Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2010

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Ю. П. Глухов

Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка і метод розв'язання просторової задачі про збудження поверхневим навантаженням, що рухається з сталою швидкістю, багатошарового напівпростору з початковими напруженнями і довільною формою пружного потенціалу. Як приклад розглянута задача для двошарового напівпростору. В просторі зображень одержаний розв'язок в загальному вигляді для стисливих та нестисливих матеріалів та різних умов контакту.

В данной работе в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрены постановка и метод решения пространственной задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой многослойного полупространства с начальными напряжениями и произвольной формой упругого потенциала. В качестве примера рассмотрена задача для двухслойного полупространства. В пространстве изображений получено решение в общем виде для сжимаемых и несжимаемых материалов и различных условий контакта.

1. Многослойное полупространство. Рассмотрим слоистое полупространство, состоящее из N слоев, лежащих на полупространстве. Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз. Порядковый номер полупространства $N + 1$. Граничные поверхности слоев плоские и параллельные между собой. Толщина слоев произвольная и равна h_s. Слои и полупространство состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела будем считать, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным. Рассмотрим начальное состояние в виде

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}, \qquad S_0^{\{s\}11} \neq S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \tag{1}$$

Слоистое полупространство отнесено к декартовой системе координат ξ_i $(i = 1, 2, 3)$, соответствующей начальному деформированному состоянию. Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоев вглубь полупространства.

К свободной границе первого слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3. Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся деформированное состояние. Если предположить, что нагрузка движется по прямой, расположенной под углом φ к оси ξ_1, то координаты подвижной системы координат будут определяются соотношениями

$$y_1 = \xi_1 - v\cos\varphi t, \qquad y_2 = \xi_2 - v\sin\varphi t, \qquad y_3 = \xi_3. \tag{2}$$

Также предположим, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризированную теорию упругости [1] для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

С учетом (1) в координатах подвижной системы координат (2) уравнения движения и компоненты напряженно-деформированного состояния слоистого полупространства можно записать в общем виде следующим образом:

уравнения движения

$$\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=3} \widetilde{A}^{\{s\}}_{i,j,k} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\Phi^{\{s\}(n)} = 0, \qquad n = \overline{1,3}, \qquad s = \overline{1, N+1}, \tag{3}$$

перемещения

$$\begin{gathered} u_n^{\{s\}} = \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{C}^{\{s\}(nn)}_{i,j,k} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\Phi^{\{s\}(n)} + \\ + \sum_{p=\alpha,\beta}\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=1} \widetilde{C}^{\{s\}(np)}_{i,j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\frac{\partial^2\Phi^{\{s\}(p)}}{\partial y_n \partial y_p}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$n, \alpha, \beta = \overline{1,3}, \qquad n \neq \alpha \neq \beta \neq n, \qquad s = \overline{1, N+1},$$

напряжения

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}^{\{s\}}_{\beta\beta} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{E}^{\{s\}(\beta\beta n)}_{i,j,k} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\Phi^{\{s\}(n)}, \\ \widetilde{Q}^{\{s\}}_{\alpha\beta} = \sum_{n,p=\alpha,\beta;n\neq p} \frac{\partial}{\partial y_p}\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{E}^{\{s\}(\alpha\beta n)}_{i,j,k} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\Phi^{\{s\}(n)} + \\ + \frac{\partial^3}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=1} \widetilde{E}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}_{i,j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2i}\partial y_2^{2j}\partial y_3^{2k}}\right)\Phi^{\{s\}(\gamma)}, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3}, \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \qquad s = \overline{1, N+1},$$

где коэффициенты $\widetilde{A}^{\{s\}}_{i,j,k}$, $\widetilde{C}^{\{s\}(np)}_{i,j,k}$, $\widetilde{E}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}_{i,j,k}$ в выражениях (3)–(5) являются функциями параметров v, φ, характеризующих нагрузку, и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды; $\widetilde{\omega}^{\{s\}}$ — в случае сжимаемого материала и $\widetilde{\kappa}^{\{s\}}$ — в случае несжимаемого материала.

Граничные условия на свободной поверхности первого слоя при $y_3 = 0$ имеют вид

$$\widetilde{Q}^{\{1\}}_{31} = P_1\delta(y_1)\delta(y_2), \qquad \widetilde{Q}^{\{1\}}_{32} = P_2\delta(y_1)\delta(y_2), \qquad \widetilde{Q}^{\{1\}}_{33} = P_3\delta(y_1)\delta(y_2). \tag{6}$$

