

УДК 52-64

## Формирование молекулярных полос поглощения в многослойной атмосфере.

### II. Сведение к задаче в непрерывном спектре

Н. Н. Фокин

Применение преобразования Лапласа к нестационарному уравнению переноса позволяет свести задачу об определении плотности распределения фотонов по удельным пробегам в многослойной атмосфере к нахождению решения соответствующей стационарной задачи. При этом, как и в однородном случае, достаточно изучить лишь консервативно рассеивающую среду. Приведены формулы для определения средних длин пробегов в отдельных слоях. Рассмотрен случай, когда функция пропускания представлена в виде непрерывной суперпозиции экспонент. Полученные общие результаты иллюстрируются на конкретных примерах.

*FORMATION OF MOLECULAR ABSORPTION BANDS IN A MULTILAYER ATMOSPHERE. II. REDUCTION TO CONTINUUM*, by Fomin N. N.— Using the Laplace transform the problem of determination of the distribution of photons by specific path lengths in a multilayer atmosphere is reduced to the solution of the stationary problem. The formulae for the mean path lengths are given. The case when the transmission function may be represented as a superposition of exponents is considered. The results obtained are illustrated by examples.

Как было показано в работе [6], при изучении формирования молекулярных полос поглощения в атмосферах планет требуется определить плотность распределения фотонов по удельным пробегам  $I_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$ . В первой части данной работы [8] предложен алгоритм ее расчета, основанный на методе сложения слоев. Приведем еще один способ нахождения  $I_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$ . Нумерация разделов и формул продолжает начатую в [8], обозначения, введенные в [8], как правило, не поясняются.

**4. Сведение к стационарной задаче в непрерывном спектре.** Основным моментом при расчете поля излучения в многослойной атмосфере является нахождение интенсивности на границах раздела слоев [8]. Из формул (19), (20) следует, что она удовлетворяет одному многомерному интегральному уравнению Вольтерра второго рода и может быть определена применением того или иного численного метода. Но хорошо известно [5], что функция распределения фотонов по длинам пробегов в однородной среде может быть найдена, если мы знаем решение соответствующей стационарной задачи в непрерывном спектре. Покажем, что это же справедливо и в рассматриваемом случае многослойной атмосферы.

Обозначим через  $\bar{J}_{1n}(\tau, s, \omega, \omega_0)$  преобразование Лапласа от  $J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$  по переменным  $l_j$ , т. е.

$$\bar{J}_{1n}(\tau, s, \omega, \omega_0) = \int_R e^{-s \cdot l} J_{1n}(\sigma, l, \omega, \omega_0) dl, \quad (26)$$

где  $s = (s_1, \dots, s_n)$  ( $s_j$  — комплексные числа), а  $s \cdot l$  — скалярное произведение соответствующих векторов. Напомним, что величина  $J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$  представляет собой интенсивность полного излучения в среде, а  $R = \{0 \leq l_1 < \infty, \dots, 0 \leq l_n < \infty\}$ . Учитывая (6) — (8), из (5) получим следующее уравнение:

$$\mu \frac{\partial \bar{J}_{1n}}{\partial \tau} + \left(1 + \sum_{j=1}^n a_j(\tau) s_j\right) \bar{J}_{1n} = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \chi(\tau, \omega \cdot \omega') \times \\ \times \bar{J}_{1n}(\tau, s, \omega', \omega_0) d\mu', \quad (27)$$

которое должно быть решено при условиях

$$J_{1n}(0, \mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0) = \pi \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0), \quad (\mu_1 \mu_0 > 0), \quad (28)$$

$$J_{1n}(\tau_0, \mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0) = 0, \quad \mu < 0. \quad (29)$$

Стационарное уравнение переноса в непрерывном спектре для интенсивности полного излучения  $J_{1n}^{st}(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0)$  при  $\tau \neq t_j (j = \overline{1, n-1})$ , по аналогии с (5), можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial J_{1n}^{st}}{\partial \tau} + J_{1n}^{st} = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \chi(\tau, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') J_{1n}^{st}(\tau, \boldsymbol{\omega}', \omega_0) d\mu'. \quad (30)$$

Его решение при условиях (28) и (29) зависит от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \tau_1, \dots, \tau_n$ , т. е.  $J_{1n}^{st} = J_{1n}^{st}(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$ , что для простоты записи будем обозначать как  $J_{1n}^{st}(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0; \lambda(\tau))$ , опуская  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Алгоритм решения уравнения (30) известен [2].

