УДК 52-6

Формирование молекулярных полос поглощения в многослойной атмосфере.

I. Плотность распределения фотонов по удельным пробегам

Н. Н. Фомин

Рассматривается задача определения плотности распределения фотонов по удельным пробегам в многослойной атмосфере, освещаемой параллельными лучами. Предлагается алгоритм ее решения, основанный на соотношениях инвариантности. Рассмотрен случай, когда атмосфера прилегает к поверхности с заданным коэффициентом отражения.

MOLECULAR ABSORPTION BANDS FORMATION IN A MULTILAYER ATMOSPHERE. I. THE DISTRIBUTION OF PHOTONS BY SPECIFIC PATH LENGTHS, by Fomin N. N.— The problem of determining the distribution of photons by specific path lengths in a multilayer scattering atmosphere is considered. The method based on the use of the invariance principles is suggested for its solution. In particular, the multilayer atmosphere overlaying the surface with given albedo is considered.

Введение. При интерпретации молекулярных полос поглощения в некоторых случаях возможно использование метода распределения фотонов по удельным пробегам, предложенного в работах [5, 10, 11]. В [5] выведено обобщенное нестационарное уравнение переноса излучения для плотности распределения фотонов по пробегам и рассмотрены некоторые приложения к задаче о вертикально-неоднородном газовом поглощении.

Ввиду сложности указанного уравнения представляет интерес исследовать те случаи, когда решение можно найти относительно просто. Изучению одного подобного случая посвящена данная статья.

Здесь кратко напоминаются основные понятия, введенные в [5] и необходимые для дальнейшего. Затем рассматривается задача определения плотности распределения фотонов по удельным пробегам в многослойной атмосфере и предлагается алгоритм ее решения. Иной подход к этой задаче, основанный на применении многомерного преобразования Лапласа, будет использован во второй части статьи.

1. Плотность распределения фотонов по удельным пробегам. Функция пропускания. Рассмотрим среду, состоящую из n плоских однородных слоев, заполненных газом и аэрозолем. Предположим, что газовая компонента только поглощает, а аэрозоль — как поглощает, так и рассеивает излучение. Пусть $k_\nu^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ — соответственно объемный коэффициент поглощения газа и коэффициент ослабления аэрозоля в частоте ν в i-м слое и обозначим $\gamma_\nu^{(i)}=k_\nu^{(i)}/\alpha^{(i)}$ $(i=\overline{1,n})$. Будем нумеровать слои сверху вниз, где под верхним понимается слой, освещенный прямым солнечным излучением (Векторы подчеркнуты.)

Допустим сначала, что поглощение в полосе отсутствует. Через $J_{1n}(\tau, l_1, \ldots, l_n, \underline{\omega})dl_1 \ldots dl_n$ обозначим вклад в интенсивность излучения на глубине τ фотонов, летящих в направлении $\underline{\omega}$, которые в i-м слое прошли оптический путь, заключенный между l_i и l_i+dl_i $(i=\overline{1,n})$. Здесь $l_i=\alpha^{(i)}L_i=u_i/u_i^{(2)}$, где L_i — соответствующая геометрическая длина пути; u_i — время, требующееся для его прохождения; $u_i^{(2)}$ — среднее время между двумя последовательными рассеяниями. Величины l_i, пропорциональные аналогичным величинам работы [5], будем называть удельными пробегами, а J_{1n} $(\tau, l_1, \ldots, l_n, \underline{\omega})$ — плотностью распределения фотонов по удельным пробегам. В дальнейшем для простоты вместо $J_{1n}(\tau, l_1, \ldots$

$\ldots, l_n, \underline{\omega})\, dl_1 \ldots dl_n$ будет использоваться также запись $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})\, d\underline{l}$, где $\underline{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $d\underline{l} = dl_1 \ldots dl_n$.

Таким образом, траектория фотона задается указанием n чисел $(l_1, \ldots, l_n)$. Например, траектории, целиком расположенные в первом слое, характеризуются набором $(l_1, 0, \ldots, 0)$, в первом и втором слоях — набором $(l_1, l_2, 0, \ldots, 0)$ и т. д. Функцию $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})$ как функцию n переменных l_j без ограничения общности можно считать определенной на множестве $R = \{0 \leqslant l_1 < \infty, \ldots, 0 \leqslant l_n < \infty\}$.

