Кинематика и физика небесных тел, 1985, т. 1, № 5

УДК 528.21/22

Аппроксимация потенциала Земли в различных областях пространства. I. Постановка задачи

М. С. Петровская, Н. И. Лобкова

Ставится задача сравнения гармонических полиномов, представляющих собой наилучшие средние квадратичные приближения (НСП) гравитационного потенциала Земли в различных областях пространства, для которых имеются наблюдательные данные. Излагаются некоторые концепции теории приближений, с помощью которых будет произведено такое сравнение. Приведены результаты сравнения полиномов НСП, соответствующих различным сферам, охватывающим Землю.

APPROXIMATION OF THE EARTH'S POTENTIAL IN DIFFERENT REGIONS OF SPACE. I. FORMULATION OF THE PROBLEM, by Petrovskaya M. S., Lobkova N. I.— The paper deals with the problem of comparison of harmonic polynomials representing the best mean square approximations (BMA) of the Earth's gravitational potential in different areas of space where the observational data are available. Some concepts of the approximation theory are described, which will be used for such comparison. The results of BMS polynomial comparison corresponding to different spheres enveloping the Earth are presented.

Введение. Приведем совокупность понятий и обозначений, использованных в ходе нашего рассмотрения. Пусть $\mathfrak{R}^3$ — трехмерное евклидово пространство; $B \subset \mathfrak{R}^3$ — односвязная ограниченная область в $\mathfrak{R}^3$; O — центр масс Земли, начало координат; x — точка в $\mathfrak{R}^3$; r, φ, λ — ее сферические координаты; S — замкнутая, компактная и гладкая поверхность в $\mathfrak{R}^3$, содержащая точку O внутри себя; $r_S(\varphi, \lambda)$ — расстояние точки $x \in S$ от O; $\Sigma_S \subset \mathfrak{R}^3$ — открытое множество в $\mathfrak{R}^3$, внешнее по отношению к S; $\bar{\Sigma}_S$ — его замыкание; S_0 — поверхность, обладающая характеристиками S, внешняя и произвольно близкая к физической поверхности Земли (очевидно, что S_0 можно принять за поверхность Земли); $r_0 = r_{S_0}(\varphi, \lambda)$; $R_i = \min r_0 - \varepsilon$; $R_e = \max r_0 + \varepsilon$; ε — произвольно малое положительное число; S_i — сфера радиуса R_i, внутренняя по отношению к поверхности S_0; S_e — сфера радиуса R_e, внешняя по отношению к поверхности S_0; S_1 — сфера, внешняя по отношению к S_e; R_1 — ее радиус; Σ_i, Σ_0, Σ_e — открытые множества в $\mathfrak{R}^3$, представляющие области, внешние по отношению к S_i, S_0 и S_e, соответственно; γ — окружность с центром в начале координат, расположенная в плоскости меридиана—полярная орбита спутника; F, G — действительные функции; $F_{|B}$ — сужение F на B; $X(\Sigma_S)$ — множество действительных функций, определенных в $\bar{\Sigma}_S$, гармонических в Σ_S, регулярных на бесконечности и непрерывных вместе со своими первыми частными производными на поверхности S; V — гравитационный потенциал Земли, $V \in X(\Sigma_0)$; $V^{(e)}$ — ряд по шаровым функциям, представляющий потенциал V в области $\bar{\Sigma}_e$; W — элемент множества $X(\Sigma_i)$; $W^{(\infty)}$ — ряд по шаровым функциям, представляющий W; Р-К теорема — теорема Рунге—Крарупа [8]; К-Л теорема — теорема Келдыша — Лаврентьева [2]; НСП — наилучшее среднее квадратичное приближение.

Заметим, что поверхности S_0, S_i, S_e и окружность γ не имеют общих точек (рисунок).

