КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 2 № 6 1986

УДК 52-64

Новая форма уравнения переноса излучения в неизотропно рассеивающей атмосфере

Э. Г. Яновицкий

Получена новая форма уравнения переноса излучения в неизотропно рассеивающей однородной плоской атмосфере, которая названа Q-формой. Основное ее отличие от стандартной формы: интенсивность излучения I можно описать формулой $I = \frac{d}{d\tau}\mathscr{L}_1[I]$, тогда как стандартная форма имеет вид $\frac{dI}{d\tau} = \mathscr{L}_0[I]$, где $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_1$ — некоторые линейные интегральные операторы. Показано, что и уравнение для функции Грина соответствующего уравнения переноса также допускает Q-представление. Это позволяет дать простой алгоритм решения общей задачи теории переноса: нахождение поля излучения в плоской атмосфере с заданными первичными источниками, мощность которых зависит лишь от одной пространственной координаты τ.

A NEW FORM OF TRANSFER EQUATION IN ANISOTROPICALLY SCATTERING ATMOSPHERE, by Yanovitskij E. G.— A new form of transfer equation (Q-representation) was obtained relevant to homogeneous anisotropically scattering slab atmosphere. The main difference of the Q-representation from the usual form of transfer equation is that the intensity may be represented as $I = d\mathscr{L}_1[I]/d\tau$ instead of the standard expression $dI/d\tau = \mathscr{L}_0[I]$, where $\mathscr{L}_0$ and $\mathscr{L}_1$ are some linear integral operators. It is shown that the equation for the appropriate Green function may also be expressed in terms of the Q-representation. That allows us to give a simple algorithm for the solution of the general transfer problem, i. e. the determination of radiative field in a slab atmosphere provided that primary sources are given and their power depends on one spatial coordinate τ only.

1. Введение. Решение задачи с параллельным внешним потоком для однородной плоской атмосферы произвольной оптической толщины сводится к нахождению интенсивности диффузного излучения $I(\tau, \mu, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению переноса излучения (см., например, [8, гл, 1, § 3]):

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0)}{d\tau} + I(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = B(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0), \quad (1)$$

$$B(\tau, \mu\ \varphi - \varphi_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \varphi' - \varphi_0)\,\chi(\mu, \mu', \varphi' - \varphi)\,d\mu' + \frac{\lambda}{4}\chi(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right). \quad (2)$$

Принято, что освещенность границы равна $\pi\mu_0$. Оптические свойства среды характеризуются альбедо частиц λ и индикатрисой рассеяния $\chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0)$. Остальные обозначения — стандартные.

Как обычно, будем считать, что для границ атмосферы ($\tau=0$ и $\tau=\tau_0$) выполняются условия ($\mu\in[0, 1]$):

$$I(0, \mu, \varphi) = 0; \qquad I(\tau_0, -\mu, \varphi) = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (1), (2) следует, что в операторном виде стандартную форму уравнения переноса можно записать так:

$$\frac{dI}{d\tau} = \mathscr{L}_0[I], \quad (4)$$

где $\mathscr{L}_0$ — соответствующий линейный интегральный оператор. В данной работе мы покажем, что существует еще одна форма представления уравнения переноса, а именно:

$$I = \frac{d}{d\tau}\mathscr{L}_1[I], \tag{5}$$

где $\mathscr{L}_1$ — также некоторый линейный интегральный оператор. Более того, оказывается, что и уравнение для функции Грина соответствующего уравнения переноса также допускает представление типа (5). Все это позволяет построить простой алгоритм решения общей задачи теории переноса (раздел 6 данной работы).

2. Функция $Q(\mu, \mu_0, \varphi)$ и ее физический смысл. Определим некую вспомогательную функцию $Q(\mu, \mu_0, \varphi)$ с помощью уравнения

$$Q(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) + \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_{-1}^{+1} Q(\mu, \mu', \varphi-\varphi') \times$$
$$\times \chi(\mu_0, \mu', \varphi-\varphi_0)\,d\mu'. \tag{6}$$

Отсюда видно, что при известных индикатрисе рассеяния и альбедо частиц функция Q (при $\lambda \neq 1$) всегда может быть найдена: достаточно к уравнению (6) применить итерационный процесс, положив в нулевом приближении $Q(\mu, \mu_0, \varphi) = \chi(\mu, \mu_0, \varphi)$.

