

УДК 629.783+528.21/22

## Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей.

### I. Теоретические основы метода

А. Н. Марченко

Выполнено обобщение более ранних исследований по вопросам описания гравитационного потенциала планеты с помощью гравитационных мультиполей и его аппроксимации системой потенциалов точечных масс. Исследован определенный класс гармонических функций — потенциалов нецентральных мультиполей для описания гравитационного поля в глобальном и региональном (локальном) масштабах. Выделен важный подкласс гармонических функций — потенциалов радиальных мультиполей, получено рекуррентное соотношение для их вычисления, исследованы экстремальные свойства и распределение нулей потенциалов на сфере. Введены существенные параметры потенциалов радиальных мультиполей, описывающие их локальные свойства. Отмечена связь с существенными параметрами ковариационных функций возмущающего потенциала. С помощью преобразования инверсии показано, что обсуждаемый класс потенциалов позволяет «генерировать» соответствующий класс ковариационных функций и использовать последние в методе средней квадратичной коллокации. Поставлена задача оптимального использования указанных систем неортогональных функций для создания удобных аналитических моделей поля.

*THE DESCRIPTION OF THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH BY A SET OF THE ECCENTRIC MULTIPOLES' POTENTIALS. I. THEORETICAL FOUNDATIONS, by Marchenko A. N.* — The generalization is made for studying the representation of the planet's gravitational potential by means of the gravitational multipoles and the buried point masses. The eccentric multipoles' potentials are investigated as a set of harmonic functions for the global, regional and local gravity field approximation. The potentials of radial multipoles are considered as an important subset of these functions. The recurrent formula is given for computation of such potentials. The extreme properties of these potentials and the distribution of their zeros on the sphere are investigated. Some parameters of the functions considered are defined as the essential parameters for description of local features of the radial multipoles' potentials. The connection between these parameters and the well-known essential ones of covariance functions is considered. It is shown that the subset of the potentials discussed allows to «generate» the appropriate set of the covariance functions for the least square collocation, by the Kelvin transformation. The problem of optimum application of the subset of the radial multipoles' potentials for construction of the mathematical models of gravity field is formulated.

**Введение.** До сих пор для представления гравитационного потенциала Земли, Луны и других планет в глобальном масштабе используется известный ряд шаровых функций. Однако очень сложная структура гравитационных полей Земли и планет, с одной стороны, и постоянно повышающаяся точность наблюдений и требования по определению геоида с сантиметровой точностью (см., напр., [12]), с другой, привели не только к развитию существующих теорий, но и созданию альтернативных методов математического моделирования возмущающего потенциала  $T$  планеты. Поэтому при региональных и локальных исследованиях трансформант геопотенциала наибольшее распространение получили ковариационные функции, сопутствующие методу средней квадратичной коллокации [10] и его обобщению — вариационному методу физической геодезии [7]. Последние обычно используются в комбинации с конечным набором шаровых гармоник. Параметры, характеризующие гравитационное поле планеты, во многом зависят от выбора применяемого для его аппроксимации математического аппарата. В [4] показана прин-

ципиальная возможность построения целого класса гармонических функций — потенциалов нецентральных мультиполей (специальных точечных объектов), которые подобны по своим свойствам \*, причем одни из них удобно применять при глобальном описании поля (например, известные в практике потенциалы точечных масс), а другие — при более детальном его исследовании. Кроме того, обсуждаемый класс потенциалов позволяет построить соответствующий класс ковариационных функций возмущающего потенциала  $T$  и использовать последние, например, в методе средней квадратичной коллокации.

Данная работа посвящена построению, исследованию и оптимальному использованию указанных систем неортогональных функций для создания удобных аналитических моделей поля. При этом использование концепции сферы Бьерхаммара приводит к обобщению полученных ранее результатов по аппроксимации геопотенциала системой потенциалов точечных масс.

**Потенциалы нецентральных мультиполей.** Так как гравитационный потенциал планеты — функция гармоническая, то для построения систем базисных функций, его аппроксимирующих, целесообразно воспользоваться методом, успешно применявшимся Максвеллом [9]. Суть метода заключается в том, что если дано некоторое решение уравнения Лапласа, то другие его решения могут быть получены из данного с помощью дифференцирования по координатам. В частном случае этот метод приводит к последовательному построению специальных точечных объектов — мультиполей  $n$ -го порядка, потенциалы которых (при расположении мультиполей в начале системы координат  $O$ ) формально совпадают с шаровой функцией  $V_n$   $n$ -го порядка, представляемой по Максвеллу [9] в форме

$$V_n = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние от начала  $O$  координат до текущей точки.