Предполагаем возможными два варианта контакта между элементами слоистого полупространства при $y_3 = -h_s$: жесткий контакт и нежесткий. Условия контакта в общем виде можно записать

$$\begin{aligned} &u^{\{s\}}_3 = u^{\{s+1\}}_3, \qquad \widetilde{Q}^{\{s\}}_{33} = \widetilde{Q}^{\{s+1\}}_{33}, \qquad \widetilde{Q}^{\{s\}}_{32} = \theta^{\{s\}}_1\widetilde{Q}^{\{s+1\}}_{32},\\ &\widetilde{Q}^{\{s\}}_{31} = \theta^{\{s\}}_1\widetilde{Q}^{\{s+1\}}_{31}, \qquad (1-\theta^{\{s\}}_1)\widetilde{Q}^{\{s+1\}}_{31} = \theta^{\{s\}}_1(u^{\{s+1\}}_1 - u^{\{s\}}_1),\\ &(1-\theta^{\{s\}}_1)\widetilde{Q}^{\{s+1\}}_{32} = \theta^{\{s\}}_1(u^{\{s+1\}}_2 - u^{\{s\}}_2), \qquad s=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\theta^{\{s\}}_1 = 1$ соответствует жесткому контакту, а $\theta^{\{s\}}_1 = 0$ — нежесткому контакту между соответствующими элементами слоистого полупространства.

При изложенных выше условиях имеем трехмерную установившуюся задачу, состоящую в совместном решении уравнений движения (3) при соответствующих граничных условиях на свободной поверхности первого слоя (6), условий контакта элементов слоистого полупространства (7) и условия затухания на бесконечности.

Для решения задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье по координатам y_1 и y_2. В пространстве изображений Фурье уравнения движения (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\left(B^{\{s\}}_1\frac{d^6}{dy^6_3} - B^{\{s\}}_2\frac{d^4}{dy^4_3} + B^{\{s\}}_3\frac{d^2}{dy^2_3} - B^{\{s\}}_4\right)\Phi^{\{s\}(j)} = 0,\\ &j=\overline{1,3}, \qquad s=\overline{1,N+1}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &B^{\{s\}}_1 = \widetilde{A}^{\{s\}}_{0,0,3}, \qquad B^{\{s\}}_2 = k^2_1\widetilde{A}^{\{s\}}_{1,0,2} + k^2_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{0,1,2},\\ &B^{\{s\}}_3 = k^4_1\widetilde{A}^{\{s\}}_{2,0,1} + k^4_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{0,2,1} + k^2_1k^2_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{1,1,1},\\ &B^{\{s\}}_4 = k^6_1\widetilde{A}^{\{s\}}_{3,0,0} + k^6_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{0,3,0} + k^4_1k^2_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{2,1,0} + k^2_1k^4_2\widetilde{A}^{\{s\}}_{1,2,0}, \end{aligned}$$

k_1, k_2 — параметры двойного преобразования Фурье.

Решение преобразованных уравнений (8) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{\{s\}F(j)} = \delta^{\{s\}(j)}_0\Big\{&C^{\{s\}(j)}_1 e^{\gamma^{\{s\}}_1(y_3+h_{s-1})} + \delta^{N+1}_s C^{\{s\}(j)}_2 e^{-\gamma^{\{s\}}_1(y_3+h_{s-1})} +\\ &+\left[1-\delta^{\{s\}}_{\mu_1\mu_2}+\delta^{\{s\}}_{\mu_1\mu_2}(y_3+h_{s-1})\right]\left(C^{\{s\}(j)}_3 e^{\gamma^{\{s\}}_2(y_3+h_{s-1})}+\delta^{N+1}_s C^{\{s\}(j)}_4 e^{-\gamma^{\{s\}}_2(y_3+h_{s-1})}\right) +\\ &+\left[1-\delta^{\{s\}}_{\mu_2\mu_3} + (1-\delta^{\{s\}}_{\mu_1\mu_2})\delta^{\{s\}}_{\mu_2\mu_3}(y_3+h_{s-1}) + \delta^{\{s\}}_{\mu_1\mu_2}\delta^{\{s\}}_{\mu_2\mu_3}(y_3+h_{s-1})^2\right] \times \end{aligned}$$

$$\times \left(C_5^{\{s\}(j)} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + \delta_s^{N+1} C_6^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})}\right)\Big\}, \tag{9}$$

$$j = \overline{1,3}, \qquad s = \overline{1, N+1}.$$

Здесь

$$\delta_0^{\{s\}(j)} = 1 + \delta_{2j}(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}})^2 - (\delta_{2j} + \delta_{3j})(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}),$$

$$\delta_{\mu_m\mu_j}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & \mu_m^2 = \mu_j^2, \\ 0, & \mu_m^2 \neq \mu_j^2, \end{cases} \qquad \gamma_j = \sigma_j\mu_j, \qquad h_0 = 0,$$

μ_j^2 $(j = \overline{1,3})$ — корни бикубического характеристического уравнения дифференциального уравнения (8); $\sigma_j \equiv \sigma = |\mu_j|/\mu_j$, если $\mu_j^2 > 0$, $\sigma_j = i$, если $\mu_j^2 < 0$ и $\gamma_j = \sigma \operatorname{Re}\mu_j - (-1)^j i \operatorname{Im}\mu_j$, если μ_j^2 принимает комплексные значения.