Потенциал Земли на ее поверхности S_0 и во внешнем пространстве Σ_0 может быть представлен различным образом. Наиболее удобным для приложений в геодезии и небесной механике является ряд по шаровым функциям $\{\Phi_{nm}\}$:

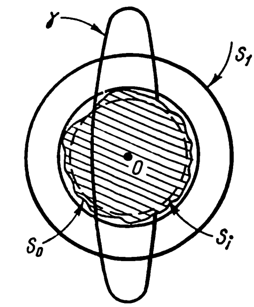
$$V^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(e)}, \quad V_n^{(e)} = \sum_{m=-n}^{n} R_e^{n+1} C_{nm} \Phi_{nm}(r, \varphi, \lambda), \tag{1}$$

где C_{nm} — некоторые динамические константы, называемые стоксовыми постоянными. Этот ряд сходится равномерно в области $\bar{\Sigma}_e = \Sigma_e \cup S_e$. Мало вероятно, чтобы сходимость сохранялась внутри сферы S_e и, в частности, на поверхности Земли S_0. Это заключение следует, например, из асимптотической оценки, вытекающей из результатов Холшевникова

[7]. Она имеет вид:

$$|V^{(e)}_{n|S_e}| = An^{-5/2}\, o\,(n^{-5/2}),\quad A = \text{const} \qquad (2)$$

и справедлива для тел, у которых поверхность кусочно гладкая, а плотность — разрывная функция координат с ограниченной полной вариацией. Эмпирическое правило Каулы ($10^{-5}\, n^{-2}$) близко к этой оценке. Оценка (2) не может быть улучшена по отношению к степени n без предположения о лучших аналитических свойствах поверхности Земли и плотности масс внутри нее, чем это имеет место в действительности ([7], с. 54). Из (1) и (2) следует:



Поверхности S_0, S_i, S_1 и окружность γ

$$|V^{(e)}_{n|S_0}| = O\,(n^{-5/2} R_e^{n+1} r_0^{-(n+1)}).$$

Так как $r_0 \leqslant R_e$, то, вероятнее всего, на поверхности Земли $V^{(e)}_{n|S_0} \to \infty$ при $n \to \infty$. Однако и в случае расходимости ряда (1) на поверхности Земли на ней возможна аппроксимация потенциала рядами шаровых функций. Это утверждение является следствием К-Л и Р-К теорем, которые обосновывают возможность сколь угодно точного равномерного приближения потенциала Земли на ее поверхности S_0 и во внешнем пространстве функциями W, гармоническими вне сферы S_i, находящейся внутри Земли. Такие функции можно представить в виде бесконечных рядов $W^{(\infty)}$. Обсуждение проблемы сходимости, аналитического продолжения и гармонической аппроксимации потенциала приведено в [9]. Потенциал V можно аппроксимировать не только гармоническими рядами W^{∞}, но также и полиномами от шаровых функций, что и делается на практике. Возможность такой аппроксимации обоснована теоремами Фреедена [6].

Различным областям пространства должны соответствовать различные аппроксимирующие функции. Это обстоятельство необходимо учитывать при построении единой модели потенциала Земли на основе различных данных, например, спутниковых наблюдений и гравиметрических измерений на ее поверхности. Константы C_{nm} в (1) являются по существу коэффициентами наилучших средних квадратичных приближений потенциала на сфере S_e. Шоберг [11] рассмотрел вопрос о возможности использования этих величин в качестве коэффициентов рядов, аппроксимирующих потенциал на физической поверхности Земли. Он показал, что существуют ряды шаровых функций, равномерно аппроксимирующих потенциал на S_0, в которых часть коэффициентов можно заменить на константы C_{nm}. Однако при этом отмечается, что такая замена ухудшает сходимость этих рядов.

В работе [4] исследованы свойства наилучших равномерных приближений потенциала в форме гармонических полиномов на поверхности Земли. Авторы пришли к выводу о том, что замена коэффициентов этих полиномов на константы C_{nm} должна привести к увеличению погрешности приближений, либо к возрастанию числа членов в аппроксимирующих функциях. На практике коэффициенты гармонических полиномов определяются из наблюдений методом наименьших квадратов, что соответствует аппроксимации потенциала в средней квадратичной метрике. Поэтому, с нашей точки зрения, представляет интерес изучить свойства наилучших средних квадратичных приближений (НСП) потенциала Земли в различных областях пространства. Хотя реальная задача аппроксимации потенциала является дискретной (поскольку число наблюдений всегда конечно), мы проведем рассмотрение в рамках непрерывной задачи. Это позволит установить общие свойства различных приближений потенциала, которые останутся справедливыми и для дискретного случая.

