УДК 519.833

РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ НЕРІВНОВАЖНОЇ СИМЕТРИЧНОЇ СИТУАЦІЇ У ДІАДИЧНІЙ ГРІ ЯК МОДЕЛІ ОХОРОНИ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА З ТРЬОМА СУБ'ЄКТАМИ ЗАБРУДНЕННЯ ДОВКІЛЛЯ

В.В. Романюк, канд. техн. наук
(Хмельницький національний університет)

Як модель охорони навколишнього середовища з трьома суб'єктами забруднення представлено діадичну гру трьох осіб. Обґрунтовано рекомендації щодо повного використання очисних споруд, яке відповідатиме симетричній, вигідній і рівноважній у смислі мінімізації ризику втрат ситуації у чистих стратегіях. Рекомендовано також застосовувати одну симетричну ситуацію у змішаних стратегіях, котра, будучи нерівноважною, є найбільш вигідною для суб'єктів забруднення.

Как модель охраны окружающей среды с тремя субъектами загрязнения представлено диадическую игру трёх лиц. Обосновано рекомендации по полному использованию очистных сооружений, которое будет соответствовать симметричной, выгодной и равновесной в смысле минимизации риска потерь ситуации в чистых стратегиях. Рекомендовано также применять одну симметричную ситуацию в смешанных стратегиях, которая, будучи неравновесной, является наиболее выгодной для субъектов загрязнения.

As a model of the environment preservation with the three subjects of pollution there has been represented a dyadic three-person game. There have been substantiated the recommendations on the full usage of the cleaning installations, *which will correspond to a symmetric, favorable and equilibrium in the loses risk minimization sense situation in the pure strategies. It also has been recommended to apply a symmetric mixed strategies situation, that, being nonequilibrium, is the most favorable for the pollution subjects.*

Постановка проблеми у загальному виді

Основною проблемою сучасного суспільства є забезпечення високого і надійного рівня медичного обслуговування людини та належної охорони навколишнього середовища, яке безпосереднім чином впливає на здоров'я. За швидким розвитком та оновленням технологій сьогодення стоїть неминуче зростання шкідливих викидів в атмосферу або у водойми. Це породжує конфліктні явища не тільки між природоохоронними інститутами держави і суб'єктами забруднення, а й між самими джерелами шкідливих викидів, які змушені під тиском штрафних санкцій виробляти механізми саморегулювання рівня забруднень від свого функціонування. Моделями таких конфліктів є безкоаліційні ігри, розв'язки яких дозволяють підбирати оптимальну поведінку для кожного з суб'єктів забруднення. Однак навіть у доволі простих безкоаліційних моделях реально здійснити такий підбір складно. Класичним прикладом є діадична гра з трьома підприємствами [1, с. 193—197], де кожне з них, використовуючи для технічних цілей воду із деякої природної водойми, має у розпорядженні дві чисті стратегії: використовувати очисні споруди для відпрацьованої води або ж скидати її у водойму без очищення (сприяючи, фактично, забрудненню водойми). Незважаючи на існування розв'язків у цій грі, протиріччя між рівновагою, справедливістю (симетричністю) і вигідністю залишаються [1, с. 197].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Існує порівняно вузький клас антагоністичних ігор, котрі виступають моделями регуляції екологічних ситуацій [1—4]. Математичні моделі охорони навколишнього середовища у формі безкоаліційних ігор є більш адекватними, гнучкими та достовірними. Саме відсутність коаліцій є характерною ознакою уже згаданої діадичної гри з трьома підприємствами-забруднювачами [1, с. 193—197], оскільки передбачається, що вони функціонують у жорстких конкурентних умовах. Тому там штучне врівноваження невигідних і несиметричних ситуацій рівноваги за рахунок, зокрема, спеціальних попередніх домовленостей, не представляється можливим. Звідси і питання про вибір оптимальної поведінки для кожного підприємства залишається відкритим.

Формулювання мети статті та постановка завдань

Для того, щоб дати необхідні рекомендації щодо оптимального чи, радше, раціонального поводження гравців у діадичній грі з трьома підприємствами, треба ще раз докладно розібрати кожен елемент множини рівноважних ситуацій у цій грі та зіставити їх можливі наслідки. Для цього необхідно проаналізувати окремо рівноважні ситуації у чистих стратегіях та у змішаних стратегіях. Виконання цих завдань допоможе у досягненні мети статті, котра полягає у знаходженні хоча б однієї такої ситуації у чистих стратегіях, яка б була одночасно і симетричною, і вигідною, а її нерівновага була б компенсована за рахунок додаткових переваг для кожного з трьох суб'єктів забруднення довкілля.

