

УДК 520.8:629.793

Оптимизация поиска ИСЗ узкопольным телескопом по критерию времени обнаружения

С. С. Вениаминцов

На основе ранее введенных автором аксиоматики теории планирования поиска циклически движущихся объектов и понятия эквивалентности планов поиска построены методы поиска ИСЗ узкопольным телескопом в кратчайшее время при заданном и произвольном распределении вероятностей положения ИСЗ на интервале поиска. Предложенные методы позволяют реализовать наиболее благоприятные условия накопления энергии полезного сигнала при значительной априорной неопределенности вектора скорости. Методы запрограммированы для ЭВМ БЭСМ-6. Приводятся результаты сравнения их с некоторыми известными методами.

OPTIMIZATION OF SEARCHING FOR ARTIFICIAL SATELLITES WITH NARROW-ANGLE TELESCOPE, by Veniaminov S. S.— On the basis of axiomatics of the theory of searching for circling objects and the concept of equivalence of search plans (proposed by the author previously) the methods of searching for satellites in the shortest time with a narrow-angle telescope are developed. The probability distribution of the satellite position may be arbitrary. The methods permit obtaining the most favourable conditions for integrating the weak useful signal energy when the velocity vector is a priori rather uncertain. The methods proposed are compared with some known ones.

В настоящей работе развиваются изложенные в [1, 2] теоретические основы планирования поиска ИСЗ по аргументу широты u в случае дискретных планов поиска (ПП), которые характерны для реальных узкопольных оптических средств. Предлагаются методы построения плана скорейшего обнаружения искомого ИСЗ при заданном или неизвестном распределении его положения на интервале поиска с использованием представленного в [1] математического аппарата кривых эквивалентности (КЭ).

1. **Планирование поиска по критерию времени обнаружения.** Рассмотрим задачу построения ПП, минимизирующего математическое ожидание времени обнаружения ИСЗ. Этот критерий обычно вступает в противоречие с критериями, отражающими расход ресурса средства наблюдения на обнаружение искомого ИСЗ. Например, иногда приходится ожидать наступления условий, минимизирующих время занятости средства наблюдения [1], в течение времени, близкого к периоду обращения T_Ω при среднем времени ожидания $T_\Omega/2$. Если T_Ω велико, то упомянутое противоречие становится очевидным.

В задаче поиска [1] вид закона распределения положения объекта не имел значения: достаточно было задать интервал поиска $[u_n, u_k]$. В новой постановке на момент времени t_0 задаются интервал поиска $[u_n, u_k]$ и плотность распределения вероятностей нахождения на нем объекта $f_0(u)$. Положение интервала поиска на траектории, его размеры, а также плотность распределения зависят периодически от времени t . Требуется обнаружить объект как можно скорее.

Пусть t_1 — самый ранний момент времени, с которого практически можно начать поиск ($t_1 > t_0$), а t_2, t_3, \dots, t_n — моменты времени, следующие за t_1 с шагом Δt . Предположим, что времени Δt достаточно для принятия решения о наличии или отсутствии искомого объекта в поле зрения телескопа и перенацеливания последнего. Элемент ПП $\mu_n = \mu_n(t_n)$ представляет собой вертикальный отрезок прямой в плоскости tu высотой Δu [1], определяемой угловыми размерами поля зрения телескопа, а $\mu_n(t_0)$ — его КЭ-проекция на момент времени t_0 . Элементу ПП $\mu_n(t_n)$ практически соответствует условная эфемерида (t_n, a_n, δ_n) , рассчитываемая по вектору элементов орбиты $R_0(t_n) = (a(t_n), e(t_n))$.

$i(t_n), \Omega(t_n), \omega(t_n), u^*(t_n)$, где $u^*(t_n)$ соответствует центру элемента ПП $\mu_n(t_n)$.

— Таким образом, в конечном виде ПП является последовательностью n условных эфемерид, следующих с временным шагом Δt и соответствующих различным векторам параметров орбит.