Некоторые сведения из теории приближений. Напомним некоторые концепции теории приближений, которые будут использованы нами в дальнейшем.

На области $B \subset \mathfrak{R}^3$ рассмотрим банахово пространство $C(B)$ действительных непрерывных функций F, снабженных нормой

$$\|F\|_{C(B)} = \sup |F(x)|,\quad x \in B \subset \mathfrak{R}^3. \qquad (3)$$

Эта норма определяет равномерную (чебышевскую) метрику.

Наряду с $C(B)$ рассмотрим пространство $L_2(B)$, представляющее собой гильбертово пространство действительных функций, определенных в области B и интегрируемых с квадратом в смысле Лебега на B. Скалярное произведение в $L_2(B)$ введем с помощью формулы:

$$(F, G)_{L_2(B)} = \frac{1}{M_B} \int_B F(x)\, G(x)\, dB, \tag{4}$$

где $F, G \in L_2(B)$, а M_B есть мера области B.

Скалярное произведение (4) индуцирует в $L_2(B)$ норму

$$\| F \|_{L_2(B)} = \sqrt{(F, E)_{L_2(B)}} \tag{5}$$

и определяет тем самым среднюю квадратичную метрику.

Из (3)—(5) имеем:

$$\| F \|_{L_2(B)} \leqslant \| F \|_{C(B)}. \tag{6}$$

Пусть $\{\Phi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ — некоторая система линейно-независимых функций из $L_2(B)$. Аппроксимируем функцию $F \in L_2(B)$ линейными комбинациями $F^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n$, $N = 0, 1, \ldots$, где a_n — вещественные константы. Из теории приближений в гильбертовых пространствах [1] следует существование и единственность элемента НСП для функции F по системе функций $\{\Phi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ для любого натурального N. Этот элемент имеет вид: $F^{(N)}_{L_2(B)} = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(N)} \Phi_n$ и характеризуется наименьшей величиной погрешности приближения $\| F - F^{(N)}_{L_2(B)} \|_{L_2(B)}$ для всех возможных значений констант $a_1, a_2, \ldots, a_N$, то есть $\| F - F^{(N)}_{L_2(B)} \|_{L_2(B)} = \inf \| F - F^{(N)} \|_{L_2(B)} \equiv E^{(N)}_{L_2(B)}$.

Как известно ([1], с. 23), для элемента НСП в гильбертовом пространстве $L_2(B)$ справедливо соотношение $(F - F^{(N)}_{L_2(B)}, \Phi_k)_{L_2(B)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, N$, или $\left(F - \sum_{n=0}^{N} a_n^{(N)} \Phi_n, \Phi_k\right)_{L_2(B)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Из последнего равенства получаем следующую систему для определения коэффициентов $a_n^{(N)}$ (там же, с. 24): $\sum_{n=0}^{N} a_n^{(N)} (\Phi_n, \Phi_k)_{L_2(B)} = (F, \Phi_k)_{L_2(B)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Отсюда легко видеть, что при аппроксимации с помощью ортонормированной в $L_2(B)$ системы функций $\{\Phi_n^*\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, коэффициенты $a_n^{(N)}$ вычисляются по простым формулам (там же, с. 32): $a_n^{(N)} = a_n^* = (F, \Phi_n^*)_{L_2(B)}$. В этом случае коэффициенты $a_n^{(N)} = a_n^*$ не зависят от числа членов в НСП. Следуя терминологии, принятой в [5], назовем это свойство перманентностью. Следует подчеркнуть, что коэффициенты в НСП обладают таким свойством тогда и только тогда, когда система функций $\{\Phi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, с помощью которой аппроксимируется функция F, ортогональна в $L_2(B)$ (там же, с. 54).

Бесконечную полную систему функций $\{\Phi_n\}$ гильбертова пространства $L_2(B)$ назовем базисом в $L_2(B)$ (или аппроксимирующим базисом).