Из сопоставления (27) и (30) следует, что

$$\bar{J}_{1n}(\tau, \mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0) = J_{1n}^{st} \left[ \tau + \sum_{j=1}^n s_j b_j(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0; \lambda(\tau)) \left( 1 + \sum_{j=1}^n s_j a_j(\tau) \right)^{-1} \right],$$

или, принимая во внимание очевидные равенства  $\sum_{j=1}^n a_j(\tau) = 1$  и  $\sum_{j=1}^n b_j(\tau) = \tau$  (см. формулу (9)),

$$\bar{J}_{1n}(\tau, \mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0) = J_{1n}^{st} \left( \sum_{j=1}^n (1 + s_j) b_j(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0); \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 + s_j} a_j(\tau) \right). \quad (31)$$

Таким образом, функция  $\bar{J}_{1n}(\tau, \mathbf{s}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0)$  получается из  $J_{1n}^{st}(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0; \lambda(\tau))$  путем замены в последней  $\tau$  на  $\sum_{j=1}^n (1 + s_j) b_j(\tau)$  (при этом  $\tau_k$  заменяется на  $(1 + s_k) \tau_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и  $\lambda_j$  — на  $\lambda_j / (1 + s_j)$  ( $j = \overline{1, n}$ )). Тогда  $J_{1n}(\tau, \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0)$  находится по формуле обращения преобразования Лапласа, т. е.

$$J_{1n}(\tau, \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int e^{s_1 t_1} ds_1 \dots \int e^{s_n t_n} J_{1n}^{st} \left( \sum_{j=1}^n (1 + s_j) b_j(\tau, \boldsymbol{\omega}, \omega_0); \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 + s_j} a_j(\tau) \right) ds_n, \quad (32)$$

где интегрирование по переменным  $s_1, \dots, s_n$  происходит вдоль соответствующих прямых и может быть осуществлено численными методами.

Сделаем одно замечание. Как известно, операция численного обращения преобразования Лапласа является плохо обусловленной. Дополнительные трудности при практическом использовании соотношения (32) могут возникнуть при вычислении многомерного интеграла. Тем не менее формула (32) оказывается полезной при исследовании некоторых свойств функции  $J_{1n}(\tau, \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega}, \omega_0)$ .

Выражением (32) устанавливается искомая связь между распределением фотонов по удельным пробегам и решением стационарного уравнения переноса в непрерывном спектре (для нахождения которого разработаны достаточно эффективные численные методы). Отметим, что аналогичное сведение осуществлено в [4] для задачи о нестационарной диффузии излучения в неоднородной среде.

Из (32) следует, что  $J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$  зависит также от величин  $b_j(\tau)$  ( $j = \overline{1, n}$ ), и это обстоятельство будем отмечать, записывая  $J_{1n}$  в виде  $J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0; \mathbf{b}(\tau))$ . Поэтому, обозначив  $J_{1n}$  при консервативном рассеянии ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ ) как  $J_{1n}^{(0)}$ , из (32) после простых, но довольно громоздких преобразований получим

$$J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0; \mathbf{b}(\tau)) = \prod_{j=1}^n \lambda_j \exp \left[ - \sum_{j=1}^n (1 - \lambda_j) l_j \right] J_{1n}^{(0)}(\tau, l, \omega, \omega_0; \mathbf{b}_\lambda(\tau)), \quad (33)$$

где  $\mathbf{b}_\lambda(\tau) = (\lambda_1 b_1(\tau), \dots, \lambda_n b_n(\tau))$ ,  $l_\lambda = (\lambda_1 l_1, \dots, \lambda_n l_n)$ .

Формула (33) — это обобщение аналогичного выражения для однородного плоского слоя [5], т. е., как и в случае однородной среды, достаточно изучить лишь консервативно рассеивающую атмосферу.

