КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 2 № 5 1986

УДК 523.64

# Основная задача МТКФ и теория кометных пылевых хвостов. I

Г. Ф. Черный

Рассмотрена задача двух тел в неинерциальной системе отсчета. Показана органическая связь ее решения с классическим решением основной задачи механической теории кометных форм (МТКФ). Детально исследован случай с параметром $\mu=0$.

Традиционные вопросы рассмотрены с новых позиций и ряд результатов получен впервые. Среди них: точное решение системы уравнений движения пылинки в кометоцентрической системе координат для пылевого источника конечных размеров, выбрасывающего частицы в любом направлении с произвольной скоростью (уравнения (12) и последующие формулы разд. 3 и 4); аналитическое задание синдинам с параметром $\mu=0$ в случае комет с эллиптической или параболической орбитами (формулы (6) и (7)); результаты изучения вопроса о распространении метода Финсона — Пробстейна, развитого для точечных сферически-симметричных источников пылевых частиц, на случай несимметричных источников конечных размеров (разд. 5).

*MTCF BASIC PROBLEM AND A THEORY OF COMETARY DUST TAILS. I., by Chörny G. F.*— A two-body problem is considered in the noninertial frame of reference A fundamental connection of its solution with the classical one of the basic problem of MTCF (mechanical theory of cometary form) is shown. A case of syndynames with parameter $\mu=0$ is investigated in detail. Some recommendations for using the Finson-Probstein method [8] in the case of an unisotropic dust particles sources are given.

1. Вне сферы влияния кометного ядра испущенная им незаряженная пылинка находится, в основном, под действием центральных сил притяжения Солнцем $\mathbf{F}_\odot$ и светового давления $\mathbf{F}_r$. Поэтому можно считать, что она движется под действием результирующей силы $\mu\mathbf{F}_\odot = \mathbf{F}_\odot - \mathbf{F}_r$ [8]; параметр $\mu$ выбран положительным, если направление результирующей силы совпадает с направлением вектора $\mathbf{F}_\odot$.

Для пылинки, движущейся в плоскости кометной орбиты, система уравнений движения в кометоцентрических координатах с началом в центре кометного ядра, осью $\xi$ — вдоль направления Солнце — ядро и осью $\eta$, направленной противоположно вектору трансверсальной скорости кометы, имеет вид [5]

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -g(r+\xi)/r_D^3 + GM/r^2 - 2\dot{\theta}\dot{\eta} + \dot{\theta}^2\xi + \ddot{\theta}\eta, \\ \ddot{\eta} = -g\eta/r_D^3 + 2\dot{\theta}\dot{\xi} + \dot{\theta}^2\eta + \ddot{\theta}\xi, \end{cases} \tag{1}$$

где $r$ — гелиоцентрическое расстояние ядра, $r_D$ — гелиоцентрическое расстояние пылинки, $(\xi, \eta)$ — кометоцентрические координаты пылинки, $g=\mu GM$, $M$ — масса Солнца, $\dot{\theta}=\sqrt{q(1+e)GM}/r^2$ — угловая скорость движения кометного ядра относительно Солнца, $\ddot{\theta}=-2GM\cdot\sin\theta/r^3$ — угловое ускорение ядра, $\theta$ — истинная аномалия кометы, $e$ — эксцентриситет ее орбиты, $q$ — перигелийное расстояние кометы.

Система (1) может быть получена также из соответствующей системы уравнений плоской ограниченной (или, по терминологии [7], планетоидной) задачи трех тел [2]:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\xi}} = \dfrac{\partial W}{\partial\tilde{\xi}} - 2\dot{\theta}\dot{\eta} + \dot{\theta}^2\tilde{\xi} + \ddot{\theta}\eta, \\ \ddot{\eta} = \dfrac{\partial W}{\partial\eta} + 2\dot{\theta}\dot{\tilde{\xi}} + \dot{\theta}^2\eta + \ddot{\theta}\eta, \end{cases}$$

в которой с высокой точностью $\tilde{\xi} = r + \xi$, $\partial W/\partial\tilde{\xi} = -g(r+\xi)/r_D^3 - \mu Gm\xi/R^3$, $\partial W/\partial\eta = -g\eta/r_D^3 - \mu Gm\eta/R^3$, $r_D = (\tilde{\xi}^2 + \eta^2)^{1/2}$, $R = (\xi^2+\eta^2)^{1/2}$; $m$ — масса кометного ядра. Для этого следует только заметить, что если принять радиус сферы влияния ядра $R_0 < 10^{-5}$ а. е. ($\approx 1500$ км), то вторыми слагаемыми в $\partial W/\partial\tilde{\xi}$ и $\partial W/\partial\eta$ можно пренебречь, и что для ядра кометы, которое находится в поле центральной силы, $r\dot{\theta} - \ddot{r} = GM/r^2$, а $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ [7, с. 29].

