УДК 52—64

Приближение 3×3 в *CP*-представлении вектора Стокса в задаче переноса поляризованного излучения в планетных атмосферах

М. И. Мищенко

Приведены основные формулы приближения 3×3 в теории переноса поляризованного излучения в изотропных средах, записанные в *CP*-представлении вектора Стокса. Показано, что при разложении поля диффузного излучения и фазовой матрицы в ряды Фурье по азимуту эти формулы более простые, чем аналогичные выражения в (*I*, *Q*, *U*)-представлении, и не требуют работы с комплексными числами, что очень удобно при расчетах на ЭВМ.

CP-REPRESENTATION OF THE STOKES VECTOR IN THE THREE-BY-THREE APPROXIMATION RELEVANT TO THE TRANSFER OF POLARIZED LIGHT IN PLANETARY ATMOSPHERES, by Mishchenko M. I.— Three-by-three approximation is considered relevant to the transfer of polarized light in an isotropic medium. The main formulae are derived in terms of the *CP*-representation for the Stokes vector. It is shown that when the intensity vector and the phase matrix are expanded in a Fourier series the formulae are more convenient than those in the (*I*, *Q*, *U*)-representation and require no complex arithmetic in computer calculations.

Как известно, задача переноса поляризованного излучения в изотропных средах (какими обычно считаются планетные атмосферы) наиболее естественно формулируется в *CP*-представлении (5) вектора Стокса [10], и именно в этом представлении были получены основные аналитические результаты. С другой стороны, при реализации численных методов, как в [5], так и в более ранних работах по методу удвоений [6, 8], использован обычный набор параметров Стокса (*I*, *Q*, *U*, *V*), что объясняется двумя причинами. Во-первых, в (*I*, *Q*, *U*, *V*)-представлении приходится иметь дело только с действительными числами, что удобно при расчетах на ЭВМ; во-вторых, очень просто реализуется так называемое приближение 3×3, в рамках которого пренебрегают малым параметром *V* и тем самым существенно понижают порядок решаемой системы уравнений переноса. Однако использование при этом важных результатов, полученных в *CP*-представлении (таких, например, как разложение фазовой матрицы в ряд Фурье по азимуту с учетом теоремы сложения для обобщенных сферических функций), требует нетривиальных математических преобразований [5, 9, 11], что в свою очередь заметно усложняет программы для машинных расчетов.

В настоящей работе показано, что достаточно эффективным подходом при численном решении задач переноса поляризованного излучения является реализация приближения 3×3 в рамках *CP*-представления вектора Стокса. С одной стороны, такой подход допускает непосредственное использование полученных в *CP*-представлении аналитических результатов, а с другой — не только понижает на единицу порядок решаемой системы уравнений, но и позволяет избежать работы с комплексными числами, так как азимутальные гармоники фазовой матрицы (и, следовательно, матриц отражения и пропускания) оказываются вещественными и сохраняют при этом основные свойства симметрии.

Рассмотрим плоскопараллельную однородную изотропную атмосферу, на верхнюю границу которой в направлении (μ_0, φ_0) падает поток $\pi\hat{S}$ поляризованного излучения. Здесь μ — косинус угла между направлением распространения света и внутренней нормалью к границе среды, φ — азимут. В дальнейшем считается $\varphi_0=0$. Уравнение переноса для вектора Стокса $\hat{I}(\tau, \mu, \varphi)$ диффузного излучения имеет вид [4]

$$\mu \frac{d\hat{I}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = -\hat{I}(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} d\varphi' \hat{Z}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \hat{I}(\tau, \mu', \varphi') + \frac{\omega}{4} \exp(-\tau/\mu_0) \hat{Z}(\mu, \mu_0, \varphi) \hat{S}, \quad (1)$$

где τ — оптическая глубина; ω — альбедо однократного рассеяния; $\hat{Z}(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ — фазовая матрица. Разлагая $\hat{I}$ и $\hat{Z}$ в ряды Фурье по азимуту

$$\hat{I}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \hat{I}_s(\tau, \mu) \exp(-is\varphi), \quad (2)$$

$$\hat{Z}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \hat{Z}_s(\mu, \mu') \exp(-is(\varphi - \varphi')), \quad (3)$$

