Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

3 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

И. А. Бойчук

Нелинейная нетерова краевая задача в критическом случае

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабко нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку.

Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon)$: $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи [1, 2]

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \qquad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решение задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица; $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\colon C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой ($m \neq n$) задачи (1) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$), причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{3}$$

в этом случае порождающая задача (2) имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s);\alpha](t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $X(t)$ — нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы (2), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица,

$\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q \colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(d \times n)$-матрица, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} \colon \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$,

$$G[f(s);\alpha](t) = K[f(s)](t) - X(t)Q^+\ell K[f(s)](\cdot) \text{ —}$$

обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K[f(s)](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds \text{ —}$$

оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1–3]. Необходимые условия существования решения поставленной задачи (1) определяет следующая лемма [1, 2].

Лемма. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический* ($P_{Q^*} \neq 0$) *случай и выполнено условие* (3) *разрешимости задачи* (2). *Предположим также, что задача* (1) *имеет решение* $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t,c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K[Z(z_0(s,c_r),s,0)](\cdot)\} = 0. \tag{4}$$

Предположим, что уравнение (4) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s);\alpha](t)$. Возмущение $x(t,\varepsilon)$ определяет краевая задача

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5}$$

В окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеет место следующее представление:

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + \\ + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_2(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Аналогично выделяем линейную часть $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ по x и линейную часть $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$ по ε функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, а также член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Достаточное условие. Обозначая $(d \times r)$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\},$$

приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений задачи (5)

$$\begin{aligned} &x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon),\\ &B_0 c_r = -P_{Q_d^*}\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\ &\qquad - \ell K[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\},\\ &x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t). \end{aligned} \tag{6}$$

Для построения решения краевой задачи (5) в критическом случае традиционно [1, 5] используется условие $P_{B_0^*} = 0$, гарантирующее разрешимость второго уравнения операторной системы (6); здесь $P_{B_0^*}$ — $(d\times d)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$. Как показано в статье [4], существуют краевые задачи, для которых условие $P_{B_0^*} = 0$ не выполняется. Для упрощения выкладок в случае $P_{B_0^*} \neq 0$ предположим, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}x\right]\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0.$$

В этом случае в малой выпуклой окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеют место разложения [6]

$$\begin{aligned} Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) &= Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) +\\ &+ \varepsilon^2 A_3(t) + \varepsilon A_4(t)x(t,\varepsilon) + R_2(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) &= J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) +\\ &+ \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_3(t) = \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{2\cdot\partial\varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_4(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} -$$

соответственно $(n\times 1)$- и $(n\times n)$-матрицы и линейные векторные функционалы

$$\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{2\cdot\partial\varepsilon^2}\Bigg|_{\substack{z=z_0\\ \varepsilon=0}}, \qquad \ell_4 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0\\ \varepsilon=0}}.$$

Частное решение задачи (5) представимо в виде

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t) + x^{(2)}(t,\varepsilon);$$

здесь

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t,\varepsilon) &= \varepsilon G[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon A_4(s)x(s,\varepsilon) +\\ &+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +\\ &+ \varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t). \end{aligned}$$

Обозначим $(d \times r)$-мерную матрицу

$$B_1 = P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \{\ell_1 G_1(\cdot) + \ell_4 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s) G_1(s) + A_4(s) X_r(s)](\cdot)\}.$$

При условии

$$F_1(c_r^*) := P_{Q_d^*} \{\ell_1 G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0](\cdot) + \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) -$$
$$- \ell K[A_1(s) G[Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](s) + A_2(s)](\cdot)\} = 0$$

решение $c_r = c_r^{(0)} + c_r^{(1)}$, $c_r^{(1)} \in N(B_0)$ второго уравнения операторной системы (6) определяет равенство

$$c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{\ell_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \varepsilon \ell_4 x(\cdot, \varepsilon) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K[A_1(s) x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s) x(s, \varepsilon) + R_2(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\}$$

и уравнение

$$\varepsilon B_1 c_r^{(1)} = -P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \{\ell_1 x^{(3)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_4 X_r(\cdot) c_r^{(0)} + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) +$$
$$+ \varepsilon \ell_4 G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](\cdot) + \varepsilon \ell_4[\varepsilon G_1(\cdot) c_r^{(1)} + x^{(3)}(\cdot, \varepsilon)] +$$
$$+ J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\{A_1(s) x^{(3)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_4(s) X_r(s) c_r^{(0)} +$$
$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s) G[Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](s) +$$
$$+ \varepsilon A_4(s)[\varepsilon G_1(s) c_r^{(1)} + x^{(3)}(s, \varepsilon)] + R_2(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\}, \tag{9}$$

разрешимость которого гарантирует разрешимость операторной системы (6). Уравнение (9) разрешимо при условии $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$; здесь $P_{B_1^*} \colon \mathbb{R}^d \to N(B_1^*)$ — матрица-ортопроектор. Таким образом, в случае

$$P_{B_0^*} \neq 0, \qquad P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0 \tag{10}$$