Прямые, проходящие через начало координат по направлениям  $h_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), называют осями, а точки пересечения последних с единичной сферой — полюсами шаровой или сферической функции или гравитационного \*\* мультиполя [2, 5, 9],  $M_n$  — моментов шаровой функции или мультиполя.

Основное свойство мультиполя заключается в том, что его потенциал убывает обратно пропорционально  $r^{n+1}$ , что можно использовать при решении задач, связанных с аппроксимацией геопотенциала. Напомним, что для аппроксимации гравитационного потенциала успешно применяются фундаментальные решения уравнения Лапласа  $\{1/r_i\}$  для некоторого множества точек  $\{x_i\}$ , находящихся внутри сферы  $\sigma_B$  Бьерхаммара на поверхности  $\sigma_A$  Ляпунова [1, 3] (рис. 1). При этом легко показать линейную независимость и полноту системы на гильбертовых пространствах  $L_2(\tau)$  [1] и (после исключения из функций  $1/r_i$  шаровой гармонике нулевого порядка) на  $\Gamma_2^q(\Sigma)$ ,  $\Gamma_2(G)$  \*\*\* [3]. Факт линейной независимости системы  $\{1/r_i\}$  без введения поверхности  $\sigma_A$  установлен в [11].

Воспользуемся упомянутым методом дифференцирования применительно к потенциалам мультиполей нулевого порядка  $\{1/r_i\}$ , расположенным в точках множества  $\{x_i\}$  поверхности  $\sigma_A$ . Тогда однократное

\* Их теоретические основы тесно связаны с теорией сферических и шаровых функций и в классической постановке впервые обсуждались Гауссом и Максвеллом.

\*\* Понятие гравитационного мультиполя тесно связано (см. [5] и библиографию в ней) с представлением гравитационного потенциала в форме ряда по шаровым функциям, когда характеристиками притяжения Земли могут быть не только гармонические коэффициенты потенциала, но и максвелловы параметры  $M_n, h_n$ .

\*\*\* Гильбертовы пространства  $\Gamma_2^q(\Sigma)$ ,  $\Gamma_2(G)$  вводятся здесь в соответствии с [7].

дифференцирование приводит к системе диполей ( $n=1$ ), расположенных в точках  $\{x_i\}$ , каждый из которых имеет потенциал

$$V_1^{(i)} = -M_1 \frac{\partial}{\partial h_1} \left( \frac{1}{r_i} \right). \quad (2)$$

Обобщая результат (2), можно получить в точках  $\{x_i\}$  систему нецентральных мультиполей  $n$ -го порядка с потенциалами

$$V_n^{(i)} = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left( \frac{1}{r_i} \right) = \quad (3a)$$

$$= (-1)^n \frac{M_n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left[ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{d_i}{r} \right)^k P_k(\cos \psi_i) \right]. \quad (3b)$$

Индекс ( $i$ ) указывает не только на зависимость от координат точки  $i$  ( $d_i$  — расстояние от  $O$  до  $i$ ,  $\psi_i$  — угол между направлениями  $Oi$  и  $r$

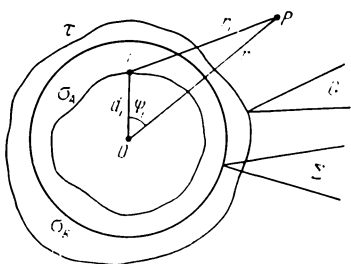


Рис. 1. К объяснению аппроксимации гравитационного потенциала системой потенциалов нецентральных мультиполей

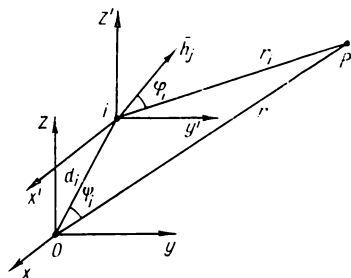


Рис. 2. К объяснению формулы (4)

с вершиной в точке  $O$ ), но также и на то, что в (3) обязательно дифференцирование по одним и тем же направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_n$  для всего множества функций  $\{1/r_i\}$ .

