КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 2 №5 1986

УДК 52—17:521

О совместной обработке измерений, распределенных по различным законам

Б. Ф. Магуськин

Показано, что принцип наибольшего веса, применяемый при обработке астрономических измерений, имеет недостаток. Его суть — при обработке не учитывается закон распределения ошибок. Этот недостаток сказывается, если совместно обрабатываются результаты измерений, ошибки которых распределены по различным законам. Поставлена задача: усовершенствовать принцип наибольшего веса так, чтобы мог учитываться закон распределения ошибок. Задача решается с помощью неравенства Чебышева. Получены формулы для исправления весов измерений. Результаты уравнивания получаются оптимальными в смысле достижения наилучшего сочетания требований минимальности дисперсии и максимальности вероятности попадания значений параметров в фиксированный интервал.

ON A JOINT REDUCTION OF MEASUREMENTS WITH ERRORS DISTRIBUTED BY DIFFERENT LAWS, by Magus'kin B. F.— A modification of a maximum weight principle is suggested. The formulae for the corrections of the measurements weight are given.

Существующий порядок определения весов состоит в их вычислении по формуле

$$p = c/\sigma^2, \tag{1}$$

где c — произвольная постоянная, которая обычно принимается равной дисперсии измерений, вес которых — единица; σ^2 — дисперсия рассматриваемого измерения. При этом под словами «дисперсия измерения» понимается дисперсия ряда равноточных измерений, к которым принадлежит данное измерение.

Однако при определении весов по формуле (1) одному и тому же весу могут соответствовать измерения, степень доверия к которым различна. Более точно степень доверия определится в том случае, если кроме дисперсии учитывать вероятность попадания в заданный интервал значений случайной величины — результата измерений. В качестве такого интервала выберем интервал длиной в два стандарта, который назовем стандартным.

Общий вид формулы для определения веса с учетом вероятности попадания в фиксированный интервал

$$p = cf(P)/\sigma^2, \tag{2}$$

где p — вес; P — вероятность попадания в фиксированный интервал; σ^2 — дисперсия; $f(P)$ — неизвестная пока функция, о которой знаем лишь то, что она увеличивается при увеличении доверительной вероятности.

Удобен следующий порядок учета различий вероятностей попадания в стандартный интервал. Выберем какой-либо закон распределения в качестве исходного. Для измерений, распределенных по исходному закону, веса будем вычислять по обычной формуле, т. е. формуле (1). Для других измерений также вычислим сначала веса по обычной формуле, затем исправим их путем умножения на поправочный коэффициент, учитывающий различие вероятностей попадания в стандартный интервал. Исправление весов эквивалентно изменению дисперсий. Эти изменения должны быть такими, чтобы все дисперсии соответствовали одной и той же вероятности попадания результатов измерений в стандартный интервал, т. е. одному и тому же распределению, а именно — исходному.

Исходным можно выбрать любой закон, для которого вероятность попадания ошибок в стандартный интервал не зависит от величины дисперсии и, следовательно, от величины стандартного интервала.

Таким свойством обладает, например, нормальный закон. В дальнейших рассуждениях будем считать, что он выбран исходным, хотя можно выбрать и другой закон, и рассуждения при этом не изменятся.

Найдем формулу для поправочного коэффициента. Из неравенства Чебышева вытекает доверительная оценка

$$\Phi\{Mx-\sigma/\sqrt{1-P}<x<Mx+\sigma/\sqrt{1-P}\}>1-(\sigma^2/\varepsilon^2)=P, \qquad (3)$$

где σ^2 — дисперсия случайной величины; Mx — ее математическое ожидание; P — доверительная вероятность; $\Phi\{...\}$ — вероятность события, заключенного в скобках; $\varepsilon=\sigma/\sqrt{1-P}$.

Для истинной ошибки выражение (3) примет вид

$$\Phi\{-\sigma/\sqrt{1-P}<\Delta<\sigma/\sqrt{1-P}\}>1-(\sigma^2/\varepsilon^2)=P. \qquad (4)$$

Из выражения (4) следует, что если увеличить доверительную вероятность P на величину ΔP, то получим

$$\Phi\{-\sigma/\sqrt{1-P-\Delta P}<\Delta<\sigma/\sqrt{1-P-\Delta P}\}=P+\Delta P. \qquad (5)$$

Соответствующий доверительный интервал будет больше первоначального в следующее число раз:

$$\sqrt{1-P}/\sqrt{1-P-\Delta P}=1/k, \qquad (6)$$

где k — новое обозначение, характеризующее отношение длин доверительных интервалов.

Вероятность попадания в стандартный интервал для произвольного распределения обозначим через P_σ, для нормального распределения — через $P_\sigma^{(n)}$. Принимая $P_\sigma^{(n)}$ в качестве фиксированной доверительной вероятности, получаем для нормального распределения

$$p_n=c_n/\sigma_n^2, \qquad (7)$$

где индекс n означает, что соответствующие величины относятся к нормальному распределению, а для произвольного распределения P_σ отличается от $P_\sigma^{(n)}$ на ΔP, поэтому

$$p=kc_n/\sigma^2, \qquad (8)$$

где

$$k=(1-P_\sigma-\Delta P)/(1-P_\sigma)=(1-P_\sigma^{(n)})/(1-P_\sigma). \qquad (9)$$

Таким образом, если измерения имеют нормальное распределение, то их веса определяются обычным путем по формуле (7). Если часть измерений распределена по другим законам, то веса, определенные по формуле

$$p'=c_n/\sigma^2, \qquad (10)$$

необходимо исправить, согласно формуле (8), с помощью умножения на поправочный коэффициент k:

$$p=kp', \qquad (11)$$

где k — определяется по формуле (9).

Дальнейшая обработка измерений проводится обычным способом.

Урал. ун-т им. А. М. Горького,
Свердловск

Поступила в редакцию 16.12.85,
после доработки 28.03.86