краевая задача (5) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)(c_r^{(0)} + c_r^{(1)}) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$
$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0), \qquad J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](t) + x^{(2)}(t, \varepsilon),$$
$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t) c_r^{(1)} + x^{(3)}(t, \varepsilon), \qquad G_1(t) = G[A_1(s) X_r(s); \ell_1 X_r(\cdot)](t),$$
$$x^{(3)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\{A_1(s)[X_r(s) c_r^{(0)} + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + \varepsilon A_2(s) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$
$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s) c_r^{(0)} + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + R_2(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon);$$
$$\ell_1[X_r(\cdot) c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot) c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}(t),$$
$$c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{\ell_1 x^{(2)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \varepsilon \ell_4[X_r(\cdot) c_r + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + \tag{11}$$

$$+ J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K[A_1(s)x^{(2)}(s, \varepsilon) + \varepsilon^2 A_3(s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s, \varepsilon)] + R_2(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\},$$

$$\varepsilon c_r^{(1)}(\varepsilon) = -B_1^+ P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{\ell_1 x^{(3)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_4 X_r(\cdot) c_r^{(0)} + \varepsilon^2 \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) +$$

$$+ \varepsilon \ell_4 G[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](\cdot) + \varepsilon \ell_4[\varepsilon G_1(\cdot) c_r^{(1)} + x^{(3)}(\cdot, \varepsilon)] +$$

$$+ J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\{A_1(s)x^{(3)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_4(s) X_r(s) c_r^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon^2 A_3(s) + \varepsilon A_4(s) G[Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)](s) +$$

$$+ \varepsilon A_4(s)[\varepsilon G_1(s) c_r^{(1)} + x^{(3)}(s, \varepsilon)] + R_2(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\}(\cdot)\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для краевой задачи* (1) *имеет место критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2)*. Тогда для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (4) *при условиях* (10) *и* $F_1(c_r^*) = 0$ *задача* (5) *имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой* (11) *и при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое* $x(t, 0) \equiv 0$*. При этом задача* (1) *имеет по меньшей мере одно решение* $z(t, \varepsilon)$*:* $z(t, \cdot) \in C^1[a, b]$*,* $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$*, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$ *решение задачи* (2)*.*

Для построения приближенного решения операторной системы (11) в случае (10) и $F_1(c_r^*) = 0$ применим метод простых итераций [1, 4, 5]. Длина отрезка $[0, \varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 4, 5], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (10), аналогично [7]. В частном случае, когда $P_{B_0} P_{B_1} = 0$ решение задачи (1) единственно. Здесь

$$P_{B_0}\colon \mathbb{R}^r \to N(B_0), \qquad P_{B_1}\colon \mathbb{R}^r \to N(B_1)$$

$(r \times r)$-матрицы-ортопроекторы. Наличие производных

$$A_2(s) \neq 0, \qquad A_3(s) \neq 0, \qquad \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \neq 0, \qquad \ell_3(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \neq 0,$$

а также условие $F_1(c_r^*) = 0$ отличают доказанную теорему от соответствующих теорем [2, с. 193; 3, с. 42].

Периодическая задача для уравнения Матье. Примером выполнения условий доказанной теоремы является 2π-периодическая задача для уравнения Матье [2, 4, 5, 8]

$$y'' + (k^2 + \varepsilon h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y = 0, \qquad h(\varepsilon) = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon^2}{512},$$

которая приводится к виду (1) при $k^2 = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z(z, \varepsilon) = \mathrm{col}[0, (-h(\varepsilon) - \cos 2t) z^{(a)}], \qquad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0.$$

Поскольку $Q = 0$, то имеет место критический случай; при этом $P_{Q^*} = I_2$, $r = 2$,

$$B_0 = \pi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_0^+ = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{B_0^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4) определяет порождающее решение, которому отвечают производные

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} - \cos 2t & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{32}\cos t \end{bmatrix}, \qquad A_4(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы

$$B_1 = \frac{\pi}{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1^+ = \frac{32}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{B_1^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

позволяют проверить выполнение условий $F_1(c_r^*) = 0$, $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$ и $P_{B_0} P_{B_1} = 0$, гарантирующих однозначную разрешимость поставленной периодической задачи для уравнения Матье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии CDFG (номер регистрации GZ436UKR13/103/0-1) и Государственного фонда фундаментальных исследований (номер государственной регистрации 0109U000381).

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – Vol. 14. – 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 62–69.
5. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
6. *Чуйко С. М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 548–562.
7. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278–288.
8. *Bojchuk I. A., Starkova O. V., Chujko S. M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. – 2009. – **23**, No 1. – P. 1–8.

Славянский государственный педагогический университет
Поступило в редакцию 28.08.2009

I. A. Boichuk

A Noether nonlinear boundary-value problem in the critical case

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of a Noether weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case.