Приведем пример применения формулы (32). Пусть величина  $T_{\Delta\nu}(l)$  представима в виде непрерывной суперпозиции экспонент, т. е.

$$T_{\Delta\nu}(l) = \int_R e^{-\alpha l} p(\alpha) d\alpha, \quad (34)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , а  $p(\alpha)$  — некоторая функция. Тогда из (3), (32) и (34) получим следующее выражение для интенсивности  $J_{\Delta\nu}$  внутри полосы поглощения в интервале частот  $\Delta\nu$ :

$$J_{\Delta\nu}(\tau, \omega, \omega_0) = \int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) J_{1n}^{st} \left( \sum_{j=1}^n (1 + \alpha_j) b_j(\tau), \omega, \omega_0; \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 + \alpha_j} a_j(\tau) \right) d\alpha_n,$$

т. е. необходимо рассчитать лишь интенсивность излучения в непрерывном спектре. Случай, когда функция пропускания представима в виде многомерного экспоненциального ряда, исследован в [6]. Иногда вместо  $T_{\Delta\nu}(l)$  может быть использована монохроматическая функция пропускания  $\exp(-\gamma \cdot \bar{l})$ , где  $\bar{l} = (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n)$  — набор средних удельных пробегов в соответствующих слоях (более подробно см. [6]). Поскольку

$$\bar{l}_i = \int_R l_i J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0) dl / J_{1n}^{st}(\tau, \omega, \omega_0),$$

то из (26), (31) следует

$$\bar{l}_i = - \frac{1}{J_{1n}^{st}(\tau, \omega, \omega_0)} \frac{\partial}{\partial s_i} J_{1n}^{st} \left( \sum_{j=1}^n (1 + s_j) b_j(\tau), \omega, \omega_0; \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1 + s_j} a_j(\tau) \Big|_{s_1 = \dots = s_n = 0} \right). \quad (35)$$

Так, из приведенного в [1] выражения для нулевой азимутальной гармоники коэффициента пропускания  $\bar{\sigma}_{12}$  среды, состоящей из двух оптически толстых почти консервативно рассеивающих слоев, находим

$$\bar{\sigma}_{12}(s_1, s_2, \mu, \mu_0) = \frac{4u_{01}(\mu) \left[ u_{02}(\mu) + \frac{A}{1 - A} \right]}{\sqrt{l_{d2}} (3 - x_1^{(2)})} \frac{\sqrt{s_1 l_{d1}}}{sh \sqrt{s_1 l_{d1}}} \frac{\sqrt{s_2 l_{d2}}}{sh \sqrt{s_2 l_{d2}}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{s_1 l_{d1}} \operatorname{cth} \sqrt{s_1 l_{d1}} + \beta \sqrt{s_2 l_{d2}} \operatorname{cth} \sqrt{s_2 l_{d2}}}.$$

Здесь  $u_{0i}(\mu)$  — функция выхода для  $i$ -го слоя в консервативной задаче Милна;  $x_1^{(i)}$  — коэффициент при первом члене разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра в  $i$ -м слое ( $i = 1, 2$ );  $A = \text{const}$  — альbedo поверхности, к которой прилегает нижний слой;  $\beta = \sqrt{l_{d1}(3 - x_1^{(1)})/l_{d2}(3 - x_1^{(2)})}$ ,  $l_{d1} = (3 - x_1^{(1)})(\tau_1 + 2\tau_{01}^e)^2$ ,  $l_{d2} = (3 - x_1^{(2)})(\tau_2 + \tau_{02}^e + \bar{\tau}_{02}^e)^2$ ,  $\tau_{0i}^e = 3\gamma_{0i}/(3 - x_1^{(i)})$ ,  $\gamma_{0i} = 2 \int_0^1 u_{0i}(\mu) \mu^2 d\mu$  ( $i = 1, 2$ ),  $\bar{\tau}_{02}^e = 3\gamma_{02}/(3 - x_1^{(2)})$ ,  $\bar{\gamma}_{02} = \gamma_{02} + \frac{4A}{3(1-A)}$ . Поэтому для консервативно рассеивающей атмосферы, согласно (35), справедливы формулы

$$\bar{l}_1 = l_{d1}(\beta + 3)(\beta + 1)^{-1}/6, \quad \bar{l}_2 = l_{d2}(3\beta + 1)(\beta + 1)^{-1}/6. \quad (36)$$