Полученные в точках  $\{x_i\}$  нецентральные мультиполи  $n$ -го порядка приводят к системе  $\{V_n^{(i)}\}$  гармонических вне сферы Бьерхаммара (в области  $\Sigma$ ) функций, в разложении которых по шаровым гармоникам отсутствуют члены от нулевого до  $(n-1)$ -го порядка. Обсуждаемые системы гармонических функций имеют физический смысл и для фиксированного  $n$  являются неортогональными на гильбертовых пространствах  $L_2(\sigma_B), \Gamma_2(G), \Gamma_2^q(\Sigma)$ .

В [4] получены общие аналитические выражения для  $V_n^{(i)}$  и общая формула Максвелла, позволяющая потенциал  $V_n^{(i)}$  выразить в виде строго определенной комбинации диполей, оси которых совпадают с осями мультиполя, и произведений степеней фундаментальных решений уравнения Лапласа на косинусы углов между осями мультиполя. Однако использование этой формулы или выражений типа (3) на практике окажется слишком сложным из-за наличия в каждом таком потенциале  $2n$  параметров, характеризующих направления осей  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Целесообразно количество этих  $2n$  параметров для каждой точки  $i$  (на поверхности  $\sigma_A$ ) уменьшить, сохранив при этом необходимые качества функций. Если предположить, что все оси  $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \dots, h_n^{(i)}$  совпадают с направлением  $Oi$  (рис. 2), то (3a) можно для такого случая представить в следующей форме

$$\tilde{V}_n^i = M_n \tilde{v}_n^i = \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial d_i^n} \left( \frac{1}{r_i} \right), \quad (4)$$

где  $n$ -кратное дифференцирование удобно выполнять просто по параметру  $d_i$ , входящему в выражение для  $r_i$  в виде

$$r_i = \sqrt{r^2 + d_i^2 - 2rd_i \cos \psi_i}. \quad (5)$$

Так как направление  $\mathbf{O}i$  совпадает с радиусом-вектором  $\mathbf{d}_i$ , то потенциал (4) будем называть потенциалом нецентрального радиального мультиполя или просто потенциалом радиального мультиполя  $n$ -го порядка (потенциал радиального диполя используется в геомагнетизме, и мы воспользовались таким названием для общего случая). Отметим, что потенциал (4) обладает основным свойством мультиполя  $n$ -го порядка: убывает обратно пропорционально  $r_i^{n+1}$ .

Выполняя дифференцирование в (4), находим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_0^i &= 1/r_i, \quad \tilde{v}_1^i = (r \cos \psi_i - d_i)/r_i^3, \\ \tilde{v}_2^i &= r_i [1.5 (\tilde{v}_1^i)^2 - 0.5r_i^{-4}], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

для потенциалов радиальных мультиполей первых порядков.

Как видно, соотношение (4) по своей форме очень похоже на одну из формул для полиномов  $P_n$  Лежандра. Действительно,

$$\tilde{v}_n^i = P_n(\cos \varphi_i)/r_i^{n+1}, \quad (7)$$

в котором  $\varphi_i$  — угол (с вершиной в точке  $i$ ) между осью диполя (совпадающей с  $d_i$ ) и направлением  $r_i$ . Таким образом, определение  $\tilde{v}_n^i$  возможно путем использования известного рекуррентного соотношения для полиномов Лежандра:

$$n\tilde{v}_n^i = (2n-1)r_i\tilde{v}_1^i\tilde{v}_{n-1}^i - (n-1)\tilde{v}_{n-2}^i r_i^{-2}. \quad (8)$$

Имея потенциалы  $\tilde{v}_0^i$  и  $\tilde{v}_1^i$  в форме (6), с помощью (8) находим потенциалы радиальных мультиполей до необходимого порядка. Приведем еще одно представление для  $\tilde{v}_n^i$  в виде бесконечного ряда шаровых функций, вывод которого основан на записи (4) вида (3а) и почленным дифференцировании бесконечного ряда. В результате получим

$$\tilde{v}_n^i = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \frac{d_i^{k-n}}{r^{k+1}} P_k(\cos \psi_i), \quad \left( C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!} \right), \quad (9)$$

причем в (9)  $C_k^n$  — биномиальные коэффициенты (число сочетаний из  $k$  элементов по  $n$ ).

