

УДК 521.8/9:520.8

Об испытании нового метода совместного определения постоянных пластинок и координат звезд по астрофотографиям.

I. Модель одиночной пластинки

А. Н. Курьянова, А. И. Яценко

На примере математической модели исследуется эффективность метода совместного определения постоянных пластинок и поправок координат звезд. Исследуется влияние априорных оценок точности опорного каталога и результатов измерений на значения поправок к координатам опорных звезд. Производится сравнение этого метода с традиционно применяемым способом измерений астрофотографий.

ON THE EXAMINATION OF A NEW METHOD OF JOINT DETERMINATION OF PLATE CONSTANTS AND STELLAR COORDINATES FROM THE MEASUREMENTS OF ASTROPHOTOGRAPHS. I. THE SINGLE PLATE MODEL, by Kur'yanova A. N., Yatsenko A. I.—The efficiency of the method for joint determination of plate constants and corrections to stellar coordinates are investigated on the basis of a mathematical model. The effect of a priori precision estimates of the reference catalogue as well as of the measurement data on the corrections to reference stellar coordinates is studied. This method is compared with that used for measurements of astrophotographs.

В работах [1, 2] указывалось, насколько важно выбрать оптимальную модель редукции астрофотографий, а также оценить параметры этой модели. На основе известной в математической статистике схемы конъюгентного анализа в [2] предложен метод совместного определения постоянных пластинок и поправок координат опорных звезд. Метод проиллюстрирован на простой модели, и сделан вывод о необходимости его испытания на более совершенных моделях астрофотографий и реальных наблюдениях.

Описание модели пластинки и опорного каталога. Модель пластинки строилась по образцу пластинок, получаемых на двойном широкоугольном астрографе (ДША) Цейса ($D=40$ см; $F=2$ м) ГАО АН УССР. Рабочее поле пластинки составляет примерно $4^\circ \times 4^\circ$. В зависимости от галактической широты на снимок приходится $60 \div 200$ звезд каталога типа AGK3 или SAOC. Мы принимали, что на фиктивной пластинке будет находиться 32 звезды, имеющихся в SAOC. Для этого количества звезд на участке небесной сферы размером $4^\circ \times 4^\circ$ задавались генератором случайных чисел истинные экваториальные координаты звезд α_i, δ_i ($i=1, \dots, 32$). Предполагалось, что истинные экваториальные координаты оптического центра (ОЦ) пластинки равны координатам центра выбранной площадки: $\alpha_0=0^h08^m00^s$; $\delta_0=02^\circ00'00''$. Имея истинные координаты звезд и ОЦ пластинки, можно по известным формулам вычислить тангенциальные координаты звезд, которые назовем «истинными» тангенциальными координатами. Реальные «измеренные» координаты звезд на пластинке вычисляли как сумму полинома третьей степени от истинных тангенциальных координат и последовательности случайных ошибок измерений.

Коэффициенты полинома определяли по параметрам, перечисленным в табл. 1. Считалось, что линейные коэффициенты полинома зависят от фокусного расстояния фиктивного телескопа, ошибки ориентировки пластинки в приборе и дифференциальной рефракции. Широта пункта наблюдений принималась равной $+50^\circ$, т. е. примерно

соответствующей широте г. Киева. Квадратичные члены зависели от дифференциальной рефракции и наклона пластинки. Влияние дифференциальной абберации на измеренные координаты звезд не рассматривалось, считалось, что этот эффект учтен заранее. Кубические коэффициенты определялись дисторсией объектива. Последовательности случайных ошибок измерений задавались по осям x и y генератором нормально распределенных случайных чисел для среднего значения $\bar{\xi}_x = \bar{\eta}_y = 0$ и стандартного отклонения $\sigma_x = \sigma_y = \pm 3$ мкм. Следует

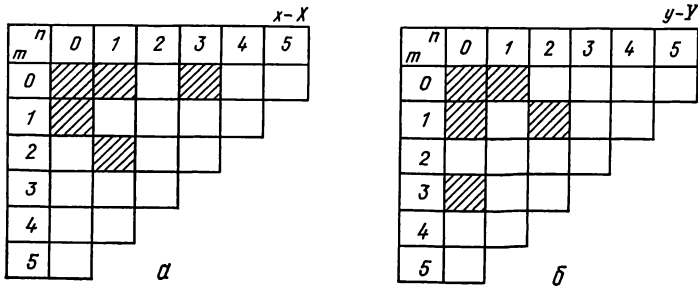


Рис. 1. Значимые члены полинома, представляющего разности измеренных и идеальных координат (ортогональное разложение)