Рассмотрим следующие утверждения: а) $\{\Phi_n^*\}$, $n = 0, 1, \ldots$, — ортонормированный базис в $L_2(B)$; б) ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n^*$ для функции $F \in L_2(B)$ с $a_n^* = (F, \Phi_n^*)_{L_2(B)}$ сходится к F по норме $L_2(B)$; в) частные суммы $\sum_{n=0}^{N} a_n^* \Phi_n^*$ ряда Фурье являются НСП функции F по системе $\{\Phi_n^*\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, то есть $\sum_{n=}^{N} a_n^* \Phi_n^* = F^{(N)}_{L_2(B)}$; г) справедливо равенство Парсеваля $\| F \|^2_{L_2(B} = \sum_{n=0}^{\infty} (F, \Phi_n^*)^2_{L_2(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^*)^2$ и, следовательно,

$$(E^{(N)}_{L_2(B)})^2 \equiv \| F - F^{(N)}_{L_2(B)} \|^2_{L_2(B)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n^*)^2.$$

В гильбертовом пространстве $L_2(B)$ эти утверждения связаны между собой следующим образом [3]: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, $(b) \Rightarrow (d)$.

Постановка задачи. Предмет нашего рассмотрения — свойства гармонических приближений потенциала V в различных областях пространства, а именно: $B:=S_0, S_e, S_1, \gamma$. В рамках непрерывной задачи предположим, что в любой точке каждой из этих областей известны следующие данные: $V_{|S_0}$ — гравиметрические измерения на поверхности Земли S_0; $V_{|S_e}$ — гравиметрические измерения, редуцированные с S_0 на S_e; $V_{|S_1}$ — данные обработки наблюдений спутников Земли на сфере S_1; V'_{γ} — данные обработки наблюдений одного спутника Земли на его круговой орбите γ, расположенной в плоскости меридиана.

Рассмотрим множество $\{Y_{nm}(\varphi, \lambda)\}$ линейно независимых поверхностных сферических функций степени n и порядка m:

$$Y_{nm}(\varphi, \lambda) = \alpha_{n|m|} P_{n|m|}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos m\lambda, & m \geqslant 0, \\ \sin |m| \lambda, & m < 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$n = 0, 1, \ldots, |m| \leqslant n,$$

где P_{n0}, $P_{n|m|}$ — полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра (первого рода), а константы $\alpha_{n|m|}$ имеют вид:

$$\alpha_{n|m|} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-|m|)!}{\delta_{|m|}(n+|m|)!}}, \quad \delta_{m|} = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Множество (7) — полная ортонормированная система функций в $L_2(\sigma)$, где σ — единичная сфера. Системе (7) соответствует последовательность $\{\Phi_{nm}\}$ шаровых функций:

$$\Phi_{nm}(r, \varphi, \lambda) = r^{-(n+1)} Y_{nm}(r, \varphi, \lambda), \quad n = 0, 1, \ldots, |m| \leqslant n. \tag{8}$$

Из теорем Фреедена [6] следует, что эта последовательность образует аппроксимирующий базис в гильбертовых пространствах $L_2(B)$, соответствующих каждой из упомянутых областей. В таком случае для любого фиксированного натурального N существует единственный полином НСП для потенциала V в каждом из этих пространств в форме линейной комбинации сужений шаровых функций $\{\Phi_{nm}\}$ на область $B(n=0,1,\ldots,N,\ |m| \leqslant n)$ [6]. Ниже приведены обозначения для НСП потенциала V степени N, их коэффициентов и соответствующих погрешностей:

область	S_0	S_e	S_1	γ
НСП ($N = 0, 1, \ldots$)	$W^{(N)}_{L_2(S_0)}$	$W^{(N)}_{L_2(S_e)}$	$W^{(N)}_{L_2(S_1)}$	$W^{(N)}_{L_2(\gamma)}$
коэффициенты НСП ($n \leqslant N$, $\|m\| \leqslant n$, $N = 0, 1, \ldots$)	$A^{(N)}_{nm}$	$C^{(N)}_{nm}$	$\tilde{C}^{(N)}_{nm}$	$B^{(N)}_{nm}$
погрешности НСП ($N = 0, 1, \ldots$)	$E^{(N)}_{L_2(S_0)}$	$E^{(N)}_{L_2(S_e)}$	$E^{(N)}_{L_2(S_1)}$	$E^{(N)}_{L_2(\gamma)}$

Итак, нам предстоит сравнить между собой выписанные коэффициенты и погрешности.