Напомним [3], что величина  $l_{di}/6$  представляет собой среднюю длину пути, проходимогo фотоном в отдельном взятом  $i$ -м слое ( $i = 1, 2$ ). Необходимо отметить следующее. Пусть в  $k$ -м слое отсутствует поглощающий газ, так что  $\gamma_v^{(k)} \equiv 0$ . Тогда для изучения переноса излучения в полосе поглощения (см., например, (2)) нет необходимости вводить распределение фотонов по переменной  $l_k$ , достаточно ограничиться функцией

$$J_{1n}(\tau, l', \omega, \omega_0) = \int_0^{\infty} J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0) dl_k,$$

где  $l' = (l_1, \dots, l_{k-1}, l_{k+1}, \dots, l_n)$ . При этом  $J_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0) dl'$  представляет собой вклад в интенсивность на глубине  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ) тех фотонов, которые в  $i$ -м слое проходят путь, заключений между  $l_i$  и  $l_i + dl_i$  ( $i = \bar{1}, n$ ;  $i \neq k$ ).

Приведем несколько конкретных примеров, иллюстрирующих применение результатов, полученных в данной работе и в ее первой части [8].

### 5. Двухслойная полубесконечная атмосфера.

1. Пусть полоса поглощения формируется в полубесконечной двухслойной атмосфере. Примем, что верхний (первый) слой — газовой-аэрозольный, оптически толстый ( $\tau_1 \gg 1$ ) и в непрерывном спектре почти консервативно рассеивающий ( $1 - \lambda_1 \ll 1$ ), а нижний — полубесконечный анизотропно рассеивающий консервативный слой ( $\lambda_2 = 1$ ,  $\tau_2 = \infty$ ). Это — один из вариантов иногда используемой в физике планет так называемой модели простого отражения.

В таком случае формула (2) для интенсивности диффузного излучения  $I_v(\tau, \omega, \omega_0)$  примет вид

$$I_v(\tau, \omega, \omega_0) = \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_v^{(1)} l_1) I_{12}(\tau, l_1, \omega, \omega_0) dl_1,$$

где

$$I_{12}(\tau, l_1, \omega, \omega_0) = \int_0^{\infty} I_{12}(\tau, l_1, l_2, \omega, \omega_0) dl_2.$$

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе, функцию  $I_{12}(\tau, l_1, \omega, \omega_0)$  достаточно найти при  $\lambda_1 = 1$ , поскольку при сделанных предположениях и в согласии с (33) имеем

$$I_{12}(\tau, l_1, \omega, \omega_0) = e^{-(1-\lambda_1)l_1} I_{12}^{(0)}(\tau, l_1, \omega, \omega_0)$$

(далее верхний индекс «0» у  $I_{12}^{(0)}(\tau, l_1, \omega, \omega_0)$  опускаем). Рассмотрим асимптотическое поведение  $I_{12}(\tau, l_1, \omega, \omega_0)$  при  $l_1 \rightarrow \infty$  на границе раздела слоев и на верхней границе атмосферы. При этом ограничимся изучением лишь нулевой азимутальной гармоники интенсивности  $I_{12}(\tau, l_1, \mu, \mu_0)$ .

Полагая в выражении (14)  $n=2$ , учитывая, что  $\tau_1 \gg 1$  и интегрируя получившиеся соотношения по всем значениям переменной  $l_2$ , имеем ( $\mu > 0$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} I_{12}(\tau_1, l_1, \mu, \mu_0) &= \mu_0 \sigma_1(l_1, \mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{l_1} \rho_1(l_1 - l_1', \mu, \mu') \times \\ &\quad \times I_{12}(\tau_1, l_1', -\mu', \mu_0) dl_1', \\ I_{12}(\tau_1, l_1, -\mu, \mu_0) &= 2 \int_0^1 \mu' \rho_{02}(\mu, \mu') I_{12}(\tau_1, l_1, \mu', \mu_0) d\mu'. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Здесь и далее нижний индекс «0» у величин, характеризующих стационарное поле излучения, означает, что они взяты при консервативном