Качество ПП $M = \bigcup_n \mu_n$ оценим функционалом

$$\Phi(M) = (t_1 - t_0) + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (n-1) \Delta t \int_{\mu_n(t_0)} f_0(u) du, \quad (1)$$

который необходимо обратить в минимум. Он представляет собой математическое ожидание времени обнаружения объекта при условии на-

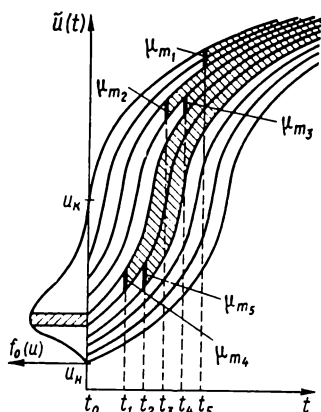


Рис. 1. Синтез ПП в структуре II

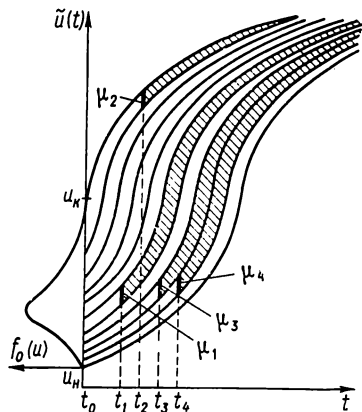


Рис. 2. Синтез ПП в структуре I

чала наблюдений в момент времени t_1 . Поскольку в (1) от ПП зависит только последнее слагаемое, далее будем рассматривать его как критерий ПП.

Ограничения в формулировке задачи присутствуют неявно и сводятся к следующему: 1) области интегрирования $\mu_n(t_0)$ получаются КЭ-проектированием на момент времени t_0 элементов ПП $\mu_n(t_n)$, где $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$;

2) ПП должен пересекаться со всеми КЭ семейства $\sum_{t_0}^{u_n, u_k}$, заключенного

между КЭ \tilde{u}_n и \tilde{u}_k , причем с каждой однократно (рис. 1).

Если допустить переменный шаг Δt_n , то вид функционала изменится

$$\Phi(M) = \sum_{n=1}^{\bar{n}} \left(\sum_{t=0}^{n-1} \Delta t_i \right) \int_{\mu_n(t_0)} f_0(u) du. \quad (2)$$

При этом условимся, что $\Delta t = t_1 - t_0$.

Минимизация функционала (1) сводится к задаче дискретной оптимизации, которую ввиду существенной нелинейности и несепарабельности функционала практически можно решить лишь комбинаторными методами типа ветвей и границ (ВГ). Для ускорения сходимости процесса решения целесообразно применить гибридную схему ВГ и дополнительного правила отсечения (ДПО) бесперспективных множеств решений [3, 4]. Дерево решений может иметь по крайней мере две следующие естественные структуры.

Структура I. На n -м ярусе фиксируются элементы ПП $\mu_n(t_n)$ с учетом уже построенной части ПП на более ранних ярусах дерева. По-

этому вершина n -го яруса — множество решений, в которых $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ фиксированы и лежат на ветви, ведущей к корню дерева.

Структура II. Синтез решения ведется последовательно по слоям КЭ, начиная с верхнего, нижнего или любого среднего слоя. На m -м ярусе дерева фиксируется элемент ПП μ_{m_n} , контролирующий n -й слой в момент времени t_{m_n} .

Каждая из структур обладает своими достоинствами и недостатками. Реализация структуры I не требует априорной конкретизации количества элементов ПП n , при выборе же структуры II задание n или m необходимо. В то же время текущая синтезированная часть ПП при структуре II обладает компактностью, односвязностью. Построение очередного элемента ПП μ_{m_n} проводится от единственно возможной опорной КЭ — нижней (верхней) границы уже построенной части ПП, если начинают с верхнего (нижнего) слоя, и от двух возможных опорных КЭ — верхней и нижней границ, если начинают с какого-либо среднего слоя (рис. 1). Благодаря этому структура II гарантирует отсутствие неудобных, нерациональных систем КЭ, имеющих вид узких «проливов», которые часто образуются при структуре I, допускающей появление большого числа опорных КЭ в промежуточном частичном ПП (рис. 2).

