| | $4.43\cdot10^{-5}$ | $2.58\cdot10^{-7}$ | 171.71 | |

В табл. 2 приведены ошибки $\varepsilon_L^{m,n}(f)$ и $\varepsilon_T^{m,n}(f)$ соответствующих полиномов. Полученные данные свидетельствуют о том, что начиная с девятой степени аппроксимирующего полинома, библиотечная программа LSQ даст результаты, которые не согласуются с теоретическими оценками. Более того, чебышевская ошибка среднеквадратичной аппроксимации возрастает с увеличением степени полинома. Аналогичные результаты, а именно: возрастание величины $\varepsilon_L^{m,n}(f)$, начиная с седьмой — девятой степени приближающего многочлена, получаются и при аппроксимации других функций. Увеличение количества точек в заданном интервале в исходной таблице значений функции резко увеличивает ошибки аппроксимации. Причиной возрастания чебышевской ошибки приближения с повышением степени аппроксимирующего полинома и числа исходных табличных значений функции является плохая обусловленность матрицы левых частей системы нормальных уравнений для нахождения коэффициентов искомого многочлена. Плохая обусловленность матрицы приводит к тому, что ошибки округления, появляющиеся в процессе решения, быстро сказываются на вычисляемых коэффициентах. Именно этот эффект и проявился в данном случае.

Нами составлена программа построения полинома среднеквадратичного приближения, в которой за базисные функции принимаются полиномы Чебышева 1-го рода. Полученная система уравнений для определения коэффициентов аппроксимирующей функции решалась затем двумя способами с помощью стандартных программ LINVER и MATIN1. За исходные функции и в этом случае взяты прямоугольные гелиоцентрические координаты Венеры в интервале 200 сут.

*Таблица 3.* **Сравнение точности равномерной и среднеквадратичной (полученных с помощью программ LINVER и MATIN 1) дискретных полиномиальных аппроксимаций**

| Число табличных значений | Степень полинома | $\varepsilon_T^{m,n}$ | $\varepsilon_L^{m,n}/\varepsilon_T^{m,n}$ (LINVER) | $\varepsilon_L^{m,n}/\varepsilon_T^{m,n}$ (MATIN 1) | $L$ $(m, n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 10 | $2.60\cdot10^{-6}$ | 1.30 | 1.30 | 2.25 |
| | | $8.75\cdot10^{-7}$ | 1.57 | 1.57 | |
| | | $2.88\cdot10^{-7}$ | 1.50 | 1.50 | |
| | 20 | $1.76\cdot10^{-10}$ | $3.6\cdot10^{2}$ | 1.82 | 1.85 |
| | | $1.93\cdot10^{-10}$ | $6.1\cdot10^{2}$ | 1.99 | |
| | | $1.05\cdot10^{-10}$ | $5.0\cdot10^{2}$ | 1.62 | |
| 51 | 10 | $3.04\cdot10^{-6}$ | $2.2\cdot10^{3}$ | 1.55 | 2.61 |
| | | $1.01\cdot10^{-6}$ | $3.8\cdot10^{3}$ | 1.87 | |
| | | $3.47\cdot10^{-7}$ | $3.9\cdot10^{3}$ | 1.71 | |
| | 20 | $4.33\cdot10^{-10}$ | $2.0\cdot10^{7}$ | 1.43 | 2.52 |
| | | $3.50\cdot10^{-10}$ | $1.2\cdot10^{7}$ | 1.45 | |
| | | $1.68\cdot10^{-10}$ | $7.8\cdot10^{6}$ | 1.39 | |

Результаты, приведенные в табл. 3, показывают, что программа LINVER, которая, согласно описаниям, предназначена для решения плохо обусловленных систем, может быть использована только тогда, когда число значений аппроксимируемой функции невелико и степень приближающего полинома невысока. Увеличение степени полинома приводит к существенному уменьшению точности аппроксимации. Еще резче эффект потери точности аппроксимации проявляется при увеличении числа исходных значений функции в заданном интервале. Результаты табл. 3 подтверждаются при приближении других функций.

В табл. 4 представлены данные о точности аппроксимации геоцентрических прямоугольных координат 12-часового спутника Земли типа «Молния» со значением эксцентриситета орбиты $e=0.75$ в интервале одного оборота. Для получения среднеквадратичного приближения использовалась программа решения систем линейных уравнений MATIN1. Следует обратить внимание на один важный фактор — машинное время, необходимое для построения аппроксимаций. Подобное соотношение машинного времени — следствие того, что для решения плохо обусловленной системы нормальных уравнений требуется применение методов, в которых используются дополнительные преобразования исходной матрицы, что приводит к возрастанию вычислительной сложности задачи.