Если индикатриса рассеяния разложима в ряд по азимуту, т. е.

$$\chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \chi(\mu, \mu_0) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \chi^m(\mu, \mu_0)\cos m(\varphi-\varphi_0), \tag{7}$$

то из (6) следует аналогичное представление

$$Q(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = Q(\mu, \mu_0) + 2\sum_{m=1}^{\infty} Q^m(\mu, \mu_0)\cos m(\varphi-\varphi_0), \tag{8}$$

причем каждая азимутальная гармоника функции Q определяется уравнением

$$Q^m(\mu, \mu_0) = \chi^m(\mu, \mu) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{+1} Q^m(\mu, \mu')\,\chi^m(\mu', \mu_0)\,d\mu'. \tag{9}$$

Если же можно представить

$$\chi^m(\mu, \mu_0) = \sum_{i=m}^{\infty} x_i^m P_i^m(\mu)\,P_i^m(\mu_0), \tag{10}$$

где $P_i^m(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра, а

$$x_i^m = x_i\,(i-m)!/(i+m)!, \tag{11}$$

то из (9) находим следующее явное выражение для любой азимутальной гармоники функции Q:

$$Q^m(\mu, \mu_0) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(2i+1)\,x^m}{2i+1-\lambda x_i} P_i^m(\mu)\,P_i^m(\mu_0). \tag{12}$$

Из сопоставления разложений (10) и (12) следует, что ряд (12) сходится медленнее, чем ряд (10), причем при $\lambda = 1$ функция $Q(\mu, \mu_0, \varphi)$ перестает существовать (в выражении (12) при $m=0$ первое слагаемое равно $(1-\lambda)^{-1}$).

Перейдем к выяснению физического смысла функции Q.

а. Представим себе однородную бесконечную среду, оптические свойства которой в каждой точке характеризуются индикатрисой рассеяния $\chi(\gamma)$ и альбедо частиц $\lambda=1$. Пусть эта среда равномерно заполнена мононаправленными излучателями бесконечной мощности, светящими в направлении $\omega_0=(\mu_0, \varphi_0)$. В уравнении переноса для этой среды, очевидно, будет отсутствовать производная по пространственной координате (поле излучения в такой атмосфере будет пространственно однородным). Его можно записать в следующем виде:

$$J^*(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} J^*(\mu', \mu_0, \varphi'-\varphi_0)\,\chi(\mu', \mu, \varphi'-\varphi)\,d\mu' + 2\pi\delta(\mu-\mu_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0), \quad (13)$$

где $J^*(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0)$ — интенсивность полного (прямого+диффузного) излучения в среде. Выделим интенсивность только диффузного излучения с помощью соотношения

$$J^*(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = J(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) + 2\pi\delta(\mu-\mu_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), находим

$$J(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \frac{\lambda}{2}\chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) + \frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} J(\mu', \mu_0, \varphi'-\varphi_0)\times \chi(\mu', \mu, \varphi'-\varphi)\,d\mu'. \quad (15)$$

Сопоставление выражений (15) и (6) показывает, что функция $\lambda Q(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0)/2$ — есть интенсивность диффузного излучения в бесконечной однородной неконсервативно рассеивающей среде с равномерно расположенными в ней мононаправленными δ-излучателями постоянной мощности, светящими в направлении $\omega_0=(\mu_0, \varphi_0)$ *.

б. Продолжаем рассматривать все ту же однородную бесконечную среду. Из уравнения (6) вытекает, что функцию Q можно представить рядом Неймана

$$Q(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \chi(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n V_n(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0), \quad (16)$$

где для $n=1, 2, 3, \ldots$

$$V_n(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} V_{n-1}(\mu, \mu', \varphi-\varphi')\,\chi(\mu', \mu_0, \varphi'-\varphi_0)\,d\mu', \quad (17)$$

причем по определению $V_0(\mu, \mu_0, \varphi)=\chi(\mu, \mu_0, \varphi)$.

Итак, пусть N фотонов, летевших в направлении $\omega_0=(\mu_0, \varphi_0)$, переизлучены элементарным объемом в направлении $\omega=(\mu, \varphi)$ с вероятностью $\lambda\chi(\omega\cdot\omega_0)\,d\omega/4\pi$. Очевидно, что эта величина представляет собой вероятность числа рассеяний, которое испытали N фотонов после переизлучения их в направлении ω.

Проследим далее за этими фотонами. Каждый из них рано или поздно столкнется с рассеивающей частицей и переизлучится в некотором направлении ω с вероятностью $\lambda^2\chi(\omega'\cdot\omega_0)\chi(\omega\cdot\omega')\,d\omega'/4\pi$. Мысленно соберем все точки рассеяния в одну. Элементарный объем, содержащий эту точку, будет как бы облучаться со всех направлений $\omega'=(\mu', \varphi')$ и переизлучать фотоны в направлении $\omega=(\mu, \varphi)$. Следовательно, величина

$$\frac{\lambda^2}{4\pi}d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \chi(\mu', \mu_0, \varphi'-\varphi_0)\,\chi(\mu', \mu, \varphi'-\varphi)\,d\mu'$$

* Указанный физический смысл функции Q подсказан нам В. В. Ивановым.