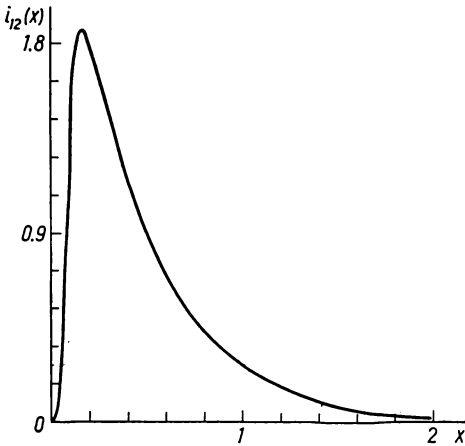


Рис. 1. Зависимость  $i_{12}(x)$ , где  $x=l_1/l_{d1}$

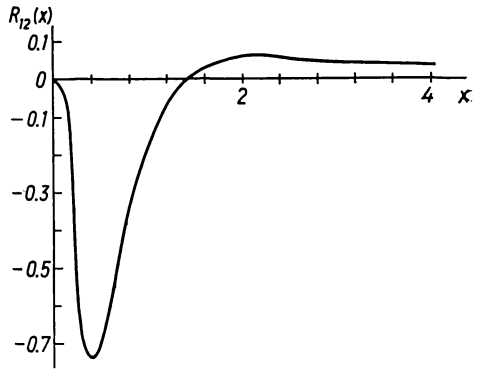


Рис. 2. Зависимость  $R_{12}(x)$ , где  $x=l_1/l_{d1}$

рассеянии. Применяя к (37) преобразование Лапласа по переменной  $l_1$ , получим

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu, \mu_0) &= \mu_0 \bar{\sigma}_1(s, \mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \mu' \bar{\rho}_1(s, \mu, \mu') \bar{I}_{12}(\tau_1, s, -\mu', \mu_0) d\mu', \\ \bar{I}_{12}(\tau_1, s, -\mu, \mu_0) &= 2 \int_0^1 \mu' \rho_{02}(\mu, \mu') \bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu', \mu_0) d\mu', \end{aligned} \right. \quad (38)$$

где чертой сверху обозначены изображения соответствующих функций. Как известно [5],  $\bar{\sigma}_1(s, \mu, \mu_0)$ ,  $\bar{\rho}_1(s, \mu, \mu_0)$  находятся из решения стационарных задач  $\sigma_1^{st}(\mu, \mu_0; \lambda_1, \tau_1)$ ,  $\rho_1^{st}(\mu, \mu_0; \lambda_1, \tau_1)$ , если в них заменить  $\lambda_1$  на  $1/(1+s)$ ,  $\tau_1$  — на  $(1+s)\tau_1$ , т. е.  $\bar{\sigma}_1(s, \mu, \mu_0) = \sigma_1^{st}(\mu, \mu_0; 1/(1+s), (1+s)\tau_1)$ ,  $\bar{\rho}_1(s, \mu, \mu_0) = \rho_1^{st}(\mu, \mu_0; 1/(1+s), (1+s)\tau_1)$ .

Будем искать асимптотическое поведение решения (37), когда одновременно  $l_1 \rightarrow \infty$ ,  $\tau_1 \rightarrow \infty$ , но при этом  $l_1/\tau_1^2 = \text{const}$ . Тогда [3, 7] в  $\rho_1^{st}$ ,  $\sigma_1^{st}$  достаточно заменить  $\lambda_1$  на  $1-s$ , не изменяя значения  $\tau_1$ . При  $1-\lambda_1 \ll 1$  и  $\tau_1 \gg 1$  справедливы следующие формулы [3]:

$$\rho_1^{st}(\mu, \mu_0; \lambda_1, \tau_1) = \rho_{01}(\mu, \mu_0) - u_{01}(\mu_0) u_{01}(\mu) \frac{4k_1}{3-x_1^{(1)}} \text{cth } k_1(\tau_1 + 2\tau_{01}^e),$$

$$\sigma_1^{st}(\mu, \mu_0; \lambda_1, \tau_1) = u_{01}(\mu_0) u_{01}(\mu) \frac{4k_1}{3-x_1^{(1)}} \text{sh}^{-1} k_1(\tau_1 + 2\tau_{01}^e),$$