*Таблица 4.* **Точность полиномиального приближения координат 12-часового спутника Земли в интервале одного оборота**

| Число табличных значений | Степень полинома | $\varepsilon_T^{m,\,n}$ | $\varepsilon_L^{m,\,n}/\varepsilon_T^{m,\,n}$ | $L\,(m,\,n)$ | Время БЭСМ-6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Равномерн. аппроксимация | Среднеквадр. аппроксимация |
| 51 | 14 | $2.6\cdot10^{-3}$ | 1.85 | 2.55 | 39 | 52 |
| 101 | | $7.2\cdot10^{-3}$ | 2.22 | 2.98 | 41 | 1 07 |
| 201 | | $8.4\cdot10^{-3}$ | 1.79 | 3.33 | 50 | 1 50 |
| 51 | 24 | $5.6\cdot10^{-5}$ | 1.25 | 2.44 | 50 | 1 46 |
| 101 | | $3.5\cdot10^{-4}$ | 2.31 | 2.86 | 1 04 | 2 59 |
| 201 | | $4.3\cdot10^{-4}$ | 2.33 | 3.60 | 1 26 | 5 05 |

*Таблица 5.* **Степени полиномов дискретного среднеквадратичного и равномерного приближений для 12-часового спутника Земли в интервале одного оборота**

| Число табличных значений | Степень полинома | | Точность приближений |
|---|---|---|---|
| | Среднеквадр. приближение | Равномерн. приближение | |
| 51 | 17 | 14 | $2.6\cdot10^{-3}$ |
| | 25 | 24 | $5.6\cdot10^{-5}$ |
| 101 | 18 | 14 | $7.2\cdot10^{-3}$ |
| | 25 | 24 | $3.5\cdot10^{-4}$ |
| 201 | 18 | 14 | $8.4\cdot10^{-3}$ |
| | 25 | 24 | $4.3\cdot10^{-4}$ |

В то же время симплекс-метод, использованный для построения наилучшего дискретного равномерного приближения, на большинстве начальных данных работает очень быстро и устойчив по отношению к малым возмущениям начальных данных. Полученная оценка (16) и данные табл. 1, в которой приведены числовые значения этой оценки для различных степеней аппроксимирующего полинома, показывают, что наилучшее среднеквадратичное приближение по сравнению с наилучшим равномерным приближением дает вполне удовлетворительные по точности результаты. В действительности, как видим, при аппроксимации астрономических эфемерид это отношение еще меньше, чем полученная теоретическая оценка. Однако в тех случаях, когда необходимо гарантировать заданную точность, количество коэффициентов в полиноме наилучшего среднеквадратичного приближения может быть заметно большим, чем в полиноме наилучшего равномерного приближения. Иллюстрацией могут служить данные табл. 5, в которой для аппроксимации геоцентрических прямоугольных координат 12-часового спутника Земли в интервале одного оборота приведены степени полиномов наилучшего среднеквадратичного и равномерного приближений, обеспечивающие заданную точность.

Таким образом, практическая реализация на ЭВМ методов среднеквадратичной аппроксимации в силу плохой обусловленности матрицы нормальных уравнений оказывается сложной задачей. Программы, обеспечивающие достаточную точность построения полиномов наилучшего среднеквадратичного приближения, требуют больше машинного времени, чем программы получения полиномов наилучшего равномерного приближения, основанные на сведении к задаче линейного программирования.

Чтобы обеспечить заданную точность аппроксимации, для полинома равномерного приближения, как правило, требуется меньшая степень, чем для среднеквадратичного. Это весьма существенно в задаче компактного представления астрономических эфемерид.

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.— М.: Наука, 1983.—384 с.
2. *Хотимская Е. З.* Аппроксимация координат планет Солнечной системы полиномами Чебышева // Письма в Астрон. журн.— 1980.—6, № 2.— С. 120—122.
3. *Хотимская Е. З.* Использование равномерной аппроксимации координат возмущающих тел в методе численного интегрирования Тейлора—Стеффенсена // Бюл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР.— 1982.—15, № 3.— С. 182—189.
4. *Хотимская Е. З.* Равномерная аппроксимация в задачах небесной механики и численное интегрирование уравнений движения кометы Галлея // Астрономия и геодезия.— 1984.— Вып. 12.— С. 54—59.
5. *Deprit A.* Construction d'éphémérides condensées // C. r. Acad. sci. B.— 1974.—278, N 24.— P. 1055—1057.
6. *Deprit A., Poplaschek W., Deprit-Bartholomé A.* Compression of ephemerides // Celest. Mech.— 1975.—11.— P. 53—58.
7. *Deprit A., Poplaschek W* Compression of ephemerides by discrete Chebyshev approximation // AIAA Paper.— 1978.— N 1403.— P. 1—9.
8. *Powell M. J. D.* On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria // Comput. J.— 1967.—9, N 4.— P. 404—407.

Ин-т теорет. астрономии АН СССР,
Ленинград

Поступила в редакцию 19.05.86,
после доработки 13.10.86

## РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 52—64

**ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛЯРИМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ЮПИТЕРА / Мищенко М. И.**

(*Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики; ИТФ-87-22Р*)

Анализируются результаты наземных поляриметрических наблюдений центра диска Юпитера, выполненных в ГАО АН УССР. Наблюдения проводились с помощью узких светофильтров в диапазоне длин волн 0.423—0.798 мкм. Показано, что результаты этих наблюдений в совокупности с данными спектрофотометрических наблюдений центра диска Юпитера могут быть интерпретированы в рамках модели атмосферы в виде однородного полубесконечного слоя, образованного полидисперсной системой сферических частиц. Вклад газовой составляющей в характеристики отраженного атмосферой излучения незначителен. Определены основные свойства аэрозольных частиц верхнего облачного слоя атмосферы Юпитера: эффективный радиус частиц $r_{eff}=0.385\pm0.030$ мкм, действительная часть показателя преломления вещества частиц $n_r=1.386\pm0.005$.

Все результаты получены на основе строгих расчетов поляризации на ЭВМ с учетом многократного рассеяния. Подробно описана методика этих расчетов.