Полученное соотношение (8) позволяет построить целое семейство потенциальных функций в форме некоторых конечных аналитических выражений для систем потенциалов радиальных мультиполей  $n$ -го порядка, связываемых здесь с множеством  $\{x_i\}$  точек поверхности  $\sigma_A$ . При этом следует отметить, что совокупность результатов, описанных в [1, 3], вместе с условием о линейной независимости и полноте в  $L_2(\sigma_B)$  систем  $\{\tilde{v}_n^i\}$  позволяет заключить, что именно система  $\{1/r_i\}$  (в которой предварительно исключена шаровая гармоника нулевого порядка) фундаментальных решений уравнения Лапласа и система  $\{\tilde{v}_1^i\}$  потенциалов радиальных диполей являются неортогональными базисами в  $\Gamma_2^q(\Sigma)$ . Для  $n > 1$  системы потенциалов  $\{\tilde{v}_n^i\}$  оказываются линейно независимыми и полными на таких подмножествах  $\Gamma_2^q(\Sigma)$ , в которых отсутствуют всевозможные линейные комбинации шаровых гармоник  $\Pi_{nl}^q$  [7] до  $(n-1)$ -го порядка включительно. Таким образом, на основании теоремы Рунге —

Краупа [7], заключаем, что для всякого возмущающего потенциала  $T \in \Gamma_2^q(\Sigma)$ , в котором отсутствуют гармоники до  $(n-1)$ -го порядка включительно, возможна его сколь угодно точная аппроксимация

$$T \approx T_N^{(n)} = \sum_{i=1}^N M_i^{(n)} \tilde{v}_n^i \quad (10)$$

системой потенциалов  $\tilde{v}_n^i$  радиальных мультиполей  $n$ -го порядка, «расположенных» на поверхности  $\sigma_A$ . В (10) величины  $M_i^{(n)}$  и  $\tilde{v}_n^i$  имеют определенную размерность, связанную с размерностью потенциала  $T$  (например,  $\text{м}^3/\text{с}^2$ ). Удобнее пользоваться безразмерными величинами, если принять, что

$$v_n^i = R^{n+1} \tilde{v}_n^i, \quad \mu_i^n = M_i^{(n)} / (fM \cdot R^n) \quad (11)$$

и с учетом (11) переписать (10) в следующей форме:

$$T \approx T_N^{(n)} = \frac{fM}{R} \sum_{i=1}^N \mu_i^n v_n^i, \quad (12)$$

где  $fM$  — произведение гравитационной постоянной на массу планеты,  $R$  — ее средний радиус. Для вычисления функций  $v_n^i$  можно пользоваться формулами (6), (8), подставив вместо  $d_i$ ,  $r$ ,  $r_i$  соответственно  $d_i/R = D_i$ ,  $r/R = \rho$ ,  $r_i/R = \rho_i$ . Учитывая последнее, например, для описания аномалий силы тяжести  $\Delta g$  получим следующую формулу

$$\Delta g \approx \Delta g_N^{(n)} = \frac{fM}{R^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^n g_n^i, \quad (13)$$

в которой функции  $g_n^i$  целесообразно вычислять с помощью рекуррентного соотношения

$$\left. \begin{aligned} n g_n^i &= n v_n^i \frac{2f_i}{\rho_i^2} - (2n-1) v_n^i \frac{\cos \psi_i}{\rho_i^2} + \left[ (2n-1) g_{n-1}^i v_i^i \rho_i - \right. \\ &\left. - (n-1) g_{n-2}^i \left( \frac{1}{\rho_i} \right)^2 \right], \quad f_i = (\rho - D_i \cos \psi_i) \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

начиная с

$$g_0^i = v_0^i \left[ \frac{f_i}{\rho_i^2} - \frac{2}{\rho} \right], \quad g_1^i = v_1^i \left[ \frac{3f_i}{\rho_i^2} - \frac{2}{\rho} \right] - \frac{\cos \psi_i}{\rho_i^3}. \quad (15)$$

Очевидно, что для применения (14) необходимо использование и рекуррентной формулы (8), и выражений (6).