Недостаток структуры I можно преодолеть, отказавшись от точного решения. Синтез приближенного решения в структуре I будет описан ниже. Недостаток структуры II лишь на первый взгляд кажется непреодолимым. Практически всегда можно указать границу сверху для максимального числа элементов ПП и положить m равным этой границе. В «хороших» ПП действительное число «рабочих» элементов будет автоматически получаться меньше назначенного с завышением m за счет того, что развитие соответствующих ветвей дерева решений будет заканчиваться на более ранних ярусах по сравнению с ярусом m , а ветви с излишне высокими индексами m_n элементов μ_{m_n} , включенных в ПП на ранних ярусах, будут своевременно отсекаются.

Структура II, как и структура I, допускает переменность шага Δt_n , размеры которого для всех n должны быть известны заранее. Если же размер шага можно определить только при переходе от μ_{n-1} к μ_n , то для решения задачи структура II не годится, тогда как структура I допускает рекурсию $\Delta t_n = \Delta t_n(\mu_{n-1})$.

Итак, структура II позволяет получить как приближенное, так и точное решение, а структура I — только приближенное, но без каких-либо трудностей реализует переменный шаг следования элементов ПП.

2. Метод нахождения точного решения в структуре II. Первый ярус дерева решений содержит m вершин. Первая вершина соответствует множеству решений, в которых первый слой КЭ (для определенности сверху, начиная от \tilde{u}_k) контролируется в момент времени t_1 , а m -я вершина соответствует множеству решений, в которых первый слой КЭ контролируется в момент времени t_m . Вершины второго яруса дерева решений представляют собой множества решений, в которых второй слой КЭ контролируется в моменты времени $t_i, i=1, 2, \dots, m$ (за исключением момента времени, когда контролировался первый слой).

Фиксация элемента ПП, контролирующего первый слой КЭ (вершина первого яруса) определяет опорную КЭ $\tilde{u}_{оп1}(t)$ для построения следующего элемента ПП, фиксация которой вершиной второго яруса определяет опорную КЭ $\tilde{u}_{оп2}(t)$ для построения третьего элемента ПП и т. д. В n -м ярусе опорной КЭ является $\tilde{u}_{опn}(t)$, причем для каждой вершины отмечается своя КЭ. После каждого n -го этапа синтеза ПП область дальнейше-

го планирования поиска сужается до подсемейства КЭ

$$\sum_{t_0} u_n \tilde{u}_{оп n(t_0)} \subset \sum_{t_0} u_n u_k.$$

Оценка функционала $\hat{\Phi}$ в вершине n -го яруса дерева решений вычисляется следующим образом:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_2,$$

$$\text{где } \hat{\Phi}_1 = \Phi(M_n) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^n \mu_{m_j}\right) = \sum_{j=1}^n (m_j - 1) \Delta t \int_{\mu_{m_j}(t_0)} f_0(u) du. \quad (3)$$

Оставшаяся после вычитания (3) из (1) часть суммы Φ_2 , которую теперь следует оценить слагаемым $\hat{\Phi}_2$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \Delta t ((m_{n+1} - 1) \rho_{m_{n+1}} + (m_{n+2} - 1) \rho_{m_{n+2}} + \dots \\ \dots + (m_n - 1) \rho_{m_n}) = \Delta t A^T P. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A и P суть $(\bar{n} - n)$ -векторы с компонентами соответственно $a_j = (m_{n+j} - 1)$ и $\rho_{m_{n+j}} \geq 0$. Без утраты общности вывода допускаем, что a_j в A , а следовательно, и в (4) расположены по возрастанию. Оценку снизу $\hat{\Phi}_2$ для Φ_2 можно получить, например, заменив неизвестный вектор P каким-либо известным вектором $\hat{P} \leq P$ (неравенство поэлементное). Пологая $\bar{n} = \bar{m}$, вектор $\hat{P} = (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_j, \dots, \hat{\rho}_{\bar{n}-n})^T$ можно построить следующим образом. Для всех оставшихся свободными $\bar{m} - n$ моментов времени t_{m_j} , т. е. выбираемых из множества $\bigcup_{m=1}^{\bar{m}} t_m \setminus \bigcup_{j=1}^n t_{m_j}$, временно строим фиктивные элементы ПП, контролирующие очередной $(n + 1)$ -й слой КЭ, а затем проектируем их по КЭ на момент времени t_0 .