Система, подобная (1), была, по-видимому, впервые решена в работе [1]. Однако форма полученного там решения неудобна для рассмотрения поставленных здесь вопросов. Поэтому предпринята успешная попытка прямого решения системы (1) отличными от использованных в [1] методами комплексного анализа.

Введем комплексную переменную $z = \xi + i\eta$. Тогда из (1) получим уравнение

$$\ddot{z} = -g(r+z)/r_D^3 + GM/r^2 + 2i\dot{\theta}z + (\dot{\theta}^2 + i\ddot{\theta})z, \tag{2}$$

в котором $r_D = |r+z|$. Подставим $z = \rho\cdot\exp\left(i\int_{t_0}^{t}\dot{\theta}dt'\right) = \rho\cdot\exp\{i[\theta(t) - \theta(t_0)]\} \equiv \rho\cdot\exp i\Delta\theta$, где $t_0$ — момент, когда частица покидает сферу действия ядра, $t$ — момент наблюдения. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\ddot{\rho} + g(r+z)\exp(-i\Delta\theta)/r_D^3 = GM\exp(-i\Delta\theta)/r^2, \tag{3}$$

где $r_D = |(r+z)\exp(-i\Delta\theta)|$.

Так как в кометном хвосте имеются пылинки, для которых $F_\odot = F_r$, то удобно рассмотреть отдельно два случая. Предположим вначале, что $\mu = 0$.

В случае $\mu = 0$ уравнение (3) упрощается: $\ddot{\rho} = GM\exp(-i\Delta\theta)/r^2$. Его общее решение (см., напр., [3, с. 219]): $\rho = GM\int_{t_0}^{t} dt'\,(t-t')\exp\{-i\times$ $\times[\theta(t') - \theta(t_0)]\}/r^2 + (t-t_0)\dot{\rho}_0 + \rho_0$; $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$, $\dot{\rho}_0 \equiv \dot{\rho}(t_0)$. Отсюда для $z$ получаем выражение:

$$z = GM\int_{t_0}^{t} dt'\,(t-t')\exp i[\theta(t) - \theta(t')]/r^2 + [(\dot{z}_0 - i\dot{\theta}_0 z_0)(t-t_0) + z_0]\exp i\Delta\theta; \tag{4}$$

$$\dot{\theta}_0 \equiv \dot{\theta}(t_0), \quad z_0 = \xi_0 + i\eta_0 \equiv \xi(t_0) + i\eta(t_0), \quad \dot{z}_0 \equiv \dot{z}(t_0).$$

Подвергнем полученное решение (4) более подробному анализу.

2. Перепишем первое слагаемое из (4) в виде $z_f = \int_{t_0}^{t} dt'\,(t-t')\times$ $\times GMr^{-2}\exp i\Delta\theta'$. В этом интеграле, пользуясь тождеством $dt' = (dt'/d\theta')d\theta' = r^2[q(1+e)GM]^{-1/2}d\theta'$, можно перейти от интегрирования по времени к интегрированию по углу $z_f = [GM/q(1+e)]^{1/2}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'(t-t')\exp i\Delta\theta'$. Разность $t - t'$ можно найти из уравнения Кеплера или из его аналогов в случае комет с неэллиптической орбитой. В результате для $z_f$ получается выражение

$$z_f = n^{-1}\cdot\sqrt{GM/q(1+e)}\,[i(1-\exp i\Delta\theta)W - I(\theta)\exp i\theta]. \tag{5}$$

Здесь $n$ — среднее движение, а $W$ — часть уравнения Кеплера, зависящая от эксцентрической аномалии (или их аналоги для «неэллиптических» комет); $I(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta' W(\theta') \exp(-i\theta')$.