**Свойства потенциалов радиальных мультиполей и существенные параметры базисных функций.** Воспользовавшись результатами [6] применительно к изучению экстремальных свойств потенциалов  $v_n^i$  на сфере Бьерхаммара, легко показать, что в стационарных точках потенциалов  $v_n^i$  градиент  $\text{grad } v_n^i$  коллинеарен радиусу-вектору  $R_B$ , а точка  $A$ , являющаяся «эпицентром» точки  $i$ , оказывается стационарной. Точка  $A'$ , антиподная  $A$  и лежащая на сфере Бьерхаммара, также является стационарной. Далее, воспользовавшись (7) и основным свойством мультиполя заключаем, что в  $A$  ( $\cos \varphi_i = 1$ ) потенциал радиального мультиполя  $n$ -го порядка принимает максимальное и наибольшее значение по сравнению с его другими значениями на  $\sigma_B$ :  $v_n^i(\psi_i = 0) > v_n^i(\psi_i \neq 0)$ .

Многочлен  $P_n(\cos \varphi_i)$  имеет  $n$  неравных вещественных корней  $\varphi_i^{(m)}$  ( $1 \leq m \leq n$ ), которые расположены симметрично по отношению к  $\cos \varphi_i = 0$ , т. е. симметрично по отношению к «экватору» сферы  $\sigma_i$  с центром в точке  $i$  и радиусом  $(R_B - d_i)$ .

Учитывая свойства полиномов Лежандра, а также представление  $v_n^i$  в форме (7), отметим, что функции  $v_n^i$  делят сферу  $\sigma_B$  Бьерхаммара на  $(n+1)$  зону (эпицентр  $A$  принимаем за полюс) и обращаются в нуль на «параллелях», разделяющих зоны, и внутри каждой из них принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Однако, в отличие от случая  $P_n(\cos \varphi_i)$ , распределение зон уже не является симметричным относительно «экватора»  $\cos \varphi_i = 0$  сферы  $\sigma_B$ . Зная нули  $\varphi_i^{(m)}$  многочлена  $P_n(\cos \varphi_i)$  на  $\sigma_i$ , легко определить и нули  $\psi_i^{(m)}$  для  $v_n^i$  на  $\sigma_B$  с помощью следующего соотношения:

$$\cos \psi_i^{(m)} = h_i \sin^2 \varphi_i^{(m)} + \cos \varphi_i^{(m)} \sqrt{1 - h_i^2 \sin^2 \varphi_i^{(m)}}, \quad h_i = d_i/R_B, \quad (16)$$

отражающего связь между углами  $\varphi_i$  и  $\psi_i$ .

Сравнение рис. 3 с графиками полиномов Лежандра соответствующих порядков приводит к выводу о том, что наличие в  $v_n^i$  множителя  $\rho_i^{-(n+1)}$  обеспечивает подобный характер изменения  $\rho_n(\cos \varphi_i)$  и  $v_n^i$  лишь при небольших  $\psi_i$ , т. е. на сферических расстояниях меньших  $\sim \psi_i^{(1)}$ . При этом только в случае  $n=0$  фундаментальные решения  $v_0^i$  имеют лишь положительные значения. Итак, наряду с параметрами  $v_n^i(\psi_i=0)$ , вместо  $\psi_i^{(1)}$  целесообразнее подобрать такие параметры, которые характеризовали бы общие локальные особенности потенциалов радиальных мультиполей произвольного порядка, начиная с  $n=0$ . Очевидно, что «затухание»  $v_n^i$  на  $\sigma_B$  можно характеризовать не только  $\psi_i^{(1)}$ , но и «длиной корреляции»  $\xi_n$ , т. е. таким значением  $\xi_n = \psi_i$ , при котором

$$v_n^i(\xi_n = \psi_i) = 0.5v_n^i(\psi_i = 0) = R^{n+1}/[2R_B^{2n+1}(1-h_i)^{n+1}], \quad (17)$$

за счет того, что при  $\psi_i=0$  функция  $v_n^i(0)$  принимает наибольшее на  $\sigma_B$  значение. Для случая  $n=0$  из (17) легко находим, что

$$\xi_0 = \arccos(4 - 1.5[(1+h_i^2)/h_i]), \quad (1/3 < h_i < 1). \quad (18)$$

При  $n>0$  возможно численное решение уравнения (17). Получаем качественный вывод: чем больше значение  $h_i$  и порядок  $n$  изучаемой функции  $v_n^i$ , тем меньше ее длина корреляции  $\xi_n$ , что является следствием основного свойства мультиполя.