Пусть μ_{n+1}^Φ — фиктивный элемент с максимальной длиной проекции. Элемент μ_{n+1}^Φ временно присоединяем к ПП и проделываем такую же операцию для тех же $\bar{m} - n$ моментов времени t_{m_j} в $(n + 2)$ -м слое КЭ. Получим фиктивный элемент ПП μ_{n+2}^Φ с максимальной длиной проекции, прилегающей к проекции $\mu_{n+1}^\Phi(t_0)$, и т. д. Вычислим аналогично элементы μ_{n+j}^Φ , $j = 3, \dots, \bar{j}$, $j: \mu_{n+j}^\Phi \cap \tilde{u}_n \neq \emptyset$, а для них

$$q_j = \int_{\mu_{n+j}^\Phi(t_0)} f_0(u) du. \quad (5)$$

Упорядочив q_j по признаку убывания, построим тем самым вектор $\hat{P} = (\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_j, \dots, \hat{\rho}_{\bar{j}})^T$. Если $\bar{j} = \bar{m} - n$, то искомым вектор \hat{P} найден. Если $\bar{j} < \bar{m} - n$, то после добавления к этому вектору $\bar{m} - n - \bar{j}$ нулей получим искомую оценку \hat{P} .

Из построения вектора \hat{P} следует, что оцениваемая неизвестная составляющая (4) критерия Φ мажорирует оценку $\hat{\Phi}_2 = \Delta t A^T \hat{P}$.

Структура функционала (1) с учетом ограничений задачи допускает применение дополнительного правила отсечения в схеме метода ветвей и границ [3, 4]. Действительно, если для двух вершин n -го яруса выполня-

ются условия

$$\bigcup_{j=1}^n m_j^1 \subseteq \bigcup_{j=1}^n m_j^2, \quad \tilde{u}_{оп\ n}^1(t) \leq \tilde{u}_{оп\ n}^2(t) \quad \forall t, \quad \hat{\Phi}_1^1 \leq \hat{\Phi}_1^2, \quad (6)$$

то вершины g -сравнимы, причем вторая вершина (верхний индекс 2) исключается из дальнейшего рассмотрения.

3. Метод нахождения приближенного решения в структуре I. Способ построения приближенного решения подсказывает следующее свойство критерия Φ . При $t_m - t_1 \ll T$ или при малом изменении производной $\tilde{u}'_i(t)$ в области планирования можно пренебречь зависимостью значения интеграла в (1) от момента времени t_n привязки элемента ПП μ_n и условие оптимальности критерия Φ записать в виде

$$\Phi_{\min} = \min_P \sum_n (n-1) \Delta t p_{v_n} = \Delta t \min_P \sum_n (n-1) p_{v_n} = \Delta t (0, 1, \dots, n-1) P_{\min}, \quad (7)$$

где $P = (p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_n}, \dots, p_{v_n})^T$ — перестановка из заданного набора чисел $p_n = \int_{\mu_n(t_0)} f_0(u) du$. Упомянутое свойство Φ — при указанных условиях

в перестановке P_{\min} , доставляющей минимум значению функционала Φ , числа p_{v_n} должны монотонно убывать с увеличением n , что легко доказать. Изложим метод нахождения приближенного решения для наиболее типичной унимодальной функции распределения $f_0(u)$. КЭ, проходящую через точку (t_0, u_0) , соответствующую максимуму $f_0(u)$, назовем центральной и обозначим $\tilde{u}_0(t)$. В качестве первого элемента ПП $\mu_1(t_1)$ выбираем вертикальный отрезок прямой длиной Δu с центром в точке $(t_1, \tilde{u}_0(t_1))$. Элементом μ_1 контролируется подсемейство КЭ

$$\sum_{t_1}^{u_n^1, u_k^1}, \quad u_n^1 = \tilde{u}_0(t_1) - \frac{\Delta u}{2}, \quad u_k^1 = \tilde{u}_0(t_1) + \frac{\Delta u}{2}.$$