будет представлять собой вероятность числа рассеяний тех же фотонов в направлении ω после второго акта столкновений. Дальнейшие рассуждения будут аналогичными. Обратившись к формулам (16) и (17), приходим к следующему выводу.

Функция $(\lambda/4\pi)Q(\mu, \mu_0, \varphi-\varphi_0)$ — есть плотность вероятности числа рассеяний, которые испытает в бесконечной однородной среде фотон, начавший свое движение в направлении $\omega_0=(\mu_0, \varphi_0)$ и переизлученный при столкновениях каждый раз в одном и том же направлении $\omega=(\mu, \varphi)$. В частности, при изотропном рассеянии имеем очевидный результат: $Q=(1-\lambda)^{-1}=1+\lambda+\lambda^2+\ldots$.

3. Уравнение переноса. Перейдем непосредственно к выводу уравнения переноса излучения в форме, определяемой выражением (5). Для простоты рассмотрим нулевую азимутальную гармонику интенсивности излучения. Для нее вместо (1) и (2) получим

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \mu_0)}{d\tau} + I(\tau, \mu, \mu_0) = B(\tau, \mu, \mu_0), \tag{18}$$

$$B(\tau, \mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \mu_0)\,\chi(\mu', \mu)\,d\mu' + \frac{\lambda}{4}\chi(\mu, \mu_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right). \tag{19}$$

Умножим обе части выражения (19) на $\lambda Q^0(\mu, \mu_1)/2=\lambda Q(\mu, \mu_1)/2$ и проинтегрируем по μ от -1 до $+1$. Воспользовавшись при этом уравнением (9), получим

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} B(\tau, \mu', \mu_0)\,Q(\mu', \mu)\,d\mu' = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \mu_0)\,Q(\mu', \mu)\,d\mu' -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \mu_0)\,\chi(\mu', \mu)\,d\mu' + \frac{\lambda}{4}\left[Q(\mu, \mu_0) - \chi(\mu, \mu_0)\right]\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right). \tag{20}$$

Используя формулу (19) и уравнение переноса (18), окончательно найдем

$$B(\tau, \mu, \mu_0) = -\frac{\lambda}{4}\frac{d}{d\tau}\left[Q(\mu, \mu_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu_0 + \right.$$

$$\left. + 2\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \mu_0)\,Q(\mu', \mu)\,\mu' d\mu'\right]. \tag{21}$$

Таким образом, функцию источника можно представить в дифференциальной форме. В частности, учитывая (12) при $m=0$, для изотропного рассеяния имеем

$$B(\tau, \mu_0) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\lambda}{1-\lambda}\,\frac{dF(\tau, \mu_0)}{d\tau}, \tag{22}$$

где $F(\tau, \mu_0)$ — поток полного (прямого+диффузного) излучения. Это давно и хорошо известное представление функции источника при изотропном рассеянии (см., например, [7, гл. X, § 4; сравни формулы (59) и (74)]).

Учитывая (18), вместо (21) получаем

$$I(\tau, \mu, \mu_0) = -\frac{\lambda}{4}\frac{d}{d\tau}\left[Q(\mu, \mu_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu_0 + \frac{4}{\lambda} I(\tau, \mu, \mu_0)\,\mu + \right.$$

$$\left. + 2\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \mu_0)\,Q(\mu', \mu)\,\mu' d\mu'\right]. \tag{23}$$

Так же будут выглядеть формулы (21) и (23) для остальных азимутальных гармоник. Следовательно, в общем случае вместо (23) можно окончательно записать

$$I(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = -\frac{\lambda}{4}\frac{d}{d\tau}\left[Q(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\lambda} I(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0)\mu + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu', \varphi' - \varphi_0) Q(\mu', \mu, \varphi' - \varphi)\mu' d\mu'\right]. \quad (24)$$

Это и есть искомая форма уравнения переноса. Такое его представление в общем случае неизотропного рассеяния, насколько известно, ранее не встречалось. Уравнение типа (24) будем называть Q-формой или Q-представлением уравнения переноса излучения. Как уже отмечалось, Q-форма для изотропного рассеяния давно и хорошо известна.