Отметим, что если на практике за основу фиксации плановых координат точечных масс (точек  $i$ , случай  $n=0$ ) берется подобие аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, то в неявном виде используется следующее фундаментальное свойство функций  $v_0^i$ :  $v_0^i(\psi_i=0) > v_0^i(\psi_i \neq 0)$ . Здесь полезным может оказаться соотношение (18): достаточно из предварительного анализа поля, подлежащего аппроксимации системой потенциалов точечных масс, определить эмпирическое значение параметра  $\xi_0^{\text{эмп}}$  и подставить его в (18), как из решения (18) относительно  $h_i$  появляется возможность выбора такого

$$h_i = \frac{4}{3} - (\cos \xi_0^{\text{эмп}} + \sqrt{\cos^2 \xi_0^{\text{эмп}} - 8\cos \xi_0^{\text{эмп}} + 7})/3 \quad (19)$$

или «глубины» ( $R_B - h_i$ ), которые с точки зрения описания поля уже будут согласованы с известной информацией о  $T$ . Такая методика легко может применяться для функций  $v_n^i$  и при  $n>0$ , если использовать вместо (18) численное решение уравнения (17). Наконец, если ставится задача не только фиксации координат мультиполей, но и выбора их порядка  $n$ , можно воспользоваться следующим выражением для кривизны  $K_n(i)$  кривой  $v_n^i = v_n^i(\psi_i)$  при  $\psi_i=0$

$$K_n(i) = -(v_n^i(\psi_i=0))'' = \frac{R^{n+1}(n+1)(n+2h_i)}{R_B^{n+1}(1-h_i)^{n+3}}, \quad (20)$$

которая зависит не только от  $h_i$ , но и от степени  $n$  и должна быть предварительно оценена путем разработки соответствующей методики. Обсуждаемые три параметра  $v_n^i(0)$ ,  $\xi_n$ ,  $K_n(i)$  характеризуют локальные свойства функций  $v_n^i$  и аналогичны (по своему определению) трем существенным параметрам ковариационных функций (КФ) гравитационного потенциала  $T$ , введенных в практику физической геодезии Морицем: дисперсии, длине корреляции и параметру кривизны. Последнее не вызывает особого удивления, так как характер изменения (рис. 3)

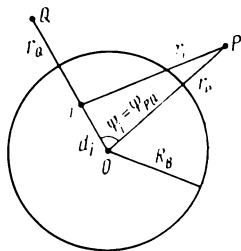
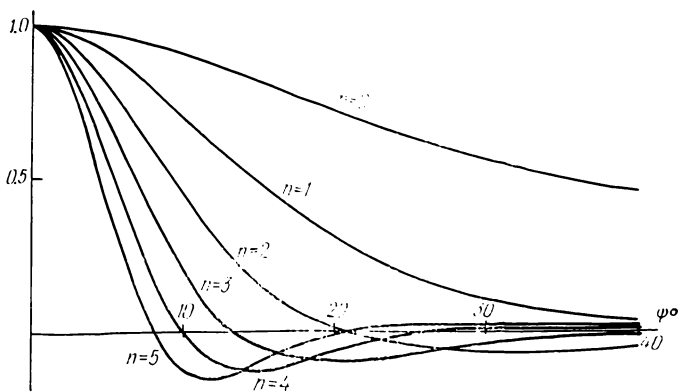


Рис. 3. Нормированные значения некоторых потенциалов радиальных мультиполей  $v_n^i$  ( $d_i=0.7$ ) в зависимости от  $\psi=\psi_i$

Рис. 4. К объяснению формулы (22)

$v_n^i$  на  $\sigma_B$  в зависимости от  $\psi_i$  подобен изменению КФ  $T$  в зависимости от  $\psi$  (см. напр. [7, 10]). Кроме того, следует отметить и особое значение характеристики  $K_n(i)$ : легко показать, что в эпицентре ( $i$ ) для всякого  $r \geq R_B$  вертикальный градиент аномалии силы тяжести может быть представлен приближенно в форме

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r}(i) \approx -\frac{T(i) K_n(i)}{r^2 v_n^i(0)} = -\frac{T(i)}{r^2} \frac{(n+1)(n+2h_i t)}{(1-h_i t)^2}, \quad (21)$$

в которой  $t=R_B/r$ ;  $T(i)$ ,  $K_n(i)$ ,  $v_n^i(0)$  — значения (на сфере радиуса  $r$ ) возмущающего потенциала, кривизны и величины радиального мультиполя в эпицентре ( $i$ ). Принимая во внимание (21), заключаем, что для более уверенного подбора параметров функций  $v_n^i$  следует учитывать и данные о вертикальном градиенте аномалий силы тяжести. Таким образом, удобно говорить о существенных параметрах базисных функций  $v_n^i$ , позволяющих достаточно просто решить задачу выбора оптимальных для исследуемого поля функций  $v_n^i$ .