Тогда интенсивность полного (т. е. прямого +диффузного) излучения $J_{1n}(\tau, \underline{\omega})$ может быть представлена в виде

$$J_{1n}(\tau, \underline{\omega}) = \int\limits_R J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})\, d\underline{l}. \qquad (1)$$

Так как учет газового поглощения определяется множителем $\exp(-\underline{\gamma}_\nu \times \underline{l})$, где $\underline{\gamma}_\nu = (\gamma_\nu^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(n)})$ а $\underline{\gamma}_\nu \cdot \underline{l}$ — скалярное произведение, то для интенсивности $J_\nu(\tau, \underline{\omega})$ в частоте ν внутри полосы справедливо выражение

$$J_\nu(\tau, \underline{\omega}) = \int\limits_R e^{-\underline{\gamma}_\nu \cdot \underline{l}} J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})\, d\underline{l}. \qquad (2)$$

Интегрируя (2) по интервалу частот $\Delta\nu$, в пределах которого $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})$ слабо зависит от ν, имеем

$$J_{\Delta\nu}(\tau, \underline{\omega}) = \frac{1}{\Delta\nu} \int\limits_{\Delta\nu} J_{\nu'}(\tau, \underline{\omega})\, d\nu' = \int\limits_R T_{\Delta\nu}(\underline{l})\, J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})\, d\underline{l}, \qquad (3)$$

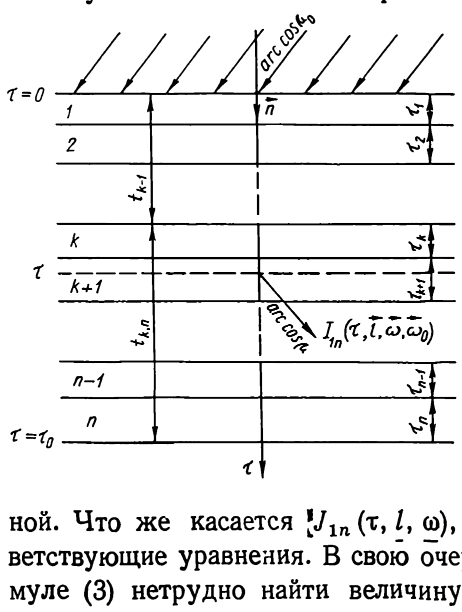
где величина

$$T_{\Delta\nu}(\underline{l}) = \frac{1}{\Delta\nu} \int\limits_{\Delta\nu} e^{(-\underline{\gamma}_\nu \cdot \underline{l})} d\nu \qquad (4)$$

есть функция пропускания n-слойной среды.

Из (4) следует, что $T_{\Delta\nu}(\underline{l})$ пропорциональна плотности вероятности случайного события — прохождения наугад взятым фотоном с частотой из интервала $\Delta\nu$ без рассеяния расстояния l_1 в первом слое, l_2 — во втором и т. д. С энергетической точки зрения $T_{\Delta\nu}(\underline{l})$ представляет собой долю энергии, пропущенную газом в интервале частот $\Delta\nu$.

Функция пропускания может быть определена экспериментально или рассчитана теоретически и всюду в дальнейшем считается заданной. Что же касается $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})$, то для нее ниже будут приведены соответствующие уравнения. В свою очередь, зная $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})$ и $T_{\Delta\nu}(\underline{l})$, по формуле (3) нетрудно найти величину $J_{\Delta\nu}(\tau, \underline{\omega})$.



Распространение излучения в многослойной атмосфере

2. Уравнение переноса. Постановка задачи. Будем характеризовать оптические свойства каждого слоя заданием альбедо однократного рассеяния λ_j и индикатрисы $\chi^{(j)}(\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}')$ $(j = \overline{1, n})$. Здесь вектор $\underline{\omega}$ определяет направление распространения излучения при азимуте φ, $\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}'$ — косинус угла рассеяния. Пусть τ — оптическая глубина, отсчитываемая от освещаемой границы; τ_j — оптическая толщина j-го слоя (рисунок), определяемая коэффициентом ослабления $\alpha^{(j)}$; $t_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \tau_j \; (k = \overline{1, n};\; t_n \equiv \tau_0)$. Положим $a_j(\tau) = 1$, если $\tau \in [t_{j-1}, t_j) \; (j = \overline{1, n};\; t_0 \equiv 0)$ и $a_j(\tau) = 0$ — в противном случае и обозначим $\lambda(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(\tau)\lambda_j$, $\chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(\tau)\chi^{(j)}(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}')$.

Тогда обобщенное нестационарное уравнение переноса, полученное в [5], может быть записано в виде $(0 < \tau < \tau_0;\; \tau \neq t_k,\; k = \overline{1, n-1})$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\tau)\frac{\partial J_{1n}}{\partial l_j} + \mu\frac{\partial J_{1n}}{\partial \tau} + J_{1n} = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} \chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}')\, J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}')\, d\mu', \tag{5}$$

где $\mu = \underline{\omega}\cdot\underline{n}$; $\underline{n}$ — внутренняя нормаль к верхней границе среды.