КЭ \tilde{u}_n^1 и \tilde{u}_k^1 являются опорными для построения очередных элементов ПП. Элемент $\mu_2(t_2)$ откладывается от одной из них в ту сторону, для которой интеграл $\int_{\mu_2(t_0)} f_0(u) du$ имеет большее значение. Два построенных элемента

μ_1 и μ_2 контролируют подсемейство КЭ $\sum_{t_2}^{u_n^2, u_k^2}$. Если μ_2 откладывается вверх, то u_k^2 — координата u верхнего конца элемента μ_2 , а u_n^2 — координата u нижнего конца элемента μ_1 , т. е. u_n^1 . Если же μ_2 откладывается вниз, то $u_k^2 = u_k^1$, а u_n^2 — координата u нижнего конца элемента μ_2 . Следующий элемент $\mu_3(t_3)$ опирается на одну из КЭ $\tilde{u}_n^2(t)$ или $\tilde{u}_k^2(t)$, так чтобы интеграл $\int_{\mu_3(t_0)} f_0(u) du$ имел наибольшее значение. И так далее.

Таким образом, текущий частичный ПП $\bigcup_{m=1}^n \mu_m$ контролирует односвяз-

ное подсемейство $\sum_{t_n}^{u_n^n, u_k^n}$ КЭ, заключенных между наиболее удаленными од-

на от другой КЭ, пересекающими частичный ПП, $\tilde{u}_n^n(t)$ и $\tilde{u}_k^n(t)$. Последние являются опорными для последующих элементов ПП. Синтез ПП заканчивается, как только выполнится условие

$$\sum_{t_0}^{u_n, u_k} \subseteq \sum_{t_n}^{u_n^n, u_k^n}, \quad (8)$$

т. е. как только граничные КЭ $\tilde{u}_n(t)$ и $\tilde{u}_k(t)$ погрузятся в $\sum_{t_n}^{u_n^n, u_k^n}$. Последовательность синтеза иллюстрирует рис. 3.

4. Обнаружение объекта в кратчайшее время при неизвестном распределении его положения на интервале поиска. В практических поисковых ситуациях распределение $f(u)$ часто бывает неизвестно или не-

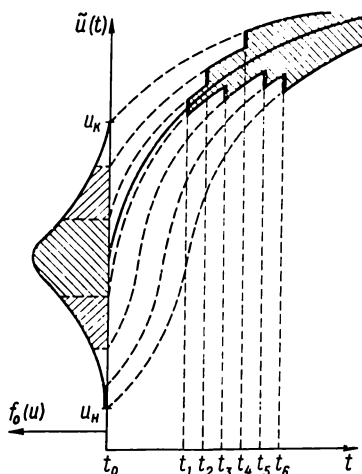


Рис. 3. Синтез субоптимального ПП в структуре I

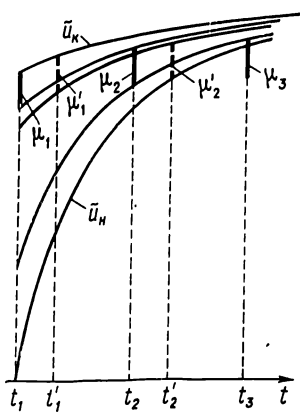


Рис. 4. «Парадоксальный» пример планирования поиска

достаточно. В таких случаях задача не вырождается, а решается другими методами, хотя и в терминах аппарата КЭ. Естественным критерием в этом случае служит число элементов ПП, обеспечивающих гарантированное обнаружение объекта.

Сформулируем правило построения ПП. Элемент μ_m , $m = 1, 2, \dots, \bar{m}$ размещается в области значений $u \in \left\{ \sum_{t_0}^{u_n, u_k} \setminus \sum_{v=1}^{m-1} \mu_v \right\}$ с наименьшим значением производных $\tilde{u}'_t(t)$ от КЭ в точке t_m . Здесь $\sum (\cup \mu_v)$ обозначает подсемейство КЭ всех точек объединения $\cup \mu_v$.