Из того, что коэффициенты разложения (9) положительны, делаем вывод, что функции  $v_n^i$ , изучаемые на  $\sigma_B$ , являются положительно определенными и могут использоваться как ковариационные (КФ). При этом достаточно рассматривать  $d_i$  как некоторое характеристическое расстояние ( $d_i < R_B$ ), а  $\psi_i$  как сферическое расстояние  $\psi$ , и мы получаем возможность с помощью (8) строить целое семейство аналитических выражений, заменяющих эмпирические КФ, определенные на  $\sigma_B$ . Согласование основных параметров КФ может быть достигнуто путем выбора  $h=h_i$ , порядка  $n$  для  $v_n^i$  и совмещено с обычным выделением тренда изучаемого поля, т. е. выделением низкочастотной составляющей спектра до необходимой степени. Однако возможен и переход от (9) к более привычным выражениям и параметрам ковариационных функций возмущающего потенциала. Для этого достаточно воспользоваться инверсией от сферы  $R_B$  (преобразованием через обратные радиусы), при-

водящей (рис. 4) к следующему важному соотношению

$$R_B^2 = d_i r_Q \quad (22)$$

и примененной в [8] для решения обратной задачи — «физической интерпретации» некоторых воспроизводящих ядер гильбертовых пространств. Подставив (22) в (9), после некоторых преобразований можно записать

$$\tilde{v}_n^i(P) = v_n(P, Q) (r_Q/R_B^2)^{n+1}, \quad (23)$$

где

$$v_n(P, Q) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{ks}^{n, k+1} P_k(\cos \psi_{PQ}), \quad s = R_B^2/r_P r_Q. \quad (24)$$

Функции  $v_n(P, Q)$  являются гармоническими и регулярными на бесконечности относительно каждой из точек  $P$  и  $Q$ . Условие  $d_i < R_B$  для функций  $v_n^i$  после инверсии переходит в условие  $r_P > R_B$ ,  $r_Q > R_B$  для  $v_n(P, Q)$ . Из (8) и (23) следует рекуррентное соотношение вида

$$n v_n(P, Q) = (2n-1) \frac{L}{s} v_1(P, Q) v_{n-1}(P, Q) - (n-1) v_{n-2}(P, Q) \left(\frac{s}{L}\right)^2, \quad (25)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} v_0(P, Q) &= \frac{s}{L}, \quad L = \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos \psi_{PQ}}, \\ v_1(P, Q) &= 0.5 [s(1 - s^2)L^{-3} - L^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Выражение  $v_0(P, Q)$  представляет собой функцию, которую Мориз назвал КФ взаимного расстояния. С точностью до множителя эта КФ носит название также воспроизводящего ядра Краупа. Первый член в квадратных скобках выражения для  $v_1(P, Q)$  представляет собой так называемое ядро Пуассона. Отличие  $v_1(P, Q)$  от последнего состоит в том, что при разложении  $v_1(P, Q)$  в ряд (24) суммирование начинается с единицы, а не с нуля, и в (24) присутствуют биномиальные коэффициенты вместо спектральной характеристики  $k_n = (2n+1)$ . Отмеченные отличия отражаются в (26) наличием второго члена  $1/L$  и множителя 0.5.