получим следующие уравнения для отдельных фурье-компонент [3, 10]:

$$\mu \frac{d\hat{I}_s(\tau, \mu)}{d\tau} = -\hat{I}_s(\tau, \mu) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \hat{Z}_s(\mu, \mu') \hat{I}_s(\tau, \mu') + \frac{\omega}{4} \exp(-\tau/\mu_0) \hat{Z}_s(\mu, \mu_0) \hat{S}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что вектор $\hat{I}$ задан в CP-представлении [9, 10]

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_0 \\ I_{-0} \\ I_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q + iU \\ I + V \\ I - V \\ Q - iU \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Разлагая элементы соответствующей матрицы рассеяния в ряды по обобщенным сферическим функциям (ОСФ) $P^l_{m,n}(u)$

$$(\hat{F}_{CP}(u))_{m,n} = \sum_{l=\max(|m|,|n|)}^{N} g^l_{m,n} P^l_{m,n}(u), \quad m, n = 2, 0, -0, -2, \quad (6)$$

где u — косинус угла рассеяния, и используя теорему сложения для ОСФ [2], получим [3, 10]

$$\hat{Z}_s(\mu, \mu') = (-1)^s \sum_{l=|s|}^{N} \hat{P}^l_s(\mu) \hat{G}^l \hat{P}^l_s(\mu'), \quad (7)$$

где $(\hat{G}^l)_{m,n} = g^l_{m,n}$; $(\hat{P}^l_s(\mu))_{m,n} = P^l_{m,s}(\mu)\, \delta_{m,n}$; $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера. Справедливы следующие соотношения симметрии [3]:

$$\hat{G}^l = (\hat{G}^l)^{\mathrm{T}} = \hat{M}\hat{G}^l\hat{M}, \qquad (\hat{M})_{m,n} = \delta_{m,-n}; \quad (8)$$

$$g^l_{2,0} = (g^l_{-2,0})^*; \qquad g^l_{m,m},\ g^l_{m,-m} = \mathrm{real}; \quad (9)$$

$$\hat{Z}_s(\mu, \mu') = \hat{Z}^{\mathrm{T}}_s(\mu', \mu) = \hat{Z}_{-s}(-\mu, -\mu') = \hat{M}\hat{Z}_s(-\mu, -\mu')\hat{M}. \quad (10)$$

Звездочка означает комплексное сопряжение, верхний индекс Т — транспонирование матрицы.

В представлении (I, Q, U, V) вектора Стокса матрица рассеяния света изотропной средой имеет вид [1]

$$\hat{F}(u) = \begin{bmatrix} a_1(u) & b_1(u) & 0 & 0 \\ b_1(u) & a_2(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(u) & b_2(u) \\ 0 & 0 & -b_2(u) & a_4(u) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где u — косинус угла рассеяния. Так как значение параметра V излучения, рассеянного планетными атмосферами, очень мало, и обычно не стоит специальная задача его расчета, на практике часто используют приближение 3×3. Его сущность заключается в том, что элемент $b_2(u)$ матрицы (11) полагают тождественно равным нулю [7]. При этом получают замкнутую систему уравнений переноса для параметров (I, Q, U) и отдельное уравнение для параметра V. Качественно приближение 3×3 можно обосновать тем, что элемент $b_2(u)$ не дает вклада в рассеяние первого порядка (при неполяризованном падающем излучении) и обычно мал по сравнению с диагональными элементами. Приближение 3×3 становится строгим для очень малых частиц (рэлеевское рассеяние), однако дает хорошие результаты и для сравнительно крупных частиц, которым соответствуют значения дифракционного параметра $x=2\pi r/\lambda$ (r — радиус частиц, λ — длина волны света) порядка нескольких сотен. В частности, в [7] показано, что если падающее излучение неполяризовано, то относительная погрешность в расчетах степени поляризации $\sqrt{Q^2+U^2}/I$ рассеянного на таких частицах излучения не превышает 10^{-4}. Аналогичные результаты приведены в [5]. В CP-представлении матрице рассеяния (11) соответствует матрица [9, 10]

$$\hat{F}_{CP} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_1+ib_2 & b_1-ib_2 & a_2-a_3 \\ b_1+ib_2 & a_1+a_4 & a_1-a_4 & b_1-ib_2 \\ b_1-ib_2 & a_1-a_4 & a_1+a_4 & b_1+ib_2 \\ a_2-a_3 & b_1-ib_2 & b_1+ib_2 & a_2+a_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(аргумент u для краткости опущен). Полагая в (12) $b_2(u)\equiv 0$, имеем в дополнение к (9)

$$g^l_{2,0} = g^l_{-2,0} = \text{real}. \tag{13}$$

Определим матрицу $\hat{A}$ и вектор $\hat{i}_s(\tau, \mu)$ посредством соотношений

