УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко

Найкраще наближення інтегралів Пуассона функцій з класу H_ω

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Отримано асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень у метриці простору C деяким лінійним методом U_n класів інтегралів Пуассона неперервних 2π-періодичних функцій, модулі неперервності яких не перевищують заданих мажорант. Встановлено асимптотичні рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами зазначених класів.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|;$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |\varphi(t)|;$$

$L = L_1$ — простір 2π-періодичних сумовних на $[-\pi, \pi]$ функцій, де норма задана формулою

$$\|\varphi\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\, dt.$$

Нехай, далі, $C^q_{\beta,p}$ і $C^q_\beta H_\omega$ — класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, які задаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P^q_\beta(t)\, dt \tag{1}$$

з ядром Пуассона $P^q_\beta(t)$:

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $\varphi \in U_p$ і, відповідно, $\varphi \in H_\omega$:

$$U_p = \{\varphi\colon \|\varphi\|_{L_p} \leqslant 1\}, \qquad p = 1, \infty; \qquad H_\omega = \{\varphi \in C\colon \omega(\varphi; t) \leqslant \omega(t)\}, \tag{3}$$

$\omega(\varphi; t)$ — модуль неперервності функції $\varphi(\cdot)$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Розглянемо величину вигляду

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_n(f; \cdot)\|_X, \tag{4}$$

де $\mathfrak{N}$ — деякий функціональний клас у просторі $X \subseteq L$ з нормою $\|\cdot\|_X$, U_n — метод наближення, який кожній функції f з $\mathfrak{N}$ ставить у відповідність тригонометричний поліном $U_n(f; x)$ порядку не більшого ніж n. Якщо для величини (4) отримано асимптотичну рівність, тобто якщо в явному вигляді знайдено таку функцію $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; X)$, що

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \qquad n \to \infty,$$

то кажуть, що розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ і методу U_n у просторі X.

Дана задача має багату історію, пов'язану з іменами таких видатних фахівців з теорії функцій, як А. М. Колмогоров, С. М. Нікольський, Б. Надь, В. К. Дзядик, М. П. Корнєйчук, С. Б. Стєчкін, О. В. Єфімов, С. О. Теляковський, О. І. Степанець, В. П. Моторний та ін. Ознайомитись з нею можна, наприклад, по монографіях [1–5].

Для класів $C^q_{\beta,\infty}$ і сум Фур'є розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського було отримано С. М. Нікольським [6], який довів, що

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}; S_{n-1})_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + \frac{O(1)q^n}{n}, \tag{5}$$

де

$$\mathbf{K}(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \qquad q \in [0, 1), \ — \tag{6}$$

повний еліптичний інтеграл першого роду.

С. Б. Стєчкін [7] передовів цей результат іншим способом, який дозволив уточнити залишковий член у формулі (5). Як зазначено в [8], С. Б. Стєчкін звернув увагу на необхідність розв'язання аналогічної задачі для класу $C^q_\beta H_\omega$. Класи $C^q_\beta H_\omega$ порівняно з класами $C^q_{\beta,\infty}$ враховують більш тонкі властивості функцій, тому розв'язання екстремальних задач для них завжди істотно ускладнюється і, як правило, методи, розроблені для розв'язання задач на класах $C^q_{\beta,\infty}$, є недостатніми для розв'язання таких задач на класах $C^q_\beta H_\omega$. Крім того, винятковість класів $C^q_\beta H_\omega$ з точки зору задачі Колмогорова–Нікольського пояснюється тим, що на цих класах порядки верхніх меж відхилень сум Фур'є і найкращих наближень тригонометричними поліномами збігаються.

Зазначимо, що в подібних ситуаціях розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського відомий у небагатьох випадках, і перша така задача була розв'язана М. П. Корнєйчуком [9], який розробив апарат знаходження точних оцінок верхніх меж відхилень інтегралів на класах H_ω, основу якого складає відома лема Корнєйчука–Стєчкіна. З його допомогою М. П. Корнєйчук вперше отримав розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського у випадку наближення сумами Фавара на класах H_ω при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

О. І. Степанець [8], використовуючи згадану лему Корнєйчука–Стєчкіна, отримав такий розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для класів $C^q_\beta H_\omega$ і сум Фур'є:

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; S_{n-1})_C = \frac{4q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q)e_n(\omega) + \frac{O(1)q^n\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \tag{7}$$

де

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt, \tag{8}$$

$1/2 \leqslant \theta_\omega \leqslant 1$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, q і β.

Паралельно з отриманням асимптотичних оцінок наближень класів періодичних функцій тригонометричними поліномами активно розвивався й інший не менш важливий напрям теорії наближень — знаходження точних значень найкращих наближень періодичних функцій тригонометричними поліномами.

Нехай $\mathfrak{N}$ — деякий функціональний клас у просторі $X \subseteq L$ з нормою $\|\cdot\|_X$. Величини вигляду

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_n(f)_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_X, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де inf розглядається по усіх можливих тригонометричних поліномах

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \qquad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

називають найкращими наближеннями класу $\mathfrak{N}$ у метриці простору X.

Отриманню точних значень величин (9) присвячені праці таких визначних математиків, як Ж. Фавар, Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, Б. Надь, С. М. Нікольський, В. К. Дзядик, М. П. Корнєйчук, С. Б. Стєчкін, Сунь Юн Шень, В. Ф. Бабенко та ін. З історією даного питання можна ознайомитись, наприклад, по монографіях [1, 3, 5, 10, 11].