Пользуясь асимптотическим равенством

$$C_k^n \sim k^n/n!, \quad (27)$$

можно показать с учетом исследований [7], что порядок  $n$  обсуждаемых функций следующим образом связан с индексом  $q$  гильбертовых пространств  $\Gamma_2^q(\Sigma)$  с воспроизводящим ядром, на которых ищется решение в методе средней квадратичной коллокации или вариационном методе физической геодезии:  $q=1 \rightarrow n/2$ . Тогда  $n=0$  соответствует  $q=1$ ;  $n=1 \rightarrow q=1/2$ ;  $n=2 \rightarrow q=0$ . В общем случае предполагается, что  $q \geq 0$ , поэтому лишь функции  $v_0(P, Q)$ ,  $v_1(P, Q)$ ,  $v_2(P, Q)$  могут рассматриваться как воспроизводящие ядра соответствующих ( $q=1$ ;  $q=1/2$ ;  $q=0$ ) гильбертовых пространств  $\Gamma_2^q(\Sigma)$ . Тем не менее, последнее не означает, что функции  $v_n(P, Q)$ , вычисляемые просто по (25), не могут использоваться в методе коллокации для  $n > 2$ . Структура выражения (24) позволяет заключить: вне сферы Бьерхаммара функции  $v(P, Q)$  являются изотропными ковариационными функциями на любой сфере  $R > R_B$ , имеющими единственное гармоническое продолжение во внешнее пространство. С учетом этого и обсужденных выше свойств потенциалов радиальных мультиполей  $v_n^i$ , а также соотношения (23), задающего ковариационные функции  $v_n(P, Q)$ , возможно оптимальное использование последних в методе средней квадратичной коллокации с точки зрения минимума средней квадратичной ошибки аппроксима-



ции. Решение такой задачи связано с выбором порядка КФ  $v_n(P, Q)$ , наилучшим образом согласующейся с эмпирической КФ после соответствующего выделения тренда поля. Разработка и описание необходимой методики требует специального исследования. Поэтому мы возвращаемся непосредственно к потенциалам радиальных мультиполей и во второй части работы перейдем к обсуждению процедуры предварительного мультипольного анализа исследуемого поля, позволяющей реализовать оптимальный выбор потенциалов  $v_n^i$  конкретного порядка для последующего построения аналитической модели изучаемого поля.

1. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям.— М. : Наука, 1978.— 351 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. шк., 1970.— 520 с.
3. Марченко А. Н. О разложении ковариационной функции аномального поля в ряд фундаментальных решений уравнения Лапласа // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.— 1985.— № 4.— С. 20—27.
4. Марченко А. Н. О представлении гравитационного потенциала системой потенциалов нецентральных мультиполей.— Киев, 1986.— 55 с. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ; № 28, Ук-Д86).
5. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. О максвелловых параметрах гравитационного поля Земли // Набл. искусств. спутников Земли. Варшава.— 1978.— Вып. 18.— С. 171—187.
6. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об экстремальных свойствах сферических функций, описывающих внешний гравитационный потенциал Земли // Геод., картогр. и аэрофотосъемка.— 1978.— Вып. 27.— С. 88—96.
7. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии.— М. : Недра, 1979.— 200 с.
8. Hauck H., Lelgemann D. Regional gravity field approximation with buried masses using least-norm collocation // Manuscr. geod.— 1985.— 10.— P. 50—58.
9. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism.— Oxford, 1881.— V. 1.
10. Moritz H. Advanced physical geodesy.— S. L. : Wichmann, 1980.
11. Stromeyer D., Ballani L. Uniqueness of the inverse gravimetric problem for point mass models // Manuscr. geod.— 1984.— 9.— P. 125—136.
12. Tscherning C. C. Current problems in gravity field approximation.— Rome, 1985.— (Pap. present. First Hotin-Marussi Symp.; Rome, Italia, June 3—6, 1986)

Львов, политехн. ин-т  
им. Ленин. Комсомола

Поступила в редакцию 27.05.86,  
после доработки 29.07.86

Окончание. Начало см. с. 49

11. Rosner R., Tucker W. H., Vaiana C. S. Dynamics of the quiescent solar corona // Astrophys. J.— 1978.— 220, N 2.— P. 643—665.
12. Solar geophysical data.— Boulder, NOAA, 1973—1974.
13. Vesecky J. F., Antiochos S. K., Underwood J. H. Numerical modelling of quasi-static coronal loops. I. Uniform energy input. // Astrophys. J.— 1979.— 233, N 3.— P. 987—997.
14. Wentzel D. G. On the role of hydromagnetic waves in the corona and the base of the solar wind // Solar Phys.— 1977.— 52, N 1.— P. 163—177.
15. Wragg M. A., Priest E. R. The temperature-density structure of coronal loops in hydrostatic equilibrium // Ibid.— 1981.— 70, N 2.— P. 293—313.
16. Zwaan C. The emergence of magnetic flux // Ibid.— 1985.— 100, N 1—2.— P. 397—414.

Ин-т прикл. геофизики им. Е. К. Федорова,  
Москва

Поступила в редакцию 18.03.86,  
после доработки 08.07.86