Уравнение (24) несколько упрощается, если вместо интенсивности I ввести поверхностную функцию Грина G уравнения переноса (см., например, [3; 4, § 2.6]).

$$G(\tau, \omega; 0, \omega_0)\mu_0 = 2I(\tau, \omega, \omega_0) + 2\pi\delta(\mu - \mu_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\exp(-\tau/\mu). \quad (25)$$

В результате подстановки (25) в (24) получаем

$$G(\tau, \omega; 0, \omega_0) = -\frac{d}{d\tau}\left[\mu G(\tau, \omega; 0, \omega_0) + \frac{\lambda}{4\pi}\int_{(4\pi)} G(\tau, \omega'; 0, \omega_0) Q(\omega'\omega)\mu' d\omega'\right]. \quad (26)$$

Перечислим основные свойства Q-представления уравнения переноса: *а*) в отличие от стандартной формы (4) Q-форма представляет интенсивность излучения в виде производной по τ от некоторого линейного интегрального оператора интенсивности (сравни (5) и (24)); *б*) если в уравнении (2) под знаком интеграла стоит индикатриса рассеяния χ, характеризующая акт *однократного* рассеяния света, то в (24) там же стоит функция Q, описывающая некоторый процесс *многократного* рассеяния; *в*) формула (5) допускает следующее обобщение ($n=0, 1, 2, \dots$):

$$I = \frac{d^{n+1}}{d\tau^{n+1}} \mathcal{L}_1^{n+1}[I]. \quad (27)$$

Иными словами, интенсивность излучения можно представить *любым* порядком производной по τ некоторого линейного интегрального оператора интенсивности.

Отметим некоторые частные случаи Q-формы уравнения переноса. Очевидно, что интенсивность излучения $I(\tau, \mu)$ в задаче Милна также будет удовлетворять уравнению переноса в Q-представлении

$$I(\tau, \mu) = -\frac{\lambda}{4}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{4}{\lambda} I(\tau, \mu)\mu + 2\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu') Q(\mu', \mu)\mu' d\mu'\right]. \quad (27a)$$

Как известно [8, гл. II, § 4], в глубоких слоях полубесконечной атмосферы для нулевой азимутальной гармоники интенсивности излучения справедлива следующая асимптотическая формула ($\tau \gg 1$):

$$I^{as}(\tau, \mu, \mu_0) = u(\mu_0)\, i(\mu)\exp(-k\tau)\mu_0, \quad (28)$$

где $u(\mu_0)$ — функция выхода в задаче Милна; $i(\mu)$ — угловое распределение интенсивности в бесконечной среде с источником, находящимся на минус бесконечности; k — показатель диффузии. Подставляя (28) в (23), получаем следующую Q-форму уравнения для интенсивности $i(\mu)$:

$$i(\mu)(1 - k\mu) = \frac{\lambda k}{2}\int_{-1}^{+1} i(\mu') Q(\mu, \mu')\mu' d\mu'. \quad (29)$$

4. Случай консервативного рассеяния. При $\lambda=1$ функция Q не существует. Поэтому для нулевой азимутальной гармоники уравнение (23) переходит в стандартное выражение для интеграла потока. Точнее, при $\lambda\to1$ в правой части выражения (23) возникает неопределенность вида 0/0. Для его раскрытия используем то, что при $\lambda\to1$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$2\int_{-1}^{+1} I(\tau,\mu,\mu_0)\,\mu d\mu+\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu_0=\frac{4k\exp(-k\tau)}{3-x_1}(1-3k\gamma_0)\,u_0(\mu_0)\,\mu_0-$$

$$-\frac{15(1-\lambda)}{5-x_2}\left[\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu_0^3+2\int_{-1}^{+1} I_0(\tau,\mu,\mu_0)\,\mu^3 d\mu\right]+O(k^3). \qquad (29а)$$

Здесь нижним индексом «0» обозначены соответствующие функции при $\lambda=1$, величина $\gamma_0=2\int_0^1 u_0(\mu)\,\mu^2 d\mu$, причем $k^2=(1-\lambda)(3-x_1)$.

Примем во внимание следующее выражение для K-интеграла:

$$2\int_{-1}^{+1} I_0(\tau,\mu,\mu_0)\,\mu^2 d\mu+\mu_0^2\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)=\frac{4}{3}u_0(\mu_0)\,\mu_0. \qquad (29б)$$

Это выражение, как и формула (29а) с точностью до члена первого порядка малости относительно k, получено нами в работе [9]. Учитывая формулу (12), а также выражения (29а) и (29б), после ряда преобразований вместо (23) получим Q-представление уравнения переноса излучения в консервативном случае

$$I_0(\tau,\mu,\mu_0)=u_0(\mu)\,\mu_0-\frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\left[4I_0(\tau,\mu,\mu_0)\,\mu+Q_0^*(\mu,\mu_0)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mu_0+\right.$$

$$\left.+2\int_{-1}^{+1} I_0(\tau,\mu',\mu_0)\,Q_0^*(\mu,\mu')\,\mu' d\mu'\right], \qquad (29в)$$

где обозначено

$$Q_0^*(\mu,\mu_0)=\sum_{i=3}^{\infty}\frac{(2i+1)\,x_i}{2i+1-x_i}P_i(\mu)\,P_i(\mu_0)-\frac{15\mu_0^2}{5-x_2}\left[1-\frac{1}{2}x_2P_2(\mu)\right].$$

Как отмечалось, для старших азимутальных гармоник $(m=1,2,3,\ldots)$ при консервативном рассеянии Q-форма уравнения переноса останется неизменной: достаточно в (23) вместо Q подставить Q^m и положить $\lambda=1$.