Если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, $\chi^{(1)}(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \ldots = \chi^{(n)}(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \chi(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}')$, то $\lambda(\tau) = \lambda$, $\chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \chi(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}')$, и (5) определяет плотность распределения фотонов по удельным пробегам в однородной среде. При этом плотность распределения по длинам l пробегов $J(\tau, l, \underline{\omega})$ связана с $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})$ соотношением [5]

$$J(\tau, l, \underline{\omega}) = \int J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega})\, \delta(l_1 + \ldots + l_n - l)\, d\underline{l},$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, а интегрирование осуществляется по таким наборам $(l_1, \ldots, l_n)$, что $l = l_1 + \ldots + l_n$. Величину $J(\tau, l, \underline{\omega})$ можно найти численно, применив для этого, например, методы, предложенные в работах [2—4], или на основе обращения преобразования Лапласа, как сделано в [8]. Поэтому ниже она считается известной для каждого отдельно взятого слоя.

В точках $\tau = t_k$ $(k = \overline{1, n-1})$, т. е. на границах раздела слоев, интенсивность может быть доопределена по непрерывности.

Будем рассматривать уравнение (5) при условии, что на верхнюю границу атмосферы от бесконечно широкого мононаправленного источника в направлении $\underline{\omega}_0$ при азимуте φ_0 падает параллельный пучок света, перпендикулярный к площадке и создающий освещенность π. Согласно изложенному в разделе 1, для его решения необходимо задать распределение интенсивности падающего излучения по n переменным l_j. Определим его так, чтобы оно отвечало нахождению функции Грина уравнения (5) и, кроме того, выполнялось бы соотношение (1), т. е.

$$J_{1n}(0, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = \pi\delta(\underline{\omega} - \underline{\omega}_0)\,\delta(\underline{l})\;(\mu, \mu_0 > 0), \tag{6}$$

где $\mu_0 = \underline{\omega}_0\cdot\underline{n}$, $\delta(\underline{l}) = \delta(l_1)\ldots\delta(l_n)$ и указана зависимость от $\underline{\omega}_0$.

То, что среди фотонов, находящихся в k-м слое $(k = \overline{1, n})$, нет таких, у которых было бы $l_k = 0$, а также предположение об отсутствии излучения, поступающего в среду через нижнюю границу, выражаются соответственно условиями

$$J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0)\big|_{l_k=0} = 0, \quad t_{k-1} < \tau \leqslant \tau_0 \; (k = \overline{1, n}), \tag{7}$$

$$J_{1n}(\tau_0, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = 0, \quad \mu < 0. \tag{8}$$

Интенсивность прямого излучения на глубине τ, т. е. решение (5) с нулевой правой частью, дается выражением

$$J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = \pi\delta(\underline{\omega} - \underline{\omega}_0)\, e^{-\tau/\mu_0}\delta\left(\underline{l} - \frac{1}{\mu}\,\underline{b}(\tau)\right),$$

где $\underline{b}(\tau) = (b_1(\tau), \ldots, b_n(\tau))$, а

$$b_j(\tau) = \int\limits_0^{\tau} a_j(\tau')\,d\tau' = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant t_{j-1} \\ \tau - t_{i-1}, & t_{j-1} \leqslant \tau \leqslant t_j \\ \tau_j, & \tau \geqslant t_j. \end{cases} \tag{9}$$

Обозначая через $I_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0)$ интенсивность диффузного излучения, т. е. $J_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = I_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) + \pi\delta(\underline{\omega} - \underline{\omega}_0)\,e^{-\tau/\mu_0}\delta\left(\underline{l} - \frac{1}{\mu}\,\underline{b}(\tau)\right)$, перепишем (5) — (8) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\tau)\frac{\partial I_{1n}}{\partial l_j} + \mu\frac{\partial I_{1n}}{\partial \tau} + I_{1n} = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_{-1}^{1} \chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') \times$$
$$\times\, I_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}', \underline{\omega}_0)\,d\mu' + \frac{\lambda(\tau)}{4}\,\chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}_0)\,e^{-\tau/\mu_0}\delta\left(\underline{l} - \frac{1}{\mu_0}\,\underline{b}(\tau)\right),$$
$$I_{1n}(0, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = 0, \quad \mu, \mu_0 > 0, \tag{10}$$
$$I_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0)\big|_{l_k=0} = 0, \quad t_{k-1} < \tau \leqslant \tau_0 \quad (k = \overline{1, n}),$$
$$I_{1n}(\tau_0, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = 0, \quad \mu < 0.$$

Пусть, как обычно, индикатриса рассеяния в j-м слое представлена отрезком ряда Фурье по азимуту, т. е.