Введем постоянные интегрирования

$$C_j^{\{s\}} = i^{\delta_{3m}} C_j^{\{s\}(m)}, \qquad j = \overline{1,6}, \qquad m = \overline{1,3}. \tag{10}$$

Трансформанты выражений (4) и (5) с учетом (9) и (10) можно записать в виде

$$\widetilde{Q}_{nm}^{\{s\}F} = i^{\delta_{3n}} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{m=1}^{3} \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_{s-1})^{m-1}\right] C_j^{\{s\}} e^{(-1)^{j+1}\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})},$$

$$u_n^{\{s\}F} = i^{\delta_{mn}+\delta_{3,n+m}} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{q=1}^{3} \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_{s-1})^{q-1}\right] C_j^{\{s\}} e^{(-1)^{j+1}\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})}, \tag{11}$$

$$n, m = \overline{1,3}, \qquad \tau = j - 3[j/3],$$

где $\alpha_{jm}^{\{s\}(n)}$, $\gamma_{jq}^{\{s\}(nm)}$ — функции параметров k_1, k_2 и параметров, характеризующих нагрузку и слоистое полупространство.

Подставляя (10) и (11) в преобразованную систему уравнений (6), (7), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_j^{\{s\}}$

$$\sum_{n=1}^{6} \gamma_{n1}^{\{1\}(3m)} C_n^{\{1\}} = i^{-\delta_{3m}} P_m^F,$$

$$\sum_{j=1}^{6} \Big[(\alpha_{j1}^{\{s\}(3)} - \alpha_{j2}^{\{s\}(3)}\Delta h_s + \alpha_{j3}^{\{s\}(3)}\Delta h_s^2) C_j^{\{s\}} e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{s\}}\Delta h_s} - \alpha_{j1}^{\{s+1\}(3)} C_j^{\{s+1\}}\Big] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{6} \Big\{(\gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} - \gamma_{j2}^{\{s\}(3m)}\Delta h_s + \gamma_{j3}^{\{s\}(3m)}\Delta h_s^2) C_j^{\{s\}} e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{s\}}\Delta h_s} -$$

$$- [\theta_1^{\{s\}}(1 - \delta_{3m}) + \delta_{3m}]\gamma_{j1}^{\{s+1\}(3m)} C_j^{\{s+1\}}\Big\} = 0,$$

$$m = \overline{1,3}, \qquad \Delta h_s = h_s - h_{s-1},$$

$$\sum_{j=1}^{6}\Big\{\theta_1^{\{s\}}(\alpha_{j1}^{\{s\}(m)}-\alpha_{j2}^{\{s\}(m)}\Delta h_s+\alpha_{j3}^{\{s\}(m)}\Delta h_s^2)C_j^{\{s\}}e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{s\}}\Delta h_s}+$$

$$+[(1-\theta_1^{\{s\}})\gamma_{j1}^{\{s+1\}(3m)}-\theta_1^{\{s\}}\alpha_{j1}^{\{s+1\}(m)}]C_j^{\{s+1\}}\Big\}=0, \tag{12}$$

$$m=\overline{1,2},\qquad s=\overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^{6}(\alpha_{j1}^{\{N\}(3)}-\alpha_{j2}^{\{N\}(3)}\Delta h_N+\alpha_{j3}^{\{N\}(3)}\Delta h_N^2)C_j^{\{N\}}e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{2j-1,1}^{\{N+1\}(3)}C_{2j-1}^{\{N+1\}}=0,$$

$$\sum_{j=1}^{6}(\gamma_{j1}^{\{N\}(3m)}-\gamma_{j2}^{\{N\}(3m)}\Delta h_N+\gamma_{j3}^{\{N\}(3m)}\Delta h_N^2)C_j^{\{N\}}e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}-$$

$$-[\theta_1^{\{N\}}(1-\delta_{3m})+\delta_{3m}]\sum_{J=1}^{3}\gamma_{2j-1,1}^{\{N+1\}(3m)}C_{2j-1}^{\{N+1\}}=0,\qquad m=\overline{1,3},$$

$$\theta_1^{\{N\}}\sum_{j=1}^{6}(\alpha_{j1}^{\{N\}(m)}-\alpha_{j2}^{\{N\}(m)}\Delta h_N+\alpha_{j3}^{\{N\}(m)}\Delta h_N^2)C_j^{\{N\}}e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}[(1-\theta_1^{\{N\}})\gamma_{2j-1,1}^{\{N+1\}(3m)}-\theta_1^{\{N\}}\alpha_{2j-1,1}^{\{N+1\}(m)}]C_{2j-1}^{\{N+1\}}=0,\qquad m=\overline{1,2}.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (12) относительно неизвестных $C_j^{\{s\}}$.