5. Q-представление функции Грина. Как известно, (см., например, [3; 4, § 2.6]), функция Грина G уравнения переноса излучения в плоской однородной атмосфере определяется уравнением

$$\mu\frac{\partial G(\tau,\omega;\tau_1,\omega_1)}{\partial\tau}+G(\tau,\omega;\tau_1,\omega_1)=\frac{\lambda}{4\pi}\int_{(4\pi)}\chi(\omega\omega')\,G(\tau,\omega';\tau_1,\omega_1)\,d\omega'+$$

$$+2\pi\delta(\tau-\tau_1)\,\delta(\omega-\omega_1). \qquad (30)$$

Для простоты рассмотрим полубесконечную атмосферу. В этом случае к уравнению (30) следует присоединить граничные условия

$$\left.\begin{aligned}&G(0,\omega;\tau_1,\omega_1)=0\ \text{при}\ \tau_1,\mu>0,\\&G(\tau,\omega;\tau_1,\omega_1)\ \text{— ограничено при}\ |\tau-\tau_1|\to\infty.\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Функция Грина удовлетворяет соотношению обратимости

$$G(\tau,\omega;\tau_1,\omega_1)=G(\tau_1,-\omega_1;\tau,-\omega), \qquad (32)$$

выражающему неизменность поля излучения при взаимной перестановке источника и приемника фотонов.

Очевидно, что уравнение (30) может быть представлено в Q-форме. Выполнив преобразования, аналогичные проведенным в § 3, получим

$$G(\tau, \omega; \tau_1, \omega_1) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\mu G(\tau, \omega; \tau_1, \omega_1) + \frac{\lambda}{4\pi}\int_{(4\pi)} Q(\omega\omega') G(\tau, \omega'; \tau_1, \omega_1)\mu' d\omega' - \left[\frac{\lambda}{2} Q(\omega\omega_1) + 2\pi\delta(\omega - \omega_1)\right]\vartheta(\tau - \tau_1)\right\}, \tag{33}$$

где $\vartheta(\tau)$ — единичная функция скачка: $\vartheta(\tau)=1$ при $\tau\geqslant 0$; $\vartheta(\tau)=0$ при $\tau<0$. Это и есть искомое Q-представление уравнения для функции Грина. При $\tau_1=0$ из выражения (33) следует уравнение (26).

Формулу (33) можно упростить, если вместо $Q(\omega, \omega_1)$ ввести величину

$$\tilde{Q}(\omega\omega_1) = Q(\omega\omega_1) + (4\pi/\lambda)\,\delta(\omega - \omega_1). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33), находим

$$G(\tau, \omega; \tau_1, \omega_1) = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\pi\tilde{Q}(\omega\omega_1)\,\vartheta(\tau - \tau_1) - \int_{(4\pi)}\tilde{Q}(\omega'\omega)\, G(\tau, \omega'; \tau_1, \omega_1)\,\mu' d\mu'\right]. \tag{35}$$

В частности, для поверхностной функции Грина из (35) получаем совсем простое выражение

$$G(\tau, \omega; 0, \omega_1) = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{(4\pi)}\tilde{Q}(\omega', \omega)\, G(\tau, \omega'; 0, \omega_1)\,\mu' d\omega'. \tag{36}$$

Физический смысл функции $\tilde{Q}$ легко понять из того, что было сказано о Q-функции в разделе 2 при трактовке ее как интенсивности диффузного излучения в бесконечной среде. Очевидно, что функция $\tilde{Q}$ включает в себя также интенсивность исходных источников излучения.

6. Решение общей задачи. Под общей задачей теории переноса в плоской слоистой атмосфере обычно подразумевают нахождение интенсивности излучения в среде, содержащей внутренние источники, мощность которых зависит лишь от одной пространственной координаты τ.

Обозначим $g(\tau, \mu, \varphi)\,d\tau$ — количество лучистой энергии, испускаемое внутренними источниками в атмосфере, находящимися на оптической глубине τ в элементарном объеме единичного сечения и оптической толщины $d\tau$, в направлении $\omega = (\mu, \varphi)$ в единицу времени. В таком случае задача сводится к нахождению величины

$$I_s(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\tau_1 \int_{(4\pi)} g(\tau_1, \omega')\, G(\tau, \omega; \tau_1, \omega')\, d\omega', \tag{37}$$

которая представляет собой интенсивность излучения, идущего на глубине τ в направлении ω (см., например, [3, 4, 6]).