отметить, что средние квадратичные ошибки измерений изображений звезд на реальных пластинках телескопа ДША по четырем наведениям на объект колеблются от ± 1.5 мкм до ± 4.5 мкм в зависимости от

Таблица 1. Значения параметров, которые использовались при построении фиктивных пластинок

Параметр	Значение
Случайные ошибки измерений $\sigma_x = \sigma_y$	± 3 мкм
Фокусное расстояние телескопа	2000 мм
Ошибка положения ОЦ:	
по координате X	$+0.8$ мм
по координате Y	$+1.0$ мм
Ошибка ориентировки пластинки в измерительном приборе	$32''$
Рефракция:	
температура	12 °C
давление	750 мм
часовой угол	$+7.0^m$
Дисторсия	$-0.5 \cdot 10^{-7} \text{ мм}^{-2}$

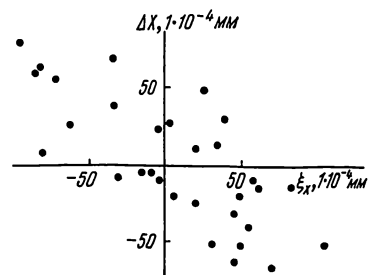


Рис. 2. Зависимость вычисленных поправок координат (ΔX_i) звезд опорного каталога от заданных значений случайной последовательности ξ_x для случая $k=0.27$

экспозиции, блеска звезд и расстояния до центра пластинки (из-за эффекта комы). Модель пластинки в этом смысле была упрощенной, т. е. бралось для всего поля $4^\circ \times 4^\circ$ среднее значение ошибок измерений. Следующее упрощение состояло в том, что систематические эффекты уравнения блеска и комы считались хорошо изученными, а соответствующие поправки внесенными в измеренные координаты звезд.

Предполагалось, что положение ОЦ пластинки известно по каким-либо причинам не точно, например вследствие гнуптия трубы телескопа. Поэтому «опорные» тангенциальные координаты звезд X , Y вычисляли с использованием истинных координат α , δ звезд и измеренных (неточных) координат ОЦ пластинки. Затем на «опорные» тангенциальные координаты накладывали случайные ошибки ξ_x , η_y , со-

ответствующие по величине случайным ошибкам положений звезд в опорном каталоге. Для различных вариантов опорного каталога стандартные отклонения этих ошибок меняли в пределах от $\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.30''$ до $\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.90''$.

Об учете членов второго и третьего порядков при изучении связи тангенциальных и измеренных координат. Применение предложен-

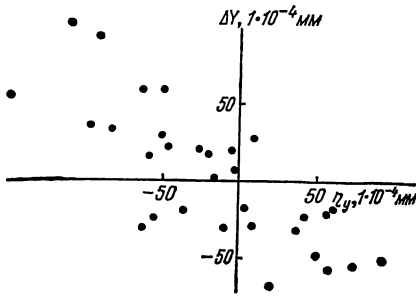


Рис. 3. Зависимость вычисленных поправок координат (ΔY_i) звезд опорного каталога от заданных значений случайной последовательности η_Y для случая $k=0.27$

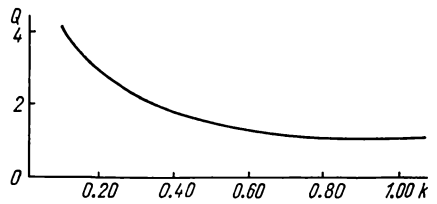


Рис. 4. Зависимость точности вычисленных координат от соотношения между точностью измеренных координат и точностью координат звезд в опорном каталоге

ной в [1] методики позволяет исключить влияние факторов, приводящих к появлению квадратичных и кубических членов в уравнениях связи «опорных» тангенциальных и «измеренных» координат.

Представляя «измеренные» координаты в виде полинома по степеням «тангенциальных» координат $x - X = \sum_{n=0}^5 \sum_{m=0}^{5-n} b_{nm} X^n Y^m$, мы вычислили по методике, описанной в [1], коэффициенты b_{nm} и исправили «измеренные» координаты за члены второго и третьего порядков. На рис. 1 заштрихованы (n, m) -клетки значимых членов ортогонального разложения. Оценки коэффициентов \hat{b}_{nm} и их средние квадратичные ошибки $\sigma(\hat{b}_{nm})$ приведены в табл. 2. Коэффициенты при кубических членах, учитывающих дисторсию, получились близкими к заданному значению коэффициента дисторсии (см. табл. 1). Теперь связь между «измеренными» и «тангенциальными» координатами можно представить в виде:

$$x = aX + bY + c, \quad y = dX + eY + f. \quad (1)$$

Таблица 2. Оценки коэффициентов \hat{b}_{nm} и их ошибок

n, m	Размерность	x-X		y-Y	
		\hat{b}_{nm}	$\sigma(\hat{b}_{nm})$	\hat{b}_{nm}	$\sigma(\hat{b}_{nm})$
0 0	мм ¹	0.80177 · 10 ⁰	0.13973 · 10 ⁻²	0.10005 · 10 ¹	0.12476 · 10 ⁻²
1 0	мм ⁰	-0.25937 · 10 ⁻³	0.56546 · 10 ⁻⁴	-0.18181 · 10 ⁻³	0.50611 · 10 ⁻⁴
0 1	мм ⁰	0.14114 · 10 ⁻³	0.31618 · 10 ⁻⁴	-0.22613 · 10 ⁻³	0.45528 · 10 ⁻⁴
2 0	мм ⁻¹	-0.32645 · 10 ⁻⁶	0.57956 · 10 ⁻⁶	0.17779 · 10 ⁻⁶	0.52512 · 10 ⁻⁶
1 1	мм ⁻¹	0.14776 · 10 ⁻⁶	0.49888 · 10 ⁻⁶	-0.73103 · 10 ⁻⁶	0.44615 · 10 ⁻⁶
0 2	мм ⁻¹	-0.32220 · 10 ⁻⁶	0.54158 · 10 ⁻⁶	0.19882 · 10 ⁻⁷	0.49619 · 10 ⁻⁶
3 0	мм ⁻²	-0.49673 · 10 ⁻⁷	0.18413 · 10 ⁻⁷	0.90750 · 10 ⁻⁸	0.16685 · 10 ⁻⁷
2 1	мм ⁻²	0.56089 · 10 ⁻⁸	0.14194 · 10 ⁻⁷	-0.47098 · 10 ⁻⁷	0.13817 · 10 ⁻⁷
1 2	мм ⁻²	-0.65479 · 10 ⁻⁷	0.11824 · 10 ⁻⁷	0.86143 · 10 ⁻⁸	0.10716 · 10 ⁻⁷
0 3	мм ⁻²	—	—	-0.70059 · 10 ⁻⁷	0.15034 · 10 ⁻⁷
4 0	мм ⁻³	—	—	—	—

Уточнение координат опорных звезд. В дальнейшем, согласно работе [2], задача сводится к решению методом последовательных приближений системы уравнений типа

$$\mathbf{A}\Delta X + \mathbf{B}\Delta Y + \mathbf{C}\Delta P = \mathbf{F}_0, \quad (2)$$

где

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \dots \\ \Delta X_n \end{pmatrix} \quad \Delta Y = \begin{pmatrix} \Delta Y_1 \\ \dots \\ \Delta Y_n \end{pmatrix}$$

— матрицы поправок к приближенным значениям тангенциальных координат;

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta a \\ \dots \\ \Delta f \end{pmatrix}$$

— матрица поправок к приближенным значениям параметров линейной модели редукции, а матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{F}_0 определяются приближенными значениями координат и постоянных пластинки. В выражения для элементов матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F}_0 входит также величина k , определяемая как отношение дисперсий ошибок измеренных и тангенциальных координат: $k = \sigma_x^2/\sigma_{\hat{X}}^2$, или $k = \sigma_y^2/\sigma_{\hat{Y}}^2$. Значения k для $\sigma_x = \sigma_y = \pm 3$ мкм и различных $\sigma_x = \sigma_y$ следующие:

$$\begin{array}{cccc} \sigma_x = \sigma_y & 0.30 & 0.45 & 0.60 & 0.90 \\ k & 1.07 & 0.47 & 0.27 & 0.11 \end{array}$$

Вопрос о влиянии выбранного значения k на точность результатов рассмотрим ниже. Далее вычисляются оценки $\hat{X}_{r,i} = X_i + \Delta X_i$, $\hat{Y}_{r,i} = Y_i + \Delta Y_i$, которые можно сравнить с истинными значениями тангенциальных координат $X_{r,i}$, $Y_{r,i}$, определяя величину $Q = (Q_X + Q_Y)/2$, где $Q_X = \sigma_x^2/D_{\hat{X}}$, $Q_Y = \sigma_y^2/D_{\hat{Y}}$, причем $D_{\hat{X}} = \sum_i (\hat{X}_{r,i} - X_{r,i})^2/(n-1)$, $D_{\hat{Y}} = \sum_i (\hat{Y}_{r,i} - Y_{r,i})^2/(n-1)$.

Значения поправок ΔX_i и ΔY_i для случая $k = 0.27$ (в качестве опорного используется каталог, аналогичный SAOC, $\sigma_x = \sigma_y = 0.60''$) приводятся на рис. 2 и 3 соответственно. По оси абсцисс отложены значения заданных случайных ошибок ξ_x , η_y . Видно, что вычисленные поправки тангенциальных координат ΔX_i , ΔY_i получились близкими к реальным, о чем свидетельствует ход точек графика под углом 45° к координатным осям.