Можно показать, что при естественных ограничениях это простое правило приводит к оптимальному ПП [2]. Одним из таких ограничений является начало наблюдений в момент времени t_1 . Рис. 4 поясняет «парадоксальный» пример, когда снятие этого ограничения дает ПП с меньшим временем гарантированного обнаружения: при заданном временном шаге дискретности плана поиска Δt начало поиска в более поздний момент времени $t_1' > t_1$ требует меньшего количества элементов ПП.

5. Обеспечение благоприятных условий регистрации слабого полезного сигнала. Предложенный метод планирования поиска ИСЗ позволяет создать необходимые условия для накопления энергии полезного сигнала. Это обеспечивается, во-первых, по самой сущности метода построения плана, получением более высокой (по сравнению с априорной)

точности определения вектора скорости объекта для каждого элемента ПП; во-вторых, рациональным выбором размеров используемой для поиска части поля зрения телескопа (расчетного значения Δu). Действительно, из рис. 1—3 видно, что при достаточно малых Δu в окрестности каждого μ_n вариация значений производной $\tilde{u}'_i(t)$

$$\text{Var } \tilde{u}'_i = \max_{\substack{(t_n, u^{**}) \in \mu_n \\ (t_n, u^{**}) \in \mu_n}} |(\tilde{u}_{t_n, u^{**}}(t))'_i - (\tilde{u}_{t_n, u^{**}}(t))'_i|,$$

может быть как угодно мала: $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \text{Var } \tilde{u}'_i = 0$.

Это можно доказать, исходя из непрерывности функционала $u_{t_0, u}(t)$ по переменным t , t_0 , u . Именно точностью задания значения этой производной определяется качество реализуемых условий концентрации и накопления энергии полезного сигнала.

Заключение. Предложенные методы построения оптимальных ПП по критерию времени обнаружения реализованы в виде программ для ЭВМ БЭСМ-6. Проведено сравнение нескольких типичных поисковых ситуаций по эффективности в натурном эксперименте и путем моделирования с распространенными методами спирального поиска и последовательного сканирования проекции на плоскость, перпендикулярную к оси телескопа, области неопределенности положения объекта [5].

Результаты сравнения показали существенно большую экономичность предложенных методов. Например, изложенный в разделе 3 приближенный метод для средств наблюдения с полем зрения примерно $10' \times 10'$ оказался в среднем в 7—8 раз по времени экономичнее метода спирального поиска и более чем в 8—10 раз экономичнее методов последовательного просмотра области пространства. За счет рационального выбора размера используемой части поля зрения при построении оптимального ПП, повышения точности априорного задания вектора скорости искомого ИСЗ, соответствующего каждому элементу ПП, и компенсации перемещения объекта удается повысить проникающую способность средства наблюдения на несколько звездных величин.

Автор выражает благодарность М. С. Степанову, М. В. Глебову, А. А. Федосову, Ю. Б. Горобчуку за полезные замечания, алгоритмизацию и программирование изложенных методов построения ПП и представление результатов эксплуатации программ.

1. Вениаминов С. С. Оптимальное планирование поиска ИСЗ группой средств наблюдения // Астрометрия и астрофизика.— 1983.— Вып. 49.— С. 88—97.
2. Вениаминов С. С. Оптимизация поиска объекта, движущегося циклически по замкнутой траектории // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 1.— С. 188—198.
3. Вениаминов С. С. Дополнительное правило отсекания для метода ветвей и границ // Там же.— 1984.— № 3.— С. 59—63.
4. Вениаминов С. С. Об эффективности гибридного метода решения задач дискретной оптимизации // Там же.— 1986.— № 1.— С. 21—26.
5. Здор С. Е., Широков В. Б. Оптический поиск и распознавание.— М.: Наука, 1973.— 238 с.

Поступила в редакцию 17.04.86,
после доработки 04.07.86