Как известно, коэффициенты аппроксимирующего полинома НСП и его погрешность зависят от выбранной метрики и выбранного аппроксимирующего базиса. Так, например, разложение функции $f(x)$ в ряд по полиномам Чебышева $T_n(x)$ имеет наилучшую сходимость на сегменте $[-1, 1]$ по сравнению с любым другим рядом по ультрасферическим многочленам от x [10]. Ниже будет показано, что в то время как коэффициенты при одних и тех же шаровых функциях в НСП потенциала V в пространствах $L_2(S_e)$ и $L_2(S_1)$ совпадают, в пространствах $L_2(S_0)$, $L_2(S_e)$ и $L_2(\gamma)$ они различны. При этом в $L_2(S_0)$ и $L_2(\gamma)$ коэффициенты НСП не обладают свойством перманентности.

Аппроксимация потенциала в пространствах $L_2(S_e)$ и $L_2(S_1)$. Рассмотрим коэффициенты $C^{(N)}_{nm}$ и $\tilde{C}^{(N)}_{nm}$ полиномов НСП $W^{(N)}_{L_2(S_e)}$ и $W^{(N)}_{L_2(S_1)}$. Из определения этих полиномов и из (8) имеем:

$$W^{(N)}_{L_2(S_e)} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C^{(N)}_{nm} \Phi_{nm|S_e} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C^{(N)}_{nm} \frac{1}{R_e^{n+1}} Y_{nm},$$
$$W^{(N)}_{L_2(S_1)} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \tilde{C}^{(N)}_{nm} \Phi_{nm|S_1} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \tilde{C}^{(N)}_{nm} \frac{1}{R_1^{n+1}} Y_{nm}. \qquad (9)$$

Рассмотрим скалярное произведение шаровых функций Φ_{nm} в пространстве $L_2(S)$, где — сфера радиуса R_S ($S = S_e$ или $S = S_1$). Из (4) и (8) имеем $(\Phi_{nm}, \Phi_{n_1m_1})_{L_2(S)} = \frac{1}{4\pi R_S^{n+n_1+2}} \int_\sigma Y_{nm} Y_{n_1m_1} d\sigma$; $n, n_1 = 0, 1, \dots, |m| \leqslant n$, $|m_1| \leqslant n_1$. Поскольку система (7) ортонормирована на единичной сфере σ, то $(\Phi_{nm}, \Phi_{n_1m_1})_{L_2(S)} = 0$, если $n \neq n_1$ или $m \neq m_1$ и $\| \Phi_{nm} \|_{L_2(S)} = R_S^{-(n+1)}$, $n = 0, 1, \dots, |m| \leqslant n$. Таким образом, сужение системы шаровых функций на сферу S ортогонально (но не ортонормировано) в пространстве $L_2(S)$, и, в частности, аппроксимирующий базис $\{\Phi_{nm}\}$ ортогонален в $L_2(S_e)$ и $L_2(S_1)$. Отсюда следует что, функции $W^{(N)}_{L_2(S_e)}$ и $W^{(N)}_{L_2(S_1)}$ как НСП в этих пространствах совпадают с частными суммами рядов Фурье (Лапласа) для потенциала V по сужениям шаровых функций $\Phi_{nm|S_e}$ и $\Phi_{nm|S_1}$, соответственно. Как уже отмечалось, ряд (1) сходится равномерно по всей области $\bar{\Sigma}_e$ и, в частности, на сферах S_e и S_1. Следовательно, в силу единственности разложения по ортогональным функциям, сужения ряда (1) на S_e и S_1 представляют собой ряды Фурье (Лапласа) для функций $V_{|S_e}$ и $V_{|S_1}$. В результате, приходим к соотношениям $W^{(N)}_{L_2(S_e)} = \sum_{n=0}^{N} V^{(e)}_{n|S_e} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} Y_{nm}$, $W^{(N)}_{L_2(S_1)} = \sum_{n=0}^{N} V^{(e)}_{n|S_1} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} R_e^{n+1} C_{nm} R_1^{-(n+1)} Y_{nm}$. Сравнение этих выражений с (9) приводит к равенству $C^{(N)}_{nm} = \tilde{C}^{(N)}_{nm} = R_e^{n+1} C_{nm}$. Это соотношение и свойства НСП позволяют сделать следующие заключения.