Величина \sqrt{Q} показывает, во сколько раз точнее улучшенные координаты звезд по сравнению с положениями звезд в опорном каталоге. Зависимость Q от k представлена на рис. 4. Если ограничиться условием $Q_{\text{крит}} = 2.0$, то можно считать, что значимое улучшение точности опорного каталога возможно в том случае, если точность «измеренных» координат звезд в 1.8 раза ($k = 0.32$) и больше превышает точность «опорных» координат звезд.

В нашем случае, когда мы работаем с моделями пластинки и опорного каталога, величина k известна точно. Если же идет обработка реальных наблюдений, значение k основано на априорных оценках точности измерений пластинки и точности опорного каталога. Как повлияет ошибка в определении k на точность конечного резуль-

тата, можно исследовать на модели следующим образом. При ошибках измерений $\sigma_x = \sigma_y = \pm 3$ мкм и положений в опорном каталоге $\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.60''$ точное значение k равно 0.27. Будем определять поправки тангенциальных координат звезд в опорном каталоге, изменяя априорное значение k ($k_{\text{апр}}$) в пределах от 0.11 до 1.07. Для каждого значения $k_{\text{апр}}$ одновременно можно вычислить величину Q , показывающую, во сколько раз улучшенный каталог точнее опорного. Зависимость Q от априорного значения $k_{\text{апр}}$ (истинное значение $k=0.27$) приведена на рис. 5. Проведем на графике линию, параллельную оси абсцисс, соответствующую $Q_{\text{крит}}=2.0$, и определим размах возможной

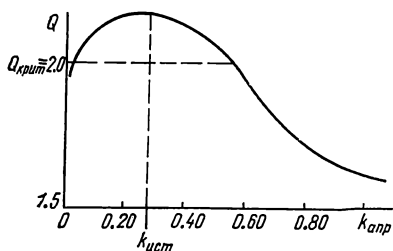


Рис. 5. Изменение точности вычисленных координат в зависимости от априорной оценки величины k

Таблица 3. Отношение дисперсий случайных ошибок улучшенных координат звезд, найденных двумя методами для различных значений истинной и априорной величины k

Истинное значение	Принятое значение	$D_{X_{\text{обыч}}}/D_{\hat{X}}$	$D_{Y_{\text{обыч}}}/D_{\hat{Y}}$
1.07	1.07	1.98	2.14
0.27	1.07	0.82	0.86
0.27	0.46	1.06	1.12
0.27	0.27	1.12	1.16
0.27	0.11	1.09	1.10
0.11	0.11	1.02	1.03

ошибки k , не влияющей на улучшение опорного каталога. При известных ошибках наших измерений, вычисляя k , мы могли бы занижить априорную оценку точности опорного каталога на 30 % от истинного значения или завысить ее на 198 %. Следовательно, априорную оценку k лучше выбирать в предположении, что ошибка опорного каталога имеет максимальное значение.

О сравнении нового метода обработки астронегативов с традиционными. Особый интерес представляет сравнение предложенного в работе [2] метода с обычным традиционным способом, основанном на решении методом наименьших квадратов систем условных уравнений типа: $X = ax + by + c$, $Y = dx + ey + f$.

После определения параметров этого соответствия можно получить каталог тангенциальных координат ($X_i^{\text{обыч}}$, $Y_i^{\text{обыч}}$) и сравнить его с полученным по новой методике — ($\hat{X}_{r,i}$, $\hat{Y}_{r,i}$). В табл. 3 приведены отношения дисперсий ошибок тангенциальных координат, вычисленных двумя методами для различных значений истинной и априорной величины k .

Из таблицы видно, что при $n=32$ различия дисперсий случайных ошибок улучшенных координат звезд, найденных двумя способами, можно считать незначимыми. И только в случае, когда $k_{\text{апр}}=1.07$, расчеты показали, что дисперсия случайных ошибок координат, вычисленных обычным способом, вдвое превышает дисперсию ошибок координат, улучшенных по новому методу. По-видимому, это указывает на неприемлемость традиционного метода в случае, когда ошибки координат звезд в опорном каталоге близки к измеренным координатам.

1. Курьянова А. Н., Кизюн Л. Н. Опыт использования ортогональных полиномов для установления связи между измеренными и идеальными координатами.— Кинематика и физика небес. тел, 1985, 1, № 2, с. 9—14.
2. Яцкив Я. С., Курьянова А. Н. Об одном возможном способе обработки измерений астропотографий.— Там же, № 1, с. 18—26.