Для кометы с эллиптической орбитой

$$I_э(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} (E' - e \sin E') \exp(-i\theta')\, d\theta' =$$

$$= 2\left[\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{arctg} \beta_э \sigma' \exp(-i\theta')\, d\theta' - e \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\beta_э \sigma'}{1 + (\beta_э \sigma')^2} \exp(-i\theta')\, d\theta'\right];$$

$\beta_э = \sqrt{(1-e)/(1+e)}$, $\sigma' = \operatorname{tg}(\theta'/2)$. Сба интеграла в скобках—берущиеся:

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{arctg}(\beta_э \sigma') \exp(-i\theta')\, d\theta' = -\frac{2\beta_э}{1-\beta_э^2}\left[\ln \frac{\beta_э(\sigma' - i)}{\sqrt{1 + (\beta_э \sigma')^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + i\beta_э^2 \sigma'}{\beta_э(\sigma' - i)} \operatorname{arctg} \beta_э \sigma'\right]_{\theta_0}^{\theta};$$

принятое здесь обозначение следует понимать так: $[S(\theta')]_{\theta_0}^{\theta} = S(\theta) - S(\theta_0)$;

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\beta_э \sigma'}{1 + (\beta_э \sigma')^2} \exp(-i\theta')\, d\theta' = -\beta_э\left[\frac{\cos\theta'}{1 - \beta_э^2} - \frac{1 + \beta_э^2}{(1 - \beta_э^2)^2} \ln(1 + \beta_э^2 + \right.$$

$$\left. + (1 - \beta_э^2)\cos\theta')\right]_{\theta_0}^{\theta} + \frac{i\beta_э}{1 - \beta_э^2}\left[\sin\theta' - \theta'/e - e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \times \right.$$

$$\left. \times \arcsin\left((e + \cos\theta')/(1 + e\cos\theta')\right)\right]_{\theta_0}^{\theta}.$$

После подстановки двух последних выражений в $I_э(\theta)$ и последующих преобразований окончательно получаем

$$I_э(\theta) = \left[\sqrt{1 - e^2} \exp(-i\theta') + 2i\left(e + \exp(-i\theta')\right) \operatorname{arctg} \beta_э \sigma'\right]_{\theta_0}^{\theta}.$$

Отсюда для $z_f$ в случае кометы с эллиптической орбитой имеем

$$z_f = a_э (1 - e^2)^{-1/2} \{i \cdot n_э (t - T_э)(1 - \exp i\Delta\theta) - \exp(i\theta)\,[2i(e + \exp(-i\theta')) \times$$

$$\times \operatorname{arctg}(\beta_э \sigma') + \sqrt{1 - e^2} \exp(-i\theta')]_{\theta_0}^{\theta}\}, \qquad (6)$$

где $a_э$ — большая полуось, $n_э$ — среднее движение, $t$ — момент наблюдения, $T_э$ — момент прохождения через перицентр.

Для кометы с параболической орбитой

$$I_п(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} (\sigma' + \sigma'^3/3) \exp(-i\theta')\, d\theta', \qquad \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sigma' \exp(-i\theta')\, d\theta' = -i\Delta\theta -$$

$$- \exp(-i\theta) + \exp(-i\theta_0) + \ln[(1 + \cos\theta)/(1 + \cos\theta_0)],$$

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sigma'^3 \exp(-i\theta')\, d\theta' = -\sigma(\sigma + 4i) + \sigma_0(\sigma_0 + 4i) + 3i\Delta\theta + \exp(-i\theta) -$$

$$- \exp(-i\theta_0) - 3\ln[(1 + \cos\theta)/(1 + \cos\theta_0)], \qquad \sigma_0 = \operatorname{tg}(\theta_0/2);$$

отсюда

$$I_п(\theta) = -(2/3)\left(\exp(-i\theta) - \exp(-i\theta_0)\right) - (1/3)(\sigma - \sigma_0)(\sigma + \sigma_0 + 4i);$$

$$z_f = q\sqrt{2/(1+e)}\,[i(1-\exp i\Delta\theta)\,W_п - I_п(\theta)\exp(i\theta)] = q\sqrt{2/(1+e)}\times$$

$$\times\{(2/3)(1-\cos\Delta\theta) + W_п\sin\Delta\theta + (1/3)(\sigma-\sigma_0)\left((\sigma+\sigma_0)\cos\theta - 4\sin\theta\right) +$$

$$+ i\,[W_п(1-\cos\Delta\theta) - (2/3)\sin\Delta\theta + (1/3)(\sigma-\sigma_0)\left((\sigma+\sigma_0)\sin\theta + 4\cos\theta\right)]\}, \tag{7}$$

где $q$ — перигелийное расстояние кометы, а $W_п = \sigma + \sigma^3/3$.