$$\chi^{(j)}(\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \chi_j^{(0)}(\mu, \mu') + 2\sum_{m=1}^{N_j}\chi_j^{(m)}(\mu, \mu')\cos m(\varphi - \varphi')$$

и обозначено $N = \max\{N_j\}$. Тогда $\chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}')$ можно записать в виде

$$\chi(\tau, \underline{\omega}\cdot\underline{\omega}') = \chi^{(0)}(\tau, \mu, \mu') + 2\sum_{m=1}^{N}\chi^{(m)}(\tau, \mu, \mu')\cos m(\varphi - \varphi'),$$

причем $(m = \overline{0, N})$

$$\chi^{(m)}(\tau, \mu, \mu') = \sum_{j=1}^{n} a_j(\tau)\,\chi_j^{(m)}(\mu, \mu').$$

В таком случае, как это следует из (10), имеет место разложение

$$I_{1n}(\tau, \underline{l}, \underline{\omega}, \underline{\omega}_0) = I_{1n}^{(0)}(\tau, \underline{l}, \mu, \mu_0) + 2\sum_{m=1}^{N} I_{1n}^{(m)}(\tau, \underline{l}, \mu, \mu_0)\cos m(\varphi - \varphi_0)$$

и каждая азимутальная гармоника $I_{1n}^{(m)}(\tau, \underline{l}, \mu, \mu_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\tau)\frac{\partial I_{1n}^{(m)}}{\partial l_j} + \mu\frac{\partial I_{1n}^{(m)}}{\partial \tau} + I_{1n}^{(m)} = \frac{\lambda(\tau)}{2}\int\limits_{-1}^{1}\chi^{(m)}(\tau, \mu, \mu') \times$$
$$\times\, I_{1n}^{(m)}(\tau, \underline{l}, \mu', \mu_0)\,d\mu' + \frac{\lambda(\tau)}{4}\,\chi^{(m)}(\tau, \mu, \mu_0)\,e^{-\tau/\mu_0}\delta\left(\underline{l} - \frac{1}{\mu_0}\,\underline{b}(\tau)\right),$$
$$I_{1n}^{(m)}(0, \underline{l}, \mu, \mu_0) = 0, \quad \mu, \mu_0 > 0, \tag{11}$$
$$I_{1n}^{(m)}(\tau, \underline{l}, \mu, \mu_0)\big|_{l_k=0} = 0, \quad t_{k-1} < \tau \leqslant \tau_0,$$
$$I_{1n}^{(m)}(\tau_0, \underline{l}, -\mu, \mu_0) = 0, \quad \mu > 0.$$

Задача заключается в том, чтобы выразить решение $I_{1n}^{(m)}(\tau, \underline{l}, \mu, \mu_0)$ уравнения (11) через решения $I_k^{(m)}(\tau, l_k, \mu, \mu_0)$ $(k=\overline{1,n})$ аналогичных задач для каждого отдельно взятого слоя, которые в дальнейшем предполагаются известными.

3. Поле излучения в многослойной атмосфере. Пусть от исходной среды сверху отброшен $(k-1)$ слой. Введем обозначения: $I_{k,n}^{(m)}(\tau, \underline{l}_k, \mu, \mu_0)$ — m-я азимутальная гармоника интенсивности диффузного излучения в получившейся среде при облучении ее верхней границы параллельными лучами; $\rho_{k,n}^{(m)}(\underline{l}_k, \mu, \mu_0)$ и $\sigma_{k,n}^{(m)}(\underline{l}_k, \mu, \mu_0)$ — соответствующие коэффициенты отражения и пропускания; $\underline{l}_k = (l_k, l_{k+1}, \ldots, l_n)$; $I_k^{(m)}(\tau, l_k, \mu, \mu_0)$, $\rho_k^{(m)}(l_k, \mu, \mu_0)$ и $\sigma_k^{(m)}(l_k, \mu, \mu_0)$ — аналогичные величины для отдельно взятого k-го слоя, которые считаются известными для всех $k=\overline{1,n}$ и всех $m=\overline{0,N_k}$; $t_{k,n} = \tau_0 - t_{k-1}$ — суммарная оптическая толщина оставшихся слоев.