Запишем функцию Грина в виде

$$G(\tau, \omega; \tau_1, \omega_1)\,\mu_1 = \tilde{G}(\tau, \omega; \tau_1, \omega_1)\,\mu_1 + 2\pi\delta(\omega - \omega_1)\,[\vartheta(\mu_1)\,\vartheta(\tau - \tau_1) - \vartheta(-\mu_1)\,\vartheta(\tau_1 - \tau)]\exp\{-[(\tau - \tau_1)/\mu_1]\}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), получим

$$I_s(\tau, \omega) = I_d(\tau, \omega) + \vartheta(\mu) \int_0^\tau g(\tau_1, \omega) \exp\{-[(\tau - \tau_1)/\mu]\} d\tau_1/\mu -$$

$$- \vartheta(-\mu) \int_\tau^\infty g(\tau_1, \omega) \exp\{-[(\tau - \tau_1)/\mu]\} d\tau_1/\mu. \tag{39}$$

Последние два слагаемых в выражении (39) описывают излучение, непосредственно пришедшее от источников. Эти слагаемые можно считать известными. Величина

$$I_d(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \int_{(4\pi)} g(\tau_1, -\omega') \tilde{G}(\tau_1, \omega'; \tau, -\omega) d\omega' \tag{40}$$

является искомой. Она определяет поле излучения, созданное фотонами, претерпевшими одно или более рассеяний. При написании формулы (40) мы воспользовались соотношением обратимости (32). Представляя

$$\tilde{G}(\tau, \mu, \varphi; \tau_1, \mu_1, \varphi_1) = \tilde{G}(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) + 2 \sum_{m=1}^\infty \tilde{G}^m(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) \cos m(\varphi - \varphi_1) \tag{41}$$

и предполагая, что функция g может быть достаточно хорошо аппроксимирована отрезком ряда Фурье по азимуту, т. е.

$$g(\tau, \mu, \varphi) = g(\tau, \mu) + 2 \sum_{m=1}^M [g^m(\tau, \mu) \cos m\varphi + s^m(\tau, \mu) \sin m\varphi], \tag{42}$$

можем записать

$$I_d(\tau, \omega) = I_d(\tau, \mu) + 2 \sum_{m=1}^M [I_{dc}^m(\tau, \mu) \cos m\varphi + I_{ds}^m(\tau, \mu) \sin m\varphi], \tag{43}$$

где для всех $\mu \in [-1, +1]$

$$\left.\begin{matrix} I_{dc}^m(\tau, \mu) \\ I_{ds}^m(\tau, \mu) \end{matrix}\right| = \int_0^\infty d\tau_1 \int_{-1}^{+1} \left.\begin{matrix} g^m(\tau_1, -\mu') \\ s^m(\tau_1, -\mu') \end{matrix}\right\} \tilde{G}(\tau_1, \mu'; \tau, -\mu) d\mu'. \tag{44}$$

Предположим, что функции $g^m(\tau, \mu)$ и $s^m(\tau, \mu)$ можно достаточно хорошо представить суммами

$$\left.\begin{matrix} g^m(\tau, \mu) \\ s^m(\tau, \mu) \end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^N \left.\begin{matrix} g_n^m(\mu) \\ s_n^m(\mu) \end{matrix}\right\} L_n(\tau), \tag{45}$$

где $L_n(\tau)$ — полином Лагерра порядка n. Тогда вместо (44) получим

$$\left.\begin{matrix} I_{dc}^m(\tau, \mu) \\ I_{dc}^m(\tau, \mu) \end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^N \int_{-1}^{+1} \left.\begin{matrix} g_n^m(-\mu') \\ s_n^m(-\mu') \end{matrix}\right\} R_n^m(\tau, \mu', \mu) d\mu', \tag{46}$$

где

$$R_n^m(\tau, \mu_1, \mu) = \int_0^\infty L_n(\tau_1) \tilde{G}^m(\tau_1, \mu_1; \tau, -\mu) d\tau_1. \tag{47}$$

Итак, задача сведена к нахождению функции R_n^m. Для этого воспользуемся уравнением для Фурье-компоненты $\tilde{G}^m$ функции $\tilde{G}$, которое следует из выражений (38) и (33):

$$\tilde{G}^m(\tau_1, \mu_1; \tau, -\mu) = -\frac{\partial}{\partial\tau_1} \left[\mu_1 \tilde{G}^m(\tau_1, \mu_1; \tau, -\mu) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} Q^m(\mu_1, \mu') \times\right.$$

$$\times \tilde{G}^m(\tau_1, \mu'; \tau, -\mu)\,\mu' d\mu'\Big] + \frac{\lambda}{2\mu} Q^m(\mu_1, -\mu)\,[\vartheta(\mu)\,\vartheta(\tau - \tau_1) -$$

$$- \vartheta(-\mu)\,\vartheta(\tau_1 - \tau)]\exp\left(-\frac{\tau - \tau_1}{\mu}\right). \tag{48}$$