Для кометы с гиперболической орбитой

$$I_г(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta}(e\,\mathrm{sh}\,F' - F')\exp(-i\theta')\,d\theta' = 2\left(e\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\beta_г\sigma'}{1-(\beta_г\sigma')^2}\exp(-i\theta')\,d\theta' -\right.$$

$$\left.-\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{arth}\,(\beta_г\sigma')\exp(-i\theta')\,d\theta'\right), \qquad \beta_г = \sqrt{(e-1)/(e+1)}.$$

Эти интегралы остались неисследованными.

Вторую часть формулы (4) мы рассмотрим более внимательно в разд. 5, а пока приступим к решению уравнения (3) в общем виде, когда $\mu \neq 0$.

3. Как уже говорилось, для кометного ядра в поле центральной силы выполнено соотношение $GMr^{-2}\exp(-i\Delta\theta) = -(r\exp(-i\Delta\theta))^{\cdot\cdot}$, в котором двумя точками справа обозначена вторая частная производная по времени. С его помощью уравнение (3) приводится к виду

$$\ddot{\tilde\rho} + g\tilde\rho/r_D^3 = 0; \qquad \tilde\rho = r\exp(-i\Delta\theta) + \rho, \quad r_D = |\tilde\rho|. \tag{8}$$

Заметим, что переход от уравнения (3) к уравнению (8) равносилен переходу от кометоцентрической координатной системы к вращающейся гелиоцентрической системе координат $(\tilde\xi = r + \xi, \eta)$ и движение частицы описывается теперь переменной $\tilde z = \tilde\xi + i\eta = r + z = \tilde\rho\exp i\Delta\theta$. В то же время уравнение (8) по форме совпадает с уравнением относительного движения тела в инерциальной системе отсчета, поэтому мы будем решать его аналогично, но с привлечением средств комплексного анализа.

Как обычно, получим из уравнения движения (8) интеграл энергии и интеграл площадей. Для этого умножим обе части (8) на $\dot{\tilde\rho}^*$ ($*$ — знак комплексного сопряжения) и возьмем вещественную часть от произведения, тогда $\mathrm{Re}\,(\dot{\tilde\rho}^*\ddot{\tilde\rho}) + g\,\mathrm{Re}\,(\dot{\tilde\rho}^*\tilde\rho)/r_D^3 = 0$. Пользуясь тем, что $\tilde\rho = (\tilde\xi + i\eta)\exp(-i\Delta\theta)$, а $r_D = (\tilde\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, приходим к соотношению: $d|\dot{\tilde\rho}|^2/dt = 2d(g/r_D)/dt$. Интегрируя последнее по времени, имеем интеграл энергии

$$|\dot{\tilde\rho}|^2 = 2g/r_D + H_1; \qquad H_1 \equiv |\dot{\tilde\rho}_0|^2 - 2g/r_{D0},$$

$$r_{D0} \equiv |\tilde\rho(t_0)|, \quad |\dot{\tilde\rho}_0|^2 = |\dot{\tilde\rho}(t_0)|^2. \tag{9}$$

Возьмем мнимую часть от произведения (8) на $\tilde{\rho}^*$: $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}^*\ddot{\tilde{\rho}}) = \mathrm{Im}(\tilde{\rho}^*\dot{\tilde{\rho}})^{\cdot} = 0$. Интегрируя последнее равенство по времени, приходим к интегралу площадей

$$\mathrm{Im}(\tilde{\rho}^*\dot{\tilde{\rho}}) = c, \quad c \equiv \mathrm{Im}(\tilde{\rho}_0^*\dot{\tilde{\rho}}_0). \tag{10}$$