Начнем с рассмотрения поля излучения в двухслойной атмосфере, получающейся из исходной путем удаления $n-2$ верхних слоев. Использование обобщенного принципа инвариантности [7], модифицированного применительно к рассматриваемой задаче, позволяет записать соотношения

$$I_{n-1,n}^{(m)}(\tau, \underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0) = I_{n-1}^{(m)}(\tau, l_{n-1}, \mu, \mu_0)\,\delta(l_n) + e^{-\frac{\tau_{n-1}-\tau}{|\mu|}}\theta(-\mu)\,\theta\times$$
$$\times\left(l_{n-1} - \frac{\tau_{n-1}-\tau}{|\mu|}\right) I_{n-1,n}^{(m)}\left(\tau_{n-1}, l_{n-1} - \frac{\tau_{n-1}-\tau}{|\mu|}, l_n, \mu, \mu_0\right) +$$
$$+ 2\int_0^1 d\mu' \int_0^{l_{n-1}} I_{n-1,n}^{(m)}(\tau_{n-1}, l'_{n-1}, l_n, -\mu', \mu_0)\, I_{n-1}^{(m)}(\tau_{n-1}-\tau, l_{n-1}, -l'_{n-1}, -$$
$$-\mu, \mu')\, dl'_{n-1}, \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{n-1}) \tag{12}$$

$$I_{n-1,n}^{(m)}(\tau_{n-1}+\tau, \underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0) = I_n^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0)\, e^{-\tau_{n-1}/\mu_0}\delta(l_{n-1} - \tau_{n-1}/\mu_0) +$$
$$+ e^{-\tau/\mu}\theta(\mu)\, I_{n-1,n}^{(m)}\left(\tau_{n-1}, l_{n-1}, l_n - \frac{1}{\mu} b_n(\tau), \mu, \mu_0\right)\theta\left(l_n - \frac{1}{\mu} b_n(\tau)\right) +$$
$$+ 2\int_0^1 d\mu' \int_0^{l_n} I_{n-1,n}^{(m)}(\tau_{n-1}, l_{n-1}, l'_n, \mu', \mu_0)\, I_n^{(m)}(\tau, l_n - l'_n, \mu, \mu')\, dl'_n \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_n), \tag{13}$$

где через $I_{n-1,n}^{(m)}(\tau_{n-1}, \underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0)$ обозначена m-я азимутальная гармоника интенсивности на границе раздела между слоями; $\theta(x)$ — единичная функция скачка; $\theta(x)=1$, $x \geqslant 0$, $\theta(x)=0$, $x<0$.

Если проинтегрировать (12), (13) по всем значениям l_{n-1} и l_n, то получим соответствующие выражения для интенсивности излучения в двухслойной среде [1]. Их сопоставление с (12) и (13) приводит к заключению, что первое слагаемое в (12) описывает распределение фотонов по l_{n-1} и l_n, которые все время проводят в верхнем $(n-1)$-м слое.

В формулах (12), (13) $m = 0, 1, \ldots, M_{n-1} = \max(N_{n-1}, N_n)$, причем $I_{n-1}^{(m)}(\tau, l_{n-1}, \mu, \mu_0) \equiv 0$ при $m > N_{n-1}$ и $I_n^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0) \equiv 0$ при $m > N_n$.

При $\tau \neq \tau_{n-1}$, функция $I_{n-1,n}^{(m)}(\tau, \underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0)$, задаваемая равенствами (12), (13), удовлетворяет уравнению (11). В точке $\tau = \tau_{n-1}$ она может быть определена из условия непрерывности, которое следует из соотношений (12), (13) $(\mu > 0)$:

$$I_{n-1,n}^{(m)}(\tau_{n-1}, \underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0) = \mu_0\sigma_{n-1}^{(m)}(l_{n-1}, \mu, \mu_0)\,\delta(l_n) + 2\int_0^1 \mu' d\mu' \times$$

$$\times \int\limits_0^{l_{n-1}} \rho^{(m)}_{n-1} (l_{n-1} - l'_{n-1}, \mu, \mu') \, I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, l'_{n-1}, l_n, -\mu', \mu_0) \, dl'_{n-1}, \tag{14}$$

$$I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, \underline{l}_{n-1}, -\mu, \mu_0) = \mu_0 \rho^{(m)}_n (l_n, \mu, \mu_0) \, e^{-\tau_{n-1}/\mu_0} \delta (l_{n-1} - \tau_{n-1}/\mu_0) +$$

$$+2 \int\limits_0^1 \mu' d\mu' \int\limits_0^{l_n} I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, l_{n-1}, l'_n, \mu', \mu_0) \, \rho^{(m)}_n (l_n - l'_n, \mu, \mu') \, dl'_n.$$

Система (14) должна быть решена лишь для $m = 0, 1, \ldots, \min(N_{n-1}, N_n)$, поскольку при $m > \min(N_{n-1}, N_n)$ одна из величин $I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, \underline{l}_{n-1}, \pm \mu, \mu_0)$ обращается в нуль, а другая совпадает с соответствующим коэффициентом яркости.