Используя (47) и (48) и рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра

$$\frac{d}{d\tau}[L_n(\tau) - L_{n+1}(\tau)] = L_n(\tau), \tag{49}$$

приходим к рекуррентной формуле

$$R_{n+1}^m(\tau, \mu_1, \mu) = (1 - \mu_1) R_n^m(\tau, \mu_1, \mu) - \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} Q^m(\mu_1, \mu')\, R_n^m(\tau, \mu', \mu)\,\mu' d\mu' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} Q^m(\mu_1, -\mu)\, W_n(\tau, \mu), \tag{50}$$

где функция $W_n(\tau, \mu)$ определяется рекуррентным соотношением

$$W_{n+1}(\tau, \mu) = (1 + \mu)\, W_n(\tau, \mu) + L_{n+1}(\tau) - L_n(\tau), \tag{51}$$

причем

$$W_0(\tau, \mu) = \mu\,[1 - \vartheta(\mu)\exp(-\tau/\mu)]. \tag{52}$$

Из (48), принимая во внимание, что из (38) и (25) при учете (31) и (32) следует, что $\mu_1 \tilde{G}^m(0, \mu_1; \tau, -\mu) = 2I^m(\tau, \mu, -\mu_1)\,\vartheta(-\mu_1)$, находим

$$R_0^m(\tau, -\mu_1, \mu) = -2I^m(\tau, \mu, \mu_1)\,\vartheta(\mu_1) + \frac{\lambda}{2} Q^m(\mu_1, \mu)\,[1 - \vartheta(\mu)\exp(-\tau/\mu)] -$$

$$- \lambda\int_0^1 Q^m(\mu_1, \mu')\, I^m(\tau, \mu, \mu')\,\mu' d\mu'. \tag{53}$$

На этом и заканчивается решение поставленной задачи. Аналогично решается задача и для слоя конечной оптической толщины, если допустимо представление (45) на конечном интервале изменения τ.

Итак, решение общей задачи сведено к решению задачи с параллельным внешним потоком.

На границе атмосферы ($\tau = 0$) вместо (39) имеем ($\mu \in [0, 1]$):

$$I_s(0, -\omega) = I_d(0, -\omega) + \int_0^\infty g(\tau, -\omega)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\frac{d\tau}{\mu}. \tag{54}$$

Что касается соотношений (51) и (53), то, вводя обозначение $R_n^m(0, \mu_1, -\mu) = 2R_n^m(\mu_1, \mu)$, можно переписать их следующим образом ($\mu \in [-1, +1]$, $\mu_0 \in [0, 1]$):

$$R_{n+1}^m(\mu, \mu_0) = (1 - \mu)\, R_n^m(\mu, \mu_0) - \frac{\lambda}{4}\mu_0 Q^m(\mu, \mu_0)(1 - \mu_0)^n -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} Q^m(\mu', \mu)\, R_n^m(\mu', \mu_0)\,\mu' d\mu', \tag{55}$$

причем

$$R_0^m(\mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4} Q^m(\mu, \mu_0) + \rho^m(-\mu, \mu_0)\,\vartheta(-\mu)\,\mu -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \rho^m(\mu', \mu_0)\, Q^m(-\mu', \mu)\,\mu' d\mu', \tag{56}$$

где $\rho^m(\mu, \mu_0)$ — m-я азимутальная гармоника коэффициента отражения (для ее вычисления можно воспользоваться эффективным численным методом, предложенным в [5, 11]).

В случае консервативного рассеяния прежде всего необходимо условие: функция $g(\tau, \omega)$ должна быть такова, чтобы $\int_0^\infty g(\tau, \omega)\,d\tau$ сходился. Представим выражение для $I_d(0, \omega)$ в виде суммы двух слагаемых

$$I_d(0, -\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} I(\tau, \omega', \omega)\frac{d\omega'}{\mu}\left[\int_0^{\tau_{as}} g(\tau, -\omega')\,d\tau + \int_{\tau_{as}}^{\infty} g(\tau, -\omega')\,d\tau\right], \tag{57}$$

где τ_{as} — оптическая глубина, начиная с которой в пределах наперед заданной точности справедлива асимптотическая формула (28), переходящая при $\lambda=1$ в следующее выражение: $I_0^{as}(\tau, \mu, \mu_0) = u_0(\mu_0)\mu_0$. В результате этого второе слагаемое в правой части (57) можно считать известным. Что касается первого слагаемого, то при $m=0$ с помощью формулы (29 в) можно легко получить соответствующий алгоритм расчета, аналогичный приведенному выше. На решении общей задачи при консервативном рассеянии останавливаться не будем.