Представим $\tilde{\rho}$ в виде $\tilde{\rho} = r_D \exp(i\chi)$. Тогда соотношения (9) и (10) преобразуются к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{r}_D^2 + r_D^2\dot{\chi}^2 = 2g/r_D + H_1, \\ \dot{\chi} r_D^2 = c. \end{cases} \tag{11}$$

Как известно [7], ее решение имеет вид:

$$r_D = p_D[1 + e_D\cos(\chi - \omega_0^{\pm}]^{-1}; \qquad W_D = n_D(t - T_D). \tag{12}$$

Первое соотношение — уравнение траектории пылевой частицы. Второе — уравнение Кеплера. Входящие сюда параметры связаны с постоянными интегрирования соотношениями: $p_D = c^2/g$, $e_D = cH/g$, $H = [H_1 + (g/c)^2]^{1/2}$, $n_D = H_1^{3/2}/g$, $T_D = t_0 - W_D(t_0)/n_D$, $\omega_0^{\pm} = \chi_0 \pm \arccos(f_0/H)$, $f_0 = c/r_{D0} - g/c$, $\omega_0^{+} = 2\chi_0 - \omega_0^{-}$. Нижний знак в $\omega_0^{\pm}$ берется для частицы на участке траектории с $\dot{r}_D > 0$.

Определив $r_D$ и $\chi$, находим $\tilde{\rho}$, а значит, и $z = \tilde{\rho}\exp i\Delta\theta - r$. Тем самым получено искомое решение уравнения (2).

Практически полезно выписать явную зависимость постоянных интегрирования от начальных условий задачи, а также порядок вычисления переменных $\chi$ и $r_D$.

4. Предположим, что нам известны положение $(\xi_0, \eta_0)$ и скорость $(\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0)$ пылевой частицы в момент $t_0$ ее вылета из сферы влияния ядра. Тогда, используя начальное определение постоянной $c$ в формуле (10), получим $c = -r_{D0}^2\dot{\theta}_0 + \tilde{\xi}_0\dot{\eta}_0 - \dot{\tilde{\xi}}_0\eta_0$, где $r_{D0}^2 = \tilde{\xi}_0^2 + \eta_0^2$, $\tilde{\xi}_0 = r_0 + \xi_0$, $\dot{\theta}_0 = -[GMq(1+e)]^{1/2}/r_0^2$, $r_0 = q(1+e)/(1+e\cos\theta_0)$ — гелиоцентрическое расстояние кометного ядра в момент $t_0$.

Постоянная $H_1 = (c/r_{D0})^2 + \dot{r}_{D0}^2 - 2g/r_{D0}$, где $\dot{r}_{D0}^2 = (\tilde{\xi}_0\dot{\tilde{\xi}}_0 + \eta_0\dot{\eta}_0)^2/r_{D0}^2$, $g = \mu GM$. В случае, когда $H_1 > 0$, частица движется по гиперболе.

Постоянная $H^2 = H_1 + (g/c)^2 = (c/r_{D0} - g/c)^2 + \dot{r}_{D0}^2 \equiv f_0^2 + \dot{r}_{D0}^2$. Так как $e_D = cH/g > 0$, то при $\mu > 0$ (ослабленное притяжение) произведение $cH$ должно быть положительным.

Постоянная $\omega_0^{-} = \chi_0 - \arccos(f_0/H)$, где $\chi_0 = \mathrm{arctg}(\eta_0/\tilde{\xi}_0)$.

Для гиперболической орбиты $W_D(t_0) = e_D \,\mathrm{sh}\, F_0 - F_0$, где $F_0 = 2\,\mathrm{arth}\left[\frac{(e_D-1)(1-f_0/H)}{(e_D+1)(1+f_0/H)}\right]^{1/2}$.

После того, как вычислены постоянные величины $g$, $c$, $H$, $\chi_0$, $\omega_0^{-}$, $F_0$, $n_D$ и $T_D$, из уравнения $e_D\,\mathrm{sh}\,F - F = n_D(t - T_D)$ находим $F$. В настоящее время при большом распространении вычислительной техники это уравнение удобно решать итерациями по методу Ньютона [4]. Полагая $u(F) =$

$= F - e_D \operatorname{sh} F + n_D (t - T_D) = 0$, $u'_F(F) = \partial u/\partial F = 1 - e_D \operatorname{ch} F$, получаем рекуррентную формулу: $F_{N+1} = F_N - u(F_N)/u'_F(F_N)$.