2. Двухслойное полупространство. Рассмотрим случай, когда предварительно напряженный слой лежит на полупространстве с начальными напряжениями. При этом коэффициенты и столбец свободных членов системы уравнений (12) можно представить в виде

$$a_{nj}=\gamma_{j1}^{\{1\}(3n)},\qquad j=\overline{1,6},\qquad a_{nj}=0,\qquad j=\overline{7,9},\qquad n=\overline{1,3},$$

$$a_{4j}=\big(\alpha_{j1}^{\{1\}(3)}-\alpha_{j2}^{\{1\}(3)}h+\alpha_{j3}^{\{1\}(3)}h^2\big)e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{1\}}h},\qquad j=\overline{1,6},$$

$$a_{4j}=-\alpha_{2j-13,1}^{\{2\}(3)},\qquad j=\overline{7,9},$$

$$a_{nj}=\big(\gamma_{j1}^{\{1\}(3n)}-\gamma_{j2}^{\{1\}(3n)}h+\gamma_{j3}^{\{1\}(3n)}h^2\big)e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{1\}}h},\qquad j=\overline{1,6},$$

$$a_{nj}=-[\theta^{\{1\}}(1-\delta_{3n})+\delta_{3n}]\gamma_{2j-13,1}^{\{2\}(3n)},\qquad j=\overline{7,9},\qquad n=\overline{5,7},$$

$$a_{nj}=\theta_1^{\{1\}}\big(\alpha_{j1}^{\{1\}(n)}-\alpha_{j2}^{\{1\}(n)}h+\alpha_{j3}^{\{1\}(n)}h^2\big)e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{1\}}h},\qquad j=\overline{1,6},$$

$$a_{nj}=(1-\theta_1^{\{1\}})\gamma_{2j-13,1}^{\{2\}(3n)}-\theta_1^{\{1\}}\alpha_{2j-13,1}^{\{2\}(n)},\qquad j=\overline{7,9},\qquad n=\overline{8,9},$$

$$b_n=i^{-\delta_{3n}}P_n^F\sum_{m=1}^{3}\delta_{mn},\qquad n=\overline{1,9}.$$

Решая систему (12) и используя формулы (11), получим выражения для скоростей перемещений и напряжений в слое и подстилающем полупространстве

$$\dot{u}_n^{\{1\}F} = \frac{i^{1+\delta_{3n}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{m=1}^{3} \beta_{jm}^{\{1\}(n)} (y_3+h)^{m-1} \right] \Delta_j e^{(-1)^{j+1} \gamma_\tau^{\{1\}} (y_3+h)},$$

$$\dot{u}_n^{\{2\}F} = \frac{i^{1+\delta_{3n}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{3} \left[\sum_{m=1}^{3} \beta_{2j-1,m}^{\{2\}(n)} (y_3+h)^{m-1} \right] \Delta_{j+6} e^{\gamma_j^{\{2\}} (y_3+h)},$$

$$\widetilde{Q}_{mn}^{\{1\}F} = \frac{i^{\delta_{mn}+\delta_{3,m+n}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{p=1}^{3} \gamma_{jp}^{\{1\}(mn)} (y_3+h)^{p-1} \right] \Delta_j e^{(-1)^{j+1} \gamma_\tau^{\{1\}} (y_3+h)}, \tag{13}$$

$$\widetilde{Q}_{mn}^{\{2\}F} = \frac{i^{\delta_{mn}+\delta_{3,m+n}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{3} \left[\sum_{p=1}^{3} \gamma_{2j-1,p}^{\{2\}(mn)} (y_3+h)^{p-1} \right] \Delta_{j+6} e^{\gamma_\tau^{\{2\}} (y_3+h)}, \qquad m, n = \overline{1,3}.$$

В выражениях (13) используются следующие обозначения:

$$\beta_{jm}^{\{s\}(n)} = -k_1 v \cos\varphi \alpha_{jm}^{\{s\}(n)},$$

$\Delta = \det[a_{nj}]$ — определитель системы (12); Δ_j — определитель, получающийся из Δ при замене j-го столбца столбцом свободных членов системы (12).

1. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.05.2009

Yu. P. Glukhov

The dynamics of a multilayer pre-stressed semispace under influence of a moving load

Within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the statement and a solution method of a nonplanar problem of the perturbation of a multilayer semispace by a surface load moving with a constant speed are considered with initial stresses and an arbitrary elastic potential. As an example, the problem for a two-layer semispace is examined. In the space of images, the solution is obtained in general form for compressible and incompressible semispaces and the various conditions of contact.