После нахождения интенсивности на границе раздела слоев по формулам (12) и (13) определяется поле излучения во всей среде. В частности, для ее границ справедливы выражения

$$\mu_0 \rho^{(m)}_{n-1,n} (\underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0) = \mu_0 \rho^{(m)}_{n-1} (l_{n-1}, \mu, \mu_0) \, \delta(l_n) + e^{-\tau_{n-1}/\mu} \theta (l_{n-1} - \tau_{n-1}/\mu) \times$$

$$\times I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, l_{n-1} - \tau_{n-1}/\mu, l_n, -\mu, \mu_0) + 2 \int\limits_0^1 \mu' d\mu' \int\limits_0^{l_{n-1}} I^{(m)}_{n-1,n} \times$$

$$\times (\tau_{n-1}, l'_{n-1}, l_n, -\mu', \mu_0) \, \sigma^{(m)}_{n-1} (l_{n-1} - l'_{n-1}, \mu, \mu') \, dl'_{n-1}; \tag{15}$$

$$\mu_0 \sigma^{(m)}_{n-1,n} (\underline{l}_{n-1}, \mu, \mu_0) = \mu_0 \sigma^{(m)}_n (l_n, \mu, \mu_0) \, e^{-\tau_{n-1}/\mu_0} \delta (l_{n-1} - \tau_{n-1}/\mu_0) +$$

$$+ e^{-\tau_n/\mu_0} \theta(\mu) \, I^{(m)}_{n-1,n} \left(\tau_{n-1}, l_{n-1}, l_n - \frac{1}{\mu} \tau_n, \mu, \mu_0\right) \theta \left(l_n - \frac{1}{\mu} \tau_n\right) +$$

$$+ 2 \int\limits_0^1 \mu' d\mu' \int\limits_0^{l_n} I^{(m)}_{n-1,n} (\tau_{n-1}, l_{n-1}, l'_n, \mu', \mu_0) \, \sigma^{(m)}_n (l_n - l'_n, \mu, \mu') \, dl'_n. \tag{16}$$

Вернемся к общему случаю. Предположим, что поле излучения в среде, у которой сверху отброшено k слоев, известно, т. е. задана функция $I^{(m)}_{k+1,n}(\tau, \underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0)$. Тогда из тех же соображений, что и при получении соотношений (12), (13), для случая, когда сверху отброшен $(k-1)$ слой, имеем

$$I^{(m)}_{k,n} (\tau, \underline{l}_k, \mu, \mu_0) = I^{(m)}_k (\tau, l_k, \mu, \mu_0) \, \delta (\underline{l}_{k+1}) + e^{-\frac{\tau_k - \tau}{|\mu|}} \theta(-\mu) \, \theta \left(l_k - \frac{\tau_k - \tau}{|\mu|}\right) \times$$

$$\times I^{(m)}_{k,n} \left(\tau_k, l_k - \frac{\tau_k - \tau}{|\mu|}, \underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0\right) + 2 \int\limits_0^1 d\mu' \int\limits_0^{l_k} I^{(m)}_{k,n} (\tau_k, l'_k, \underline{l}_{k+1}, -\mu', \mu_0) \times$$

$$\times I^{(m)}_k (\tau_k - \tau, l_k - l'_k, -\mu, \mu') \, dl'_k \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k), \tag{17}$$

$$I^{(m)}_{k,n} (\tau_k + \tau, \underline{l}_k, \mu, \mu_0) = I^{(m)}_{k+1,n} (\tau, \underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0) \, e^{-\tau_k/\mu_0} \delta (l_k - \tau_k/\mu_0) +$$

$$+ e^{-\tau/\mu} \theta(\mu) \, I^{(m)}_{k,n} \left(\tau_k, l_k, \underline{l}_{k+1} - \frac{1}{\mu} \underline{b}_{k+1}(\tau), \mu, \mu_0\right) \theta \left(\underline{l}_{k+1} - \frac{1}{\mu} \underline{b}_{k+1}(\tau)\right) +$$

$$+ 2 \int\limits_0^1 d\mu' \int\limits_{R_{k+1}} I^{(m)}_{k,n} (\tau_k, l_k, l'_{k+1}, \mu', \mu_0) \, I^{(m)}_{k+1,n} (\tau, \underline{l}_{k+1} - \underline{l}'_{k+1}, \mu, \mu') \, d\underline{l}'_{k+1}$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant t_{k+1,n}). \tag{18}$$

Здесь через $I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, \underline{l}_k, \mu, \mu_0)$ обозначена гармоника интенсивности на границе раздела k-го и нижерасположенных слоев, $\underline{b}_k(\tau) = (b_k(\tau), \ldots, b_n(\tau))$, $\theta(\underline{l}_k) = \theta(l_k) \ldots \theta(l_n)$, $R_k = \{0 \leqslant l_k < \infty, \ldots, 0 \leqslant l_n < \infty\}$.