Затем, пользуясь формулами $\operatorname{tg}[(\chi - \omega_0^-)/2] = \sqrt{(e_D + 1)/(e_D - 1)} \operatorname{th}(F/2)$ и (12), находим соответственно $\chi$ и $r_D$.

Величины $\chi$ и $\omega_0^-$ естественным образом связаны с истинной аномалией $\theta_D$ пылинки и с углом положения $\alpha_D$ оси симметрии ее орбиты. Если угол вращения в направлении от оси $\eta$ к оси $\xi$ считать положительным, то в представлении $\tilde{\rho} = r_D \exp(i\chi)$ угол $\chi > 0$ и имеет место связь: $\chi = \theta_D - \theta_0$, $\omega_0^- = \alpha_D - \theta_0$, — так что разность $\chi - \omega_0^- = \theta_D - \alpha_D$.

При подстановке в выражения для $e_D$, $a_D = g/H_1$ и $\alpha_D$ нулевых начальных данных $\xi_0 = \eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ получаем формулы, приведенные в работе [8]:

$$e'_D = \mu^{-1}[(1-\mu)^2 + 2e(1-\mu)\cos\theta_0 + e^2]^{1/2},$$

$$a'_D = \mu q r_0/[2q(1-\mu) + r_0(e-1)],$$

$$n'_D = \mu^{-1}\sqrt{GM}\,[2(1-\mu)/r_0 + (e-1)/q]^{3/2},$$

$$\omega'_0 = -\arcsin(e\sin\theta_0/\mu e'_D).$$

Сюда надо только подставить $e=1$, так как в [8] формулы приведены для случая, когда комета имеет параболическую орбиту.

Прежде, чем закончить раздел, сделаем еще одно важное замечание: от постоянных интегрирования, которые получают при интегрировании уравнения движения пылинки в неподвижной системе координат, можно перейти к аналогичным постоянным, полученным выше при интегрировании уравнений движения во вращающейся системе координат, если выполнить соответствующую замену «переменных», входящих в эти постоянные. Тем самым можно формально написать решение уравнения (8), не прибегая к его прямому интегрированию. Проиллюстрируем сказанное на примере постоянной площадей $c$. При этом для определенности можно воспользоваться информацией из [6]. Для $C_1$ (обозначения [6]) имеем: $C_1 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0$. Если произвести замену $x = \tilde{\xi}\cos\Delta\theta + \eta\sin\Delta\theta$, $y = -\tilde{\xi}\sin\Delta\theta + \eta\cos\Delta\theta$ и вычислить производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, а затем в $C_1$ перейти к $\tilde{\xi}_0$, $\eta_0$, $\dot{\tilde{\xi}}_0$, $\dot{\eta}_0$ (с учетом того, что $\Delta\theta(t_0)=0$), то получим $C_1 = -(\tilde{\xi}_0^2 + \eta_0^2)\dot{\theta}_0 + (\tilde{\xi}_0\dot{\eta}_0 - \dot{\tilde{\xi}}_0\eta_0) = c$.

5. Продолжим исследование случая синдинам с $\mu=0$. Представим второе слагаемое выражения (4) в виде:

$$z_e = \{\dot{z}_0(t-t_0) + z_0\sqrt{1 + \dot{\theta}_0^2(t-t_0)^2}\exp[-i\operatorname{arctg}(\dot{\theta}_0(t-t_0))]\}\exp i\Delta\theta. \quad (13)$$

Предположим, что $\arg\dot{z}_0 = \arg z_0$, т. е. имеет место радиальный разлет пылевого вещества. Тогда первый член в фигурных скобках можно истолковать как приращение первоначального радиуса $|z_0|$ сферы с центром в точке $z=0$, пересечение которой с плоскостью кометной орбиты $(\xi, \eta)$ описывается переменной $z_e$, за счет того, что она расширяется с заданной скоростью $v_e = |\dot{z}_0|$. Второй член включает в себя центробежное увеличение этого радиуса и кориолисов поворот сферы в плоскости $(\xi, \eta)$.