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\hat{i}_s(\tau, \mu) = \hat{A}\hat{I}_s(\tau, \mu). \tag{15}$$

Легко видеть, что такое преобразование вектора $\hat{I}_s$ оставляет неизменными элементы $(\hat{I}_s)_2$ и $(\hat{I}_s)_{-2}$, тогда как второй элемент вектора $\hat{i}_s$ становится равным (с точностью до множителя $\sqrt{2}/2$) s-й азимутальной гармонике интенсивности излучения. Из (8), (9) и (13) следует, что

$$\hat{A}\hat{G}^l = \hat{g}^l\hat{A}, \quad \hat{A}\hat{P}^l_s(\mu) = \hat{p}^l_s(\mu)\hat{A}, \tag{16}$$

где

$$\hat{g}^l = \begin{bmatrix} g^l_{2,2} & \sqrt{2}g^l_{2,0} & g^l_{2,-2} \\ \sqrt{2}g^l_{2,0} & g^l_{0,0}+g^l_{0,-0} & \sqrt{2}g^l_{2,0} \\ g^l_{2,-2} & \sqrt{2}g^l_{2,0} & g^l_{2,2} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\hat{p}^l_s(\mu) = \mathrm{diag}\,(P^l_{s,2}(\mu), P^l_{s,0}(\mu), P^l_{s,-2}(\mu)). \tag{18}$$

Очевидно, матрицы $\hat{g}^l$ удовлетворяют тем же соотношениям симметрии (8), что и матрицы $\hat{G}^l$, чем и объясняется конкретный выбор (14) матрицы $\hat{A}$ вместо, например, более простой матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая уравнение (4) слева на $\hat{A}$, с учетом (16) имеем

$$\mu \frac{d\hat{i}_s(\tau, \mu)}{d\tau} = -\hat{i}_s(\tau, \mu) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \hat{z}_s(\mu, \mu') \hat{i}_s(\tau, \mu') + \\ + \frac{\omega}{4} \exp(-\tau/\mu_0) \hat{z}_s(\mu, \mu_0) \hat{s}, \tag{19}$$

где

$$\hat{z}_s(\mu, \mu') = (-1)^s \sum_{l=|s|}^{N} \hat{p}_s^l(\mu) \hat{g}^l \hat{p}_s^l(\mu'), \quad \hat{s} = \hat{A}\hat{S}. \tag{20}$$

Заменяя матрицу $\hat{A}$ на матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и проводя аналогичные выкладки, нетрудно получить отдельное скалярное уравнение переноса для величины $v_s = (\hat{I}_s)_0 - (\hat{I}_s)_{-0}$, которая является s-й азимутальной гармоникой параметра V. Поскольку солнечное излучение неполяризовано, при интерпретации поляриметрических наблюдений планетных атмосфер это уравнение решать не приходится.

Важное достоинство изложенного подхода заключается в том, что формулы (19) и (20) практически не отличаются от строгих выражений (4) и (7); в частности, остаются диагональными матрицы $\hat{p}_s^l(\mu)$, участвующие в разложении (20) азимутальных гармоник фазовой матрицы, что значительно облегчает работу с ними (например, упрощает запись рекуррентных соотношений для этих матриц) и позволяет почти без изменений использовать аналитический аппарат, развитый в *CP*-представлении. Разница между строгими формулами и формулами, записанными в приближении 3×3, заключается по существу лишь в том, что исчезло различие между индексами 0 и —0 ($I_0 \approx I_{-0} \approx I/2$), в силу чего размерность задачи понизилась на единицу. Такое упрощение является следствием конкретной структуры матрицы рассеяния (12), которая при $b_2(u) \equiv 0$ допускает преобразование (15), затрагивающее только второй и третий элементы вектора $\hat{I}_s$, тогда как первый и четвертый элементы остаются неизменными. В результате в приближении 3×3 вместо набора параметров Стокса (I, Q, U) используется набор $(Q+iU, I/\sqrt{2}, Q-iU)$.