где  $\rho_{01}(\mu, \mu_0)$  — коэффициент отражения полубесконечной среды при  $\lambda_1 = 1$  с параметрами верхнего слоя, а  $k_1 = \sqrt{(1 - \lambda_1)(3 - x_1^{(1)})}$ . Сделав указанные замены и подставив полученные функции в (38), нетрудно найти, что

$$\bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu, \mu_0) = \mu_0 \mu_{01}(\mu_0) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{s l_{d1}}.$$

Обращая преобразование Лапласа, получим выражение для интенсивности излучения на границе раздела слоев

$$I_{12}(\tau_1, l_1, \mu, \mu_0) = \mu_0 \mu_{01}(\mu_0) l_{d1}^{-1} i_{12}(l_1/l_{d1}). \quad (39)$$

Эта величина не зависит от  $\mu$ , что связано с консервативностью изучаемой среды. Здесь

$$i_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^{3/2}}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) e^{-(2j+1)^2/4x} = \pi \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) e^{-\pi^2(j+1/2)^2 x}. \quad (40)$$

График этой функции изображен на рис. 1. Как следует из (40), справедливы следующие асимптотические представления:

$$i_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^{3/2}}} [e^{-1/4x} + O(e^{-9/4x})], \quad x \ll 1; \quad (41)$$

$$i_{12}(x) = \pi [e^{-\pi^2 x/4} + O(e^{-9\pi^2 x/4})], \quad x \gg 1.$$

Плотность вероятности  $p(l_1)$  прохождения фотоном расстояния  $l_1$  до уровня  $\tau_1$  определяется формулой

$$p(l_1) = l_{d1}^{-1} i_{12}(l_1/l_{d1}).$$

При этом средняя длина проходимого пути  $\bar{l}_1$  и дисперсия значений  $l_1$  оказываются соответственно равными  $l_{d1}/2$  и  $l_{d1}^2/6$ . Отметим, что  $\bar{l}_1$  по порядку величины совпадает с тем значением  $l_1^* \cong 0.2 l_{d1}$ , при котором достигается максимум  $I_{12}(\tau_1, l_1, \mu, \mu_0)$ . Распределение фотонов по  $l_1/l_{d1}$  (рис. 1) имеет характер волны яркости [3, 7]. Причем из (41) следует, что гребень этой волны находится в точке с абсциссой  $x_{\max} \cong 1/6$  и  $i_{12}(x_{\max}) \cong 1.85$ .

Поступая аналогично, получим выражение для коэффициента отражения рассматриваемой среды

$$\rho_{12}(l_1, \mu, \mu_0) = \rho_1^{\infty}(l_1, \mu, \mu_0) - \frac{4\mu_{01}(\mu_0) \mu_{01}(\mu)}{\sqrt{3 - x_1^{(1)}}} \frac{1}{l_{d1}^{3/2}} R_{12}\left(\frac{l_1}{l_{d1}}\right), \quad (42)$$

где  $\rho_1^{\infty}(l_1, \mu, \mu_0)$  — коэффициент отражения полубесконечной атмосферы с параметрами верхнего слоя, а функция  $R_{12}(x)$  (рис. 2) задается формулами

$$R_{12}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi x^{5/2}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(k^2 - \frac{x}{2}\right) e^{-k^2/x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^{3/2}}} -$$

$$- 2\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)^2 e^{-\pi^2(k+1/2)^2 x}. \quad (43)$$

Из (43) получаем  $\int_0^{\infty} R_{12}(x) dx = 0$ . Последнее является следствием того, что полное число отраженных фотонов точно такое же, как если бы они были отражены полубесконечной однородной атмосферой. Учитывая указанное свойство, нетрудно описать качественно поведение функции  $R_{12}(x)$ . Напомним, что нижняя среда консервативна и, следовательно, в нижнем слое накапливается достаточно большое число фотонов. С течением времени они выходят и диффундируют сквозь верхний слой,