Формулы аналогичного типа будут справедливы также для атмосферы конечной оптической толщины τ_0. Но тогда необходимо будет кроме коэффициента отражения $\rho(\mu, \mu_0, \varphi)$ вычислять также коэффициент пропускания $\sigma(\mu, \mu_0, \varphi)$. Это не представляет труда, если использовать, например, метод удвоений слоев ван де Хюлста [12, гл. 4].

Отметим, что при изотропном рассеянии задача о нахождении $I_s(0, -\omega)$ при различных внутренних источниках излучения подробно изучена В. В. Соболевым [7, гл. VI, § 3]. В частности, рассматривался случай, когда функция $g(\tau)$ представима в виде разложения ее в ряд по степеням τ. В результате, как и у нас, задача была сведена к использованию некоторых рекуррентных соотношений. При неизотропном рассеянии эта задача рассматривалась также И. Н. Мининым [6].

7. Заключение. Итак, используя Q-форму уравнения для функции Грина, мы нашли решение общей задачи через решение задачи с параллельным внешним потоком. Это, с одной стороны, подчеркивает фундаментальность последней, с другой — свидетельствует о том, что функция Грина, как таковая, в некотором смысле попросту «не нужна».

Что касается задачи с параллельным внешним потоком, то в случае полубесконечной среды для ее численного решения может быть использован, например, эффективный метод, предложенный в работе [2] и реализованный в [1]. В случае конечного слоя можно воспользоваться методом удвоений [10].

На примере решения общей задачи мы продемонстрировали удобство применения Q-формы уравнения переноса. Не исключено, что существуют и другие задачи, для которых Q-представление окажется наиболее подходящей формой для их решния. Не представляют большого труда дать Q-представление уравнения переноса и в векторном случае, т. е. с учетом поляризации излучения. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

1. *Длугач Ж. М.* Расчет поля излучения в однородной полубесконечной атмосфере // Астрон. журн.— 1976.—53, № 6.— С. 1295—1305.
2. *Иванов В. В.* Принципы инвариантности и внутренние поля излучения в полубесконечных атмосферах // Там же.— 1975.—52, № 2.— С. 217—226.
3. *Иванов В. В., Волков Е. В.* Перенос излучения: принципы инвариантности для функции Грина // Тр. астрон. обсерватории Ленингр. ун-та.— 1979.—35.— С. 3—30.
4. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.—384 с.
5. *Коновалов Н. В.* Об области применимости асимптотических формул для расчета монохроматической радиации в неоднородном оптически толстом плоском слое // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана.— 1975.—11, № 12.— С. 1263—1271.

6. *Минин И. Н.* Диффузия излучения в полубесконечной среде при неизотропном рассеянии. I // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия мат., мех. и астрон.— 1961.— № 1, вып. 1.— С. 133—143.
7. *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: ГИТТЛ, 1956.—391 с.
8. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.—335 с.
9. *Яновицкий Э. Г.* Поле излучения в полубесконечной атмосфере при анизотропном рассеянии // Астрон. журн.— 1976.—53, № 5.— С. 1063—1074.
10. *Яновицкий Э. Г.* Принципы инвариантности и интегральные соотношения для полей излучения в плоской атмосфере // Там же.— 1979.—56, № 4.— С. 833—844.
11. *Dlugach J. M., Yanovitskij E. G.* The optical properties of Venus and Jovian planets. II. Method and results of calculations of the intensity of radiation diffuselly reflected from semi-infinite homogeneous atmosphere // Icarus.— 1974.—22, N 1.— P. 66—81.
12. *van de Hulst H. C.* Multiple light scattering (Tables, formulas and applications).— New York: Acad. press, 1980.—1.—299 p.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 19.02.86,
после доработки 05.05.86

РЕФЕРАТ ПРЕПРИНТА

УДК 531.3;352;523.2

СОИЗМЕРИМОСТИ И МАКРОКВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ. I. ПРОБЛЕМА, ПРИНЦИПЫ, МОДЕЛЬ / Гулак Ю. К.

(Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики; ИТФ-86-91Р)

Излагаются основы теории (ч. I, II), которая создается для объяснения наблюдаемого распределения сателлитов (ч. III) разных размеров в системах Солнца и других центральных тел. В I-й части ставится задача, намечаются пути ее решения, вводятся новые определения и понятия, получается основное уравнение теории.

УДК 531.3;352;523.2

СОИЗМЕРИМОСТИ И МАКРОКВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ. II. СТАБИЛЬНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ / Гулак Ю. К.

(Препринт / АН УССР, Ин-т теорет. физики; ИТФ-86-92Р)

Решение основного уравнения выявляет в планетарной системе постоянно неустойчивые состояния и располагающиеся между ними относительно стабильные скопления орбит сателлитов, обладающие тонкой структурой по типу стоячих волн; устанавливается зависимость размеров элементов соизмеримости динамических характеристик образований от параметра центрального тела.