Легко проверить, что матрицы $\hat{z}_s(\mu, \mu')$ обладают теми же свойствами симметрии (10), что и матрицы $\hat{Z}_s(\mu, \mu')$. Другое важное свойство этих матриц — их вещественность, которая следует из (13), (20) и вещественности произведений ОСФ, входящих в (20) [2]. Можно показать, что вещественность матриц $\hat{z}_s(\mu, \mu')$ приводит в свою очередь к вещественности азимутальных гармоник матриц отражения и пропускания поляризованного света плоскопараллельной атмосферой, что намного упрощает реализацию численных методов их расчета. Кроме того, вещественность азимутальных гармоник фазовой матрицы позволяет решать уравнение (4) отдельно для действительной и мнимой частей вектора $\hat{i}_s(\tau, \mu)$.

Следует отметить, что уравнение переноса (4) для нулевой азимутальной гармоники поля излучения всегда можно расщепить на два отдельных векторных уравнения для пар [3]

$$\begin{bmatrix} (\hat{I}_0)_2 + (\hat{I}_0)_{-2} \\ (\hat{I}_0)_0 + (\hat{I}_0)_{-0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (\hat{I}_0)_2 - (\hat{I}_0)_{-2} \\ (\hat{I}_0)_0 - (\hat{I}_0)_{-0} \end{bmatrix}.$$

При интерпретации планетных наблюдений приходится решать только первое из этих уравнений, а использовать в этом случае приближение 3×3, разумеется, не имеет смысла.

Итак, формулы (15), (17)—(20) позволяют полностью решить задачу переноса поляризованного излучения в приближении 3×3 в *CP*-представлении вектора Стокса. С одной стороны, эти формулы позволяют избежать работы с комплексными числами, что очень удобно при машинных расчетах, с другой — они намного проще соответствующих формул, записанных в (I, Q, U)-представлении (см., например, [5, 11]) и позволяют непосредственно использовать аналитический аппарат, развитый в *CP*-представлении.

Приведенные выше формулы приближения 3×3 были использованы автором при составлении программы для расчета на ЭВМ матрицы отражения поляризованного света полубесконечной однородной атмосферой. Правильность программы проверялась, в частности, по значениям элементов второй азимутальной гармоники матрицы отражения, приведенным в [5, гл. 4] и рассчитанным с полной матрицей рассеяния размерами 4×4 для дымки L Дейрменджана. Сравнение этих данных с результатами, полученными в приближении 3×3, показало совпадение всех значащих цифр (максимальная абсолютная погрешность 10^{-5}) и тем самым лишний раз подтвердило справедливость приближения 3×3, которое обеспечивает точность, вполне достаточную для целей интерпретации, и более чем вдвое сокращает время счета. Конкретному изложению алгоритма расчета матрицы отражения и полученных результатов будет посвящена другая работа.

1. *ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—536 с.
2. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения.— М.: Физматгиз, 1958.—368 с.
3. *Домке Х.* Глубинный режим поляризованного света в полубесконечной атмосфере // Астрофизика.— 1974.—10, вып. 2.— С. 205—217.
4. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.—431 с.
5. *de Rooij W. A.* Reflection and transmission of polarized light by planetary atmospheres.— Utrecht: Drukkerij Elinkwijk B V., 1985.—241 p.
6. *Hansen J. E.* Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. Part I. The doubling method // J. Atmos. Sci.— 1971.—28, N 1.— P. 120—125.
7. *Hansen J. E.* Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. Part II. Sunlight reflected by terrestrial water clouds // Ibid.— 1971.—28, N 8.— P. 1400—1426.
8. *Hovenier J. W.* Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres // Astron. and Astrophys.— 1971.—13, N 1.— P. 7—29.
9. *Hovenier J. W., van der Mee C. V. M.* Fundamental relationships relevant to the transfer of polarized light in a scattering atmosphere // Ibid.— 1983.—128, N 1.— P. 1—16.
10. *Kuščer I., Ribarič M.* Matrix formalism in the theory of diffusion of light // Opt. acta.— 1959.—6, N 1.— P. 42—51.
11. *Siewert C. E.* On the equation of transfer relevant to the scattering of polarized light // Astrophys. J.— 1981.—245, N 3.— P. 1080—1086.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 26.06.86,
после доработки 18.08.86