проходя в основном пути, длина которых порядка  $l_{d1}$  (при этом совершенно неважно, какой длины путь они прошли во втором слое). Таким образом, вклад таких фотонов в интенсивность уходящего излучения должен быть наибольшим в области  $l_1 \sim l_{d1}$ . Это приводит к увеличению  $\rho_{12}(l_1, \mu, \mu_0)$  по сравнению с  $\rho_{12}^\infty(l_1, \mu, \mu_0)$  при  $l_1 \sim l_{d1}$  («отрицательная» ветвь  $R_{12}(x)$ ). Очевидно, такое увеличение должно компенсироваться соответствующим уменьшением при больших значениях  $l_1$  («положительная» ветвь  $R_{12}(x)$ ). По существу, вторым слагаемым формулы (42) учитывается различие в условиях отражения фотонов от полупространства  $\tau > \tau_1$  в неоднородной среде по сравнению с однородной. Как видно из рис. 2, при  $l_1 < l_1^{**} \cong 1.35 l_{d1}$  область  $\tau > \tau_1$  является более (а при  $l_1 > l_1^{**}$  — менее) эффективным отражателем, чем в однородном случае. Асимптотика первого слагаемого выражения (42) приведена в [5].

II. В предыдущем примере непоглощающим слоем был нижний. Пусть теперь таковым будет верхний; дополнительно примем, что он — оптически толстый ( $\tau_1 \gg 1$ ). Нижний слой в этом примере считаем полубесконечным газовой-аэрозольным, почти консервативно рассеивающим ( $1 - \lambda_2 \ll 1$ ). Тогда формула (2) для нулевой азимутальной гармоники интенсивности диффузного излучения примет вид

$$I_v(\tau, \mu, \mu_0) = \int_0^\infty e^{-\gamma_v^{(2)} l_2} I_{12}(\tau, l_2, \mu, \mu_0) dl_2,$$

где

$$I_{12}(\tau, l_2, \mu, \mu_0) = \int_0^\infty I_{12}(\tau, l_1, l_2, \mu, \mu_0) dl_1.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение  $I_{12}(\tau_1, l_2, \mu, \mu_0)$  и коэффициента отражения среды  $\rho_{12}(l_2, \mu, \mu_0)$  при  $l_2 \rightarrow \infty$ . Как и выше, достаточно изучить их лишь при консервативном рассеянии.

Поступая точно так же, как в примере I, из (14) находим ( $\mu > 0$ ):

$$\begin{cases} I_{12}(\tau_1, l_2, \mu, \mu_0) = \mu_0 \sigma_{01}(\mu_1, \mu_0) \delta(l_2) + 2 \int_0^1 \mu' \rho_{01}(\mu, \mu') I_{12}(\tau_1, l_2, -\mu', \mu_0) d\mu' \\ I_{12}(\tau_1, l_2, -\mu, \mu_0) = 2 \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{l_2} I_{12}(\tau_1, l_2', \mu', \mu_0) \rho_2(l_2 - l_2', \mu, \mu') dl_2'. \end{cases} \quad (44)$$

Обозначая чертой сверху изображения соответствующих функций и применяя к (44) преобразование Лапласа по переменной  $l_2$ , получим

$$\begin{cases} \bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu, \mu_0) = \mu_0 \sigma_{01}(\mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \mu' \rho_{01}(\mu, \mu') \bar{I}_{12}(\tau_1, s, -\mu', \mu_0) d\mu' \\ \bar{I}_{12}(\tau_1, s, -\mu, \mu_0) = 2 \int_0^1 \mu' \bar{\rho}_2(s, \mu, \mu') \bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu', \mu_0) d\mu'. \end{cases}$$

Решение системы при  $s \rightarrow 0$  дается формулой

$$\bar{I}_{12}(\tau_1, s, \mu, \mu_0) = \mu_0 u_{01}(\mu_0) [1 - \sqrt{s} \sqrt{l_{d1} (3 - x_1^{(1)}) / (3 - x_1^{(2)})}],$$