Для класів $C^q_{\beta,\infty}$ та $L^q_{\beta,1}$ виконуються рівності

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

де $\theta_n \in [0,1)$ та θ_n є коренем рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0.$$

При цілих β значення величин $E_n(C^q_{\beta,\infty})_C$ обчислив М. Г. Крейн [12], а величин $E_n(L^q_{\beta,1})_L$ — С. М. Нікольський [6], для дійсних β формула (10) випливає з роботи А. В. Бушанського [13].

Що ж стосується класів $C^q_\beta H_\omega$, то існуючі методи знаходження величин найкращих наближень не дозволяють обчислити їх точні значення. Тому актуальним постає питання про асимптотичну при $n \to \infty$ поведінку величин $E_n(C^q_\beta H_\omega)_C$, яка до цього часу була невідомою.

У даній роботі отримано розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для деякого лінійного методу U_n і класу $C^q_\beta H_\omega$ у рівномірній метриці і показано, що точна верхня межа відхилень поліномів $U_n(f;\cdot)$ від функцій f з класу $C^q_\beta H_\omega$ асимптотично збігається з величинами найкращих наближень $E_n(C^q_\beta H_\omega)_C$ для опуклих модулів неперервності $\omega(t)$.

Означимо метод наближення U_n таким чином. Кожній функції f із класу $C^q_\beta H_\omega$ поставимо у відповідність тригонометричний поліном $U_{n-1}(f;x) = U_{n-1}(q;\beta;f;x)$ вигляду

$$U_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \{\lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k^{(n)}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)\}, \qquad (11)$$

де $a_k = a_k(\varphi)$, $b_k = b_k(\varphi)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції φ, а числа $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(q;\beta)$ і $\nu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)}(q;\beta)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, означаються за допомогою рівностей

$$\lambda_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k}) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \qquad k = \overline{1, n-1}; \qquad (12)$$

$$\nu_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k}) \sin \frac{\beta\pi}{2}, \qquad k = \overline{1, n-1}. \qquad (13)$$

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; U_{n-1})_C = \sup_{f \in C^q_\beta H_\omega} \|f(\cdot) - U_{n-1}(f,\cdot)\|_C = \frac{2q^n}{\pi} e_n(\omega) + \frac{O(1) q^{n+1} \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \qquad (14)$$

де $e_n(\omega)$ визначається рівністю (8), в якій $2/3 \leqslant \theta_\omega \leqslant 1$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, q і β.

Теорема 2. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$*

$$E_n(C^q_\beta H_\omega)_C = \frac{2q^n}{\pi} e_n(\omega) + \frac{O(1) q^{n+1} \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \qquad (15)$$

де $e_n(\omega)$ визначається рівністю (8), в якій $2/3 \leqslant \theta_\omega \leqslant 1$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, q і β.

Як випливає з (14) і (15), на класах $C^q_\beta H_\omega$ метод U_n є асимптотично найкращим серед усіх можливих лінійних методів наближення в рівномірній метриці.

Порівнюючи оцінки О. І. Степанця (7) і теорему 2, бачимо, що для опуклих модулів неперервності $\omega(t)$ справедливе асимптотичне співвідношення

$$\frac{E_n(C^q_\beta H_\omega)_C}{\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; S_{n-1})_C} \sim \frac{\pi}{2\mathbf{K}(q)},$$

де $\mathbf{K}(q)$ — визначається формулою (6), а запис $A(n) \sim B(n)$ означає виконання граничної рівності $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{A(n)}{B(n)} = 1$.

Отже, на класах $C^q_\beta H_\omega$ апроксимаційні властивості сум Фур'є порівняно з властивостями поліномів найкращого наближення погіршуються при прямуванні параметра q до 1 зліва. Аналогічний ефект для класів $C^q_{\beta,\infty}$ був відомий раніше.

Зазначимо також, що для схожого за побудовою до U_n лінійного методу U_n^* задачу Колмогорова–Нікольського в рівномірній метриці для класів $C^q_{\beta,p}$ при всіх $1 \leqslant p \leqslant \infty$ розв'язано в роботі [14].

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – Москва: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций. – Москва: Наука, 1977. – 510 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
7. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
8. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных фунций // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113–138.
9. *Корнейчук Н. П.* Об оценке приближений класса H^{α} тригонометрическими многочленами // Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций. – Москва: Физматгиз, 1961. – С. 148–154.
10. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва: Наука, 1965. – 407 с.
11. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
12. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4–5. – С. 245–249.
13. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 29–37.
14. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 976–982.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 27.05.2009

A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko

The best approximation of Poisson integrals of functions from the class $\boldsymbol{H_\omega}$

We find asymptotic equalities for exact upper bounds of approximations in the metric of a space C by some linear method U_n on the classes of Poisson integrals of continuous 2π-periodic functions, moduli of continuity of which do not exceed the set majorants. This allowed us to obtain asymptotic equalities for the best uniform approximations by trigonometric polynomials of these classes.

У статті А. С. Сердюка “Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках” (2009, № 6, с. 35) формула (6) була віддрукована невірно. Ця формула повинна мати такий вигляд:

$$\sigma(\theta,p) \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } \theta = 1 \text{ і } p = 1, \\ 2 & \text{при } 1 < \theta \leqslant \infty \text{ і } p = 1, \\ 3 & \text{при } 1 \leqslant \theta \leqslant \infty \text{ і } p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$