Можно также предположить, что данная сфера представляет собой поверхность, на которой располагаются пылевые частицы одинакового размера, испускаемые сферическим источником радиуса $|z_0|$ в момент

$t=t_0$ со скоростью $v_e$. Такой подход позволяет обсудить вопрос о возможном обобщении развитой в [8] теории кометных пылевых хвостов.

В [8] задача двух тел решается только для пылинок, покидающих изотропный точечный источник с нулевой скоростью. Остальные пылевые частицы, как считается, образуют расширяющиеся со временем сферы, центры которых движутся по траекториям «нулевых» частиц соответствующего размера, а радиусы увеличиваются по закону $v_e(t-t_0)$. В результате пылевой хвост разбивается на множество таких «сфер плотности», а интегрирование вдоль луча зрения производится по точкам пересечения данного луча зрения со сферами, которые встречаются на его пути.

В случае изотропного источника частиц они распределены по «своей» сфере с постоянной плотностью, и поэтому нет необходимости знать расположение точек пересечения в кометоцентрической системе координат — достаточно знать лишь координаты центра рассматриваемой сферы. При переходе к более реальному анизотропному источнику пылинок плотность их распределения становится функцией углов ориентации сферы в выбранной системе координат, и мы обязаны учитывать такую ориентацию. Корректно это можно сделать, если иметь в виду, что кроме основного поворота сферы на угол $\Delta\theta=\theta-\theta_0$ относительно оси $\xi$, который происходит за время $t-t_0$, она совершает также дополнительный кориолисов поворот на угол $\varepsilon_\theta = -\operatorname{arctg}[\dot{\theta}_0(t-t_0)] = \operatorname{arctg}\{[qGM(1+e)]^{1/2}(t-t_0)/r_0^2\}$.

Дополнительный поворот можно не учитывать, лишь пока время $\tau$, прошедшее с момента выброса пылинки, удовлетворяет неравенству $\tau \leqslant r_0(\varepsilon_\xi/v_e\sqrt{GMq(1+e)})^{1/2}$, в котором $\varepsilon_\xi$ — достижимая точность определения координаты $\xi$. Например, для пылинок, выброшенных кометой Веста 1976 VI через 6.8 сут после прохождения перигелия, ошибка $\varepsilon_\xi=10^{-5}$ а. е. накапливается в течение $\tau\simeq0.57$ сут, если $v_e=500$ м/с.

Центробежное увеличение радиуса сферы при неизменном расстоянии от ее центра до луча зрения также должно быть учтено, если $\tau \gtrsim r_0^2\varepsilon_\xi|z_0|^{-1}[GMq(1+e)]^{-1/2}$. В условиях предыдущего примера, если принять $|z_0|=\varepsilon_\xi$, это надо сделать для $\tau\gtrsim9.4$ сут.

Тот факт, что результаты, полученные при анализе формулы (13), справедливой для случая $\mu=0$, были неявно распространены на каждую возможную сферу плотности, в особом подтверждении не нуждается. Достаточно отметить, что до сих пор рассматривались только те изменения сферы, которые вызваны неинерциальностью кометоцентрической системы координат, а сама неинерциальность ничтожно слабо зависит от соотношения сил $\mathbf{F}_\odot$ и $\mathbf{F}_r$, определяющего параметр $\mu$.

Таким образом, сохраняя все удобства метода Финсона — Пробстейна, его можно распространить и на анизотропные пылевые источники конечных размеров.


1. *Белецкий В. В., Егоров В. А.* Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед.— 1964.—2, вып. 3.— С. 360—407.
2. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.— 800 с.
3. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики.— М.: Наука, 1972.—592 с.
4. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.— М.: Наука, 1978.— 512 с.
5. *Коноплева В. П., Розенбуш В. К., Шульман Л. М.* Определение эффективных ускорений в кометных хвостах II типа // Астрометрия и астрофизика.— 1975.— Вып. 27.— С. 59—66.
6. *Орлов С. В.* Кометы.— М.— Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.—196 с.
7. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.—800 с.
8. *Finson M. L., Probstein R. F.* A theory of dust comets // Astrophys. J.— 1968.—154, N 1.— P. 327—380.


Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
16.12.85