Из (17), (18) получаем следующую систему интегральных уравнений для определения $I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, \underline{l}_k, \mu, \mu_0)$ $(\mu > 0)$:

$$I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, \underline{l}_k, \mu, \mu_0) = \mu_0 \sigma_k^{(m)}(l_k, \mu, \mu_0)\,\delta(\underline{l}_{k+1}) + 2\int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{l_k} \rho_k^{(m)}(l_k - l_k', \mu, \mu') \times$$

$$\times I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, l_k', \underline{l}_{k+1}, -\mu', \mu_0)\, dl_k'. \tag{19}$$

$$I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, \underline{l}_k - \mu, \mu_0) = \mu_0 \rho_{k+1,n}^{(m)}(\underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0)\, e^{-\tau_k/\mu_0}\,\delta(l_k - \tau_k/\mu_0) +$$

$$+ 2\int_0^1 \mu' d\mu' \int_{R_{k+1}} \rho_{k+1,n}^{(m)}(\underline{l}_{k+1} - \underline{l}_{k+1}', \mu, \mu')\, I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, l_k, \underline{l}_{k+1}', \mu', \mu_0)\, d\underline{l}_{k+1}'. \tag{20}$$

В (17), (18) m принимает значения $0, 1, \ldots, M_k = \max(N_k, \ldots, N_n)$ и положено $I_k^{(m)}(\tau, l_k, \mu, \mu_0) \equiv 0$, $I_{k+1,n}^{(m)}(\tau, \underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0) \equiv 0$ при $m > N_k$ и $m > M_{k+1}$ соответственно. Поскольку при $m > \min(N_k, M_{k+1})$ одна из величин $I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, \underline{l}_k, \pm\mu, \mu_0)$ обращается в нуль (а другая совпадает с известной функцией), то система (19), (20) должна быть решена лишь для $m = 0, 1, \ldots, \min(N_k, M_{k+1})$.

Коэффициенты яркости среды даются выражениями

$$\mu_0 \rho_{k,n}^{(m)}(\underline{l}_k, \mu, \mu_0) = \mu_0 \rho_k^{(m)}(l_k, \mu, \mu_0)\,\delta(\underline{l}_{k+1}) + e^{-\tau_k/\mu}\theta(l_k - \tau_k/\mu)\, I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, l_k -$$

$$- \tau_k/\mu, \underline{l}_{k+1}, -\mu, \mu_0) + 2\int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{l_k} \sigma_k^{(m)}(l_k - l_k', \mu, \mu')\, I_{k,n}^{(m)}$$

$$\times (\tau_k, l_k', \underline{l}_{k+1}, -\mu', \mu_0)\, dl_k', \tag{21}$$

$$\mu_0 \sigma_{k,n}^{(m)}(\underline{l}_k, \mu, \mu_0) = \mu_0 \sigma_{k+1,n}^{(m)}(\underline{l}_{k+1}, \mu, \mu_0) e^{-\tau_k/\mu_0}\delta(l_k - \tau_k/\mu_0) +$$

$$+ e^{-t_{k+1,n}/\mu}\theta(\mu)\, I_{k,n}^{(m)}\left(\tau_k, l_k, \underline{l}_{k+1} - \frac{1}{\mu}\,\tau_{k+1}, \mu, \mu_0\right)\theta\left(\underline{l}_{k+1} - \frac{1}{\mu}\,\underline{\tau}_{k+1}\right) +$$

$$+ 2\int_0^1 \mu' d\mu' \int_{R_{k+1}} \sigma_{k+1,n}^{(m)}(\underline{l}_{k+1} - \underline{l}_{k+1}', \mu, \mu')\, I_{k,n}^{(m)}(\tau_k, l_k, \underline{l}_{k+1}', \mu', \mu_0)\, d\underline{l}_{k+1}', \tag{22}$$

где $\underline{\tau}_k = (\tau_k, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_n)$.

В формулах (17) — (22) $k = 1, 2, \ldots, n-1$ причем $I_{n,n}^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0) \equiv I_n^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0)$. При $k = n - 1$ выражения (17) — (22) переходят в соответствующие выражения для двухслойной среды.

Таким образом, алгоритм расчета плотности распределения фотонов по удельным пробегам заключается в последовательном использовании соотношений (17) — (22), причем формулы (18), (20), (22) являются рекуррентными по k. Процесс вычислений начинается с $k = n - 1$ и заканчивается при $k = 1$. Такое направление наращивания слоев неслучайно. Если слой добавляется снизу, то над ним располагается неоднородная среда, и необходимо рассчитывать поле излучения в ней при облучении светом ее нижней границы. Это увеличивает число необходимых для решения уравнений. На это обстоятельство (при изучении переноса излучения в непрерывном спектре) было указано в работах [1, 6, 9, 12].