Стоксовы постоянные C_{nm} в (1), умноженные на нормирующий множитель R_e^{n+1}, являются коэффициентами НСП потенциала V относительно базиса $\{\Phi_{nm}\}$ на любой сфере S_1 радиуса $R_1 > R_e$.

Коэффициенты $C^{(N)}_{nm} = \tilde{C}^{(N)}_{nm}$ не зависят от степени N полиномов НСП и при переходе от N к $N+1$ дополнительно вычисляются лишь $C^{(N+1)}_{nm}$ для $n = N+1$ и $|m| \leqslant N+1$. Таким образом, коэффициенты $C^{(N)}_{nm}$ и $\tilde{C}^{(N)}_{nm}$ перманентны.

Равенство Парсеваля дает следующие соотношения для погрешностей НСП потенциала V в пространствах $L_2(S_e)$ и $L_2(S_1)$: $(E^{(N)}_{L_2(S_e)})^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C^2_{nm}$ и $(E^{(N)}_{L_2(S_1)})^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C^2_{nm} (R_e/R_1)^{2n+2}$. Так как $R_1 > R_e$, то $E^{(N)}_{L_2(S_1)} < E^{(N)}_{L_2(Se)}$, $N = 0, 1, \dots$, и, следовательно $E^{(N)}_{L_2(S_e)} \to 0 \Rightarrow E^{(N)}_{L_2(S_1)} \to 0$ при $N \to \infty$. Иными словами, из сходимости последовательности функций $W^{(N)}_{L_2(S_e)}$, отнесенных к поверхности объемлющей Землю сферы S_e, следует сходимость последовательности функций $W^{(N)}_{L_2(S_1)}$, отнесенных к любой сфере с радиусом $R_1 > R_e$, причем погрешность последних меньше погрешности НСП в пространстве $L_2(S_e)$.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.—409 с.
2. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* Об устойчивости решения проблемы Дирихле.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 4, с. 551—593.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.—542 с.

Окончание см. на с. 94

4. *Петровская М. С., Лобкова Н. И.* Об использовании стоксовых постоянных при аппроксимации потенциала на поверхности Земли с помощью замкнутой системы шаровых функций.— In: Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets. Prague, 1983, p. 331—356.
5. *Davis H. F.* Fourier series and orthogonal functions.— Boston : Allyn and Bacon, 1963.—403 p.
6. *Freeden W.* On the approximation of external gravitational potential with closed systems of (trial) functions.— Bull. Geod., 1980, **54**, N 1, p. 1—20.
7. *Kholshevnikov C.* On the convergence of an asymmetric body potential expansion in spherical harmonics.— Celest. Mech., 1977, **16**, p. 45—60.
8. *Krarup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy.— Medd. Geod. inst., 1969, **44**, N 1, p. 5—80.
9. *Moritz H.* Advanced Physical Geodesy.— Karlsruhe : Wichmann, 1980.—500 p.
10. *Snyder M. A.* Chebyshev method in numerical approximation.— Engle Wood Cliffs : Prentice Hall, 1966.—114 p.
11. *Sjöberg L.* On the convergence problem for the spherical harmonic expansion of the geopotential at the surface of the Earth.— Boll. geod. sci. affini, 1980, **39**, N 3, p. 261—271.

Ин-т теорет. астрономии, Ленинград
Ленингр. политехн. ин-т, Ленинград

Поступила в редакцию 30.01.85