обращение которой приводит к следующему выражению при  $l_2 \rightarrow \infty$ :

$$I_{12}(\tau_1, l_2, \mu, \mu_0) = \mu_0 u_{01}(\mu_0) \sqrt{l_{d1}} \sqrt{(3 - x_1^{(1)}) (3 - x_1^{(2)}) / (2 \sqrt{\pi} l_2^{3/2})}. \quad (45)$$

В данном случае коэффициент отражения имеет вид

$$\rho_{12}(l_2, \mu, \mu_0) = \rho_{01}(\mu, \mu_0) \delta(l_2) + \frac{2}{\mu_0} \int_0^1 \mu' \sigma_{01}(\mu, \mu') I_{12}(\tau_1, l_2, -\mu', \mu_0) d\mu'. \quad (46)$$

Обозначая второе слагаемое через  $\rho_{12}^*(l_2, \mu, \mu_0)$  и учитывая (45), при  $l_2 \rightarrow \infty$  получим

$$\rho_{12}^*(l_2, \mu, \mu_0) = 2u_{01}(\mu_0) u_{01}(\mu) / (\sqrt{\pi(3 - x_1^{(2)})} l_2^{3/2}).$$

Напомним, что первое слагаемое в (46) учитывает вклад в интенсивность уходящего излучения тех фотонов, которые ни разу не были во втором слое. Распределение по  $l_2$  величины  $\rho_{12}^*(l_2, \mu, \mu_0)$  точно такое же, как и коэффициента отражения однородной полубесконечной среды [5]. Отличие заключается лишь в угловой зависимости, оно связано с тем, что верхний слой является оптически толстым, и при диффузии сквозь него излучения успевает установиться угловое распределение, характерное для проблемы Милна в этом слое.

Из приведенных формул следует, что асимптотическая структура поля излучения в разобранных примерах различна. Общим является разделение угловых переменных. Физически очевидно, что это справедливо и для поля излучения в среде, состоящей из двух оптически толстых слоев.

В заключение перечислим основные результаты, полученные в данной работе и ее первой части [8] для многослойной атмосферы: 1. Указан алгоритм нахождения плотности распределения фотонов по удельным пробегам  $I_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$ ; 2. Установлена связь между  $I_{1n}(\tau, l, \omega, \omega_0)$  и решением соответствующей стационарной задачи в непрерывном спектре; 3. Показано, что для определения  $I_{1n}(\tau, l, \omega, \omega)$  достаточно найти ее в консервативно рассеивающей среде.

Автор выражает благодарность Д. И. Нагирнеру и Э. Г. Яновицкому за полезное обсуждение данной работы.

1. Длугач Ж. М., Яновицкий Э. Г. Поле излучения в атмосфере Венеры для двухслойной модели ее строения // Физика планетных атмосфер.— Киев: Наук. думка, 1981.— С. 3—27.
2. Длугач Ж. М., Яновицкий Э. Г. Рассеяние света в многослойных атмосферах. I. Задача о диффузном отражении // Астрофизика.— 1985.—23, вып. 2.— С. 337—348.
3. Иванов В. В., Гутшабах С. Д. Распространение волны яркости в оптически толстой атмосфере // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана.— 1974.—10, № 8.— С. 851—856.
4. Минин И. Н. О нестационарной диффузии излучения в неоднородной среде // Астрофизика.— 1967.—3, вып. 3.— С. 345—350.
5. Минин И. Н. Теория нестационарного поля излучения // Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света.— Минск: Наука и техника, 1971.— С. 59—73.
6. Романова Л. М., Устинов Е. А. Обобщенное уравнение переноса для распределения фотонов по пробегам и задача о вертикально-неоднородном газовом поглощении в атмосфере // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана.— 1982.—18, № 3.— С. 240—250.
7. Фомин Н. Н. Нестационарное поле излучения в оптически толстой атмосфере // Там же.— 1985.—21, № 1.— С. 42—49.
8. Фомин Н. Н. Формирование молекулярных полос поглощения в многослойной атмосфере. I. Алгоритм расчета поля излучения // Кинематика и физика небес. тел.— 1986.—2, № 4.— С. 69—76.