Отметим, что предложенный алгоритм легко обобщается в том случае, когда n-й слой примыкает к отражающей поверхности с заданным коэффициентом отражения $\rho_s(\mu, \varphi, \mu_0, \varphi_0)$:

$$\rho_s(\mu, \varphi, \mu_0, \varphi_0) = \rho_s^{(0)}(\mu, \mu_0) + 2\sum_{m=1}^{L} \rho_s^{(m)}(\mu, \mu_0)\cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{23}$$

Действительно, рассматривая $(n+1)$-й слой как поверхность, отражающую свет согласно (23), и используя обобщенный принцип инвариантности получим

$$I_{n,n+1}^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0) = I_n^{(m)}(\tau, l_n, \mu, \mu_0) + e^{-\frac{\tau_n-\tau}{|\mu|}}\Theta(-\mu)\Theta\left(l_n - \frac{\tau_n-\tau}{|\mu|}\right)\times$$
$$\times I_{n,n+1}^{(m)}\left(\tau_n, l_n - \frac{\tau_n-\tau}{|\mu|}, \mu, \mu_0\right) + 2\int_0^1 d\mu' \int_0^{l_n} I_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n', -\mu', \mu_0)\times$$
$$\times I_n^{(m)}(\tau_n - \tau, l_n - l_n', -\mu, \mu')\, dl_n', \tag{24}$$

причем $(\mu > 0)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{I}_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n, \mu, \mu_0) = \mu_0\sigma_n^{(m)}(l_n, \mu, \mu_0) + 2\int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{l_n} \rho_n^{(m)}\times \\ &\times (l_n - l_n', \mu, \mu')\bar{I}_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n', -\mu', \mu_0)\, dl_n', \\ &\bar{I}_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n, -\mu, \mu_0) = \mu_0\rho_s^{(m)}(\mu, \mu_0)e^{-\tau_n/\mu_0}\delta(l_n - \tau_n/\mu_0) + \\ &+ 2\int_0^1 \mu'\rho_s^{(m)}(\mu, \mu')\bar{I}_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n, \mu', \mu_0)\, d\mu'. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Здесь $m = 0, 1, \ldots, \max(N_n, L)$, а черта сверху означает, что рассматривается среда с отражающей поверхностью.

После нахождения $\bar{I}_{n,n+1}^{(m)}(\tau_n, l_n, \mu, \mu_0)$ весь процесс расчета вновь сводится к применению соотношений (17) — (22).

Конкретную реализацию указанного алгоритма нахождения плотности распределения фотонов по удельным пробегам и многослойной атмосфере предполагается сделать отдельно.

Автор выражает благодарность Д. И. Нагирнеру и Э. Г. Яновицкому за полезные замечания.

1. *Длугач Ж. М., Яновицкий Э. Г.* Рассеяние света в многослойных атмосферах. I. Задача о диффузном отражении // Астрофизика.— 1985.—23, № 2.— С. 337—348.
2. *Каплан С. А., Морозов С. Ф., Пискунова Л. В.* Применение метода прямых для решения уравнения переноса нестационарного поля излучения // Там же.— 1968.—4, № 4.— С. 485—491.
3. *Романова Л. М.* Распределение фотонов по пробегам в плоском слое однородной мутной среды // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана.— 1965.—1, № 10.— С. 1022—1038.
4. *Романова Л. М.* Распределение по пробегам и расплывание импульса света в плоском слое однородной мутной среды // Там же.— 1966.—11, № 8.— С. 844—850.
5. *Романова Л. М., Устинов Е. А.* Обобщенное уравнение переноса для распределения фотонов по пробегам и задача о вертикально-неоднородном газовом поглощении в атмосфере // Там же.— 1982.—18, № 3.— С. 240—250.
6. *Яновицкий Э. Г.* Диффузное отражение и пропускание света неоднородной атмосферой, ограниченной отражающей поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1963.— № 7.— С. 1140—1146.
7. *Яновицкий Э. Г.* // Астрон. журн.— 1981.— 58, № 1.— С. 119—129.
8. *Matsumoto M.* // Publ. Astron. Soc. Jap.— 1974.—26, N 3.— P. 241—253.
9. *Takashima T.* // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.— 1973.—13, N 11.— P. 1229—1232.
10. *Van de Hulst H. C., Irvine W., M.* // Mem. Soc. Roy. Sci. Liege.— 1962.—7, N 1.— P. 78—87.
11. *Van de Hulst H. C.* Multiple light scattering. Tables, formulas and applications.— London: Acad. press, 1980.—722 p.
12. *Viik T.* // Astrophys. and Space Sci.— 1982.—86, N 1.— P. 169—178.

Глав. астрон. обсерватория АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию 18.12.85,
после доработки 29.01.86