Попередні відомості про діадичну гру трьох осіб

Нехай функція $K_j(x, y, z)$ є функцією виграшу j-го гравця у діадичній грі з трьома гравцями, де $j = \overline{1, 3}$. Як відомо [1, с. 191], у діадичних іграх кожен гравець має дві чисті стратегії, тому множинами чистих стратегій першого, другого і третього гравця у діадичній грі з трьома гравцями є відповідно

$$X=\{x_1,x_2\}=\{0,1\}, \tag{1}$$

$$Y=\{y_1,y_2\}=\{0,1\} \tag{2}$$

та

$$Z=\{z_1,z_2\}=\{0,1\}. \tag{3}$$

Згідно з цим змішані стратегії першого, другого і третього гравців можна позначати відповідно як

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1-p & p \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1-p & p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : p \in [0;\, 1] \right\}, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1-q & q \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1-q & q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : q \in [0;\, 1] \right\} \tag{5}$$

та

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1-r & r \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1-r & r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : r \in [0; 1] \right\}, \qquad (6)$$

де імовірності p, q, й r є імовірностями обирання чистих стратегій x_2=1, y_2=1, та z_2=1 відповідно. Таким чином, усі можливі ситуації у діадичній грі з трьома гравцями можна зобразити у вигляді одиничного кубу ситуацій [1, с. 191].

У грі з трьома підприємствами-забруднювачами нульова чиста стратегія відповідає використанню підприємством очисних споруд для відпрацьованої води, а застосування одиничної чистої стратегії означає, що підприємство скидає брудну відпрацьовану воду у водойму без очищення [1, с. 193]. Передбачається, що особливості водойми та технологічних процесів на підприємствах є такими, що якщо неочищену воду скидає не більше одного підприємства, то вода у водоймі залишається придатною для використання, і суб'єкти забруднення збитків не несуть. Якщо неочищену воду скидають не менше двох підприємств, то кожен із трьох суб'єктів забруднення втрачає по три одиниці. Вартість використання очисних споруд кожному підприємству обходиться в одну одиницю [1, с. 194]. Зобразимо усі можливі ситуації у даній грі у вигляді одиничного кубу ситуацій [1, с. 194], як це показано на рис. 1. У вершинах цього кубу наведені значення виграшів кожного гравця у формі

$$\{K_1(x_i,y_k,z_l),\ \ K_2(x_i,y_k,z_l),\ \ K_1(x_i,y_k,z_l)\},$$

$$i\in\{1,2\},\ k\in\{1,2\},\ l\in\{1,2\}. \qquad (7)$$

Звісно, у грі з множинами (1)—(3) ситуація у чистих стратегіях позначається як $\{x_i,\ y_k,\ z_l\}$, де $i\in\{1,2\}$, $k\in\{1,2\}$, $l\in\{1,2\}$. У змішаних же стратегіях ситуація матиме вид $\{p,\ q,\ r\}$. Множина прийнятних ситуацій для першого гравця у даній у діадичній грі визначається із нерівності [1, с. 192] відповідно. Виходячи із цього, в досліджуваній грі знайдено чотири ситуації рівноваги у чистих [1, с. 195] і п'ять ситуацій рівноваги у змішаних стратегіях [1, с. 195, 196]:

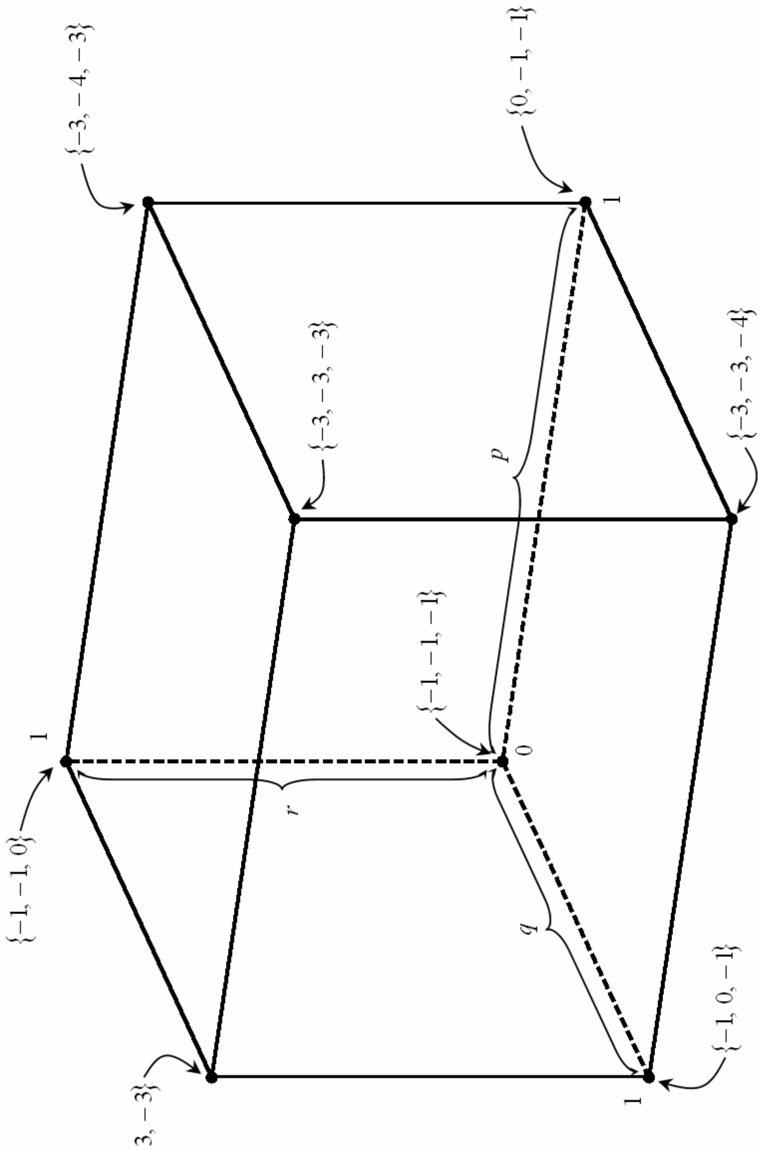

Рис. 1. Куб ситуацій у діадичній грі з трьома підприємствами-забруднювачами та значення виграшів (7) кожного з них

$$\begin{gathered}(1-p)(1-r)K_2(0,0,0)+(1-p)rK_2(0,0,1)+\\+p(1-r)K_2(1,0,0)+prK_2(1,0,1)\leqslant\\\leqslant(1-p)(1-r)K_2(0,1,0)+(1-p)rK_2(0,1,1)+\\+p(1-r)K_2(1,1,0)+prK_2(1,1,1)\end{gathered}\tag{9}$$

та

$$\begin{gathered}(1-p)(1-q)K_3(0,0,0)+(1-p)qK_3(0,1,0)+\\+p(1-q)K_3(1,0,0)+pqK_3(1,1,0)\leqslant\\\leqslant(1-p)(1-q)K_3(0,0,1)+(1-p)qK_3(0,1,1)+\\+p(1-q)K_3(1,0,1)+pqK_3(1,1,1)\end{gathered}\tag{10}$$

$$\{x_1,\ y_1,\ z_2\} = \{0,0,1\},\tag{11}$$

$$\{x_1,\ y_2,\ z_1\} = \{0,1,0\},\tag{12}$$

$$\{x_2,\ y_1,\ z_1\} = \{1,0,0\},\tag{13}$$

$$\{x_2,\ y_2,\ z_2\} = \{1,1,1\},\tag{14}$$

$$\{p,q,r\} = \{0,\ 1/3,\ 1/3\},\tag{15}$$

$$\{p,q,r\} = \{1/3,\ 1/3,\ 0\},\tag{16}$$

$$\{p,q,r\} = \{1/3,\ 0,\ 1/3\},\tag{17}$$

$$\{p,\ q,\ r\}=\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right\},\tag{18}$$

$$\{p,\ q,\ r\}=\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right\}.\tag{19}$$

У ситуаціях (11)—(14) виграші гравців видно на рис. 1, де відповідно

$$\left\{K_1\left(x_1,\, y_1,\, z_2\right),\, K_2\left(x_1,\, y_1,\, z_2\right),\, K_3\left(x_1,\, y_1,\, z_2\right)\right\} = \\ = \left\{K_1\left(0,\, 0,\, 1\right),\, K_2\left(0,\, 0,\, 1\right),\, K_3\left(0,\, 0,\, 1\right)\right\} = \\ = \left\{-1,\, -1,\, 0\right\}, \tag{20}$$

$$\left\{K_1\left(x_1,\, y_2,\, z_1\right),\, K_2\left(x_1,\, y_2,\, z_1\right),\, K_3\left(x_1,\, y_2,\, z_1\right)\right\} = \\ = \left\{K_1\left(0,\, 1,\, 0\right),\, K_2\left(0,\, 1,\, 0\right),\, K_3\left(0,\, 1,\, 0\right)\right\} = \\ = \left\{-1,\, 0,\, -1\right\}, \tag{21}$$

$$\left\{K_1\left(x_2,\, y_1,\, z_1\right),\, K_2\left(x_2,\, y_1,\, z_1\right),\, K_3\left(x_2,\, y_1,\, z_1\right)\right\} = \\ = \left\{K_1\left(1,\, 0,\, 0\right),\, K_2\left(1,\, 0,\, 0\right),\, K_3\left(1,\, 0,\, 0\right)\right\} = \\ = \left\{0,\, -1,\, -1\right\}, \tag{22}$$

$$\left\{K_1\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right),\, K_2\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right),\, K_3\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)\right\} = \\ = \left\{K_1\left(1,\, 1,\, 1\right),\, K_2\left(1,\, 1,\, 1\right),\, K_3\left(1,\, 1,\, 1\right)\right\} = \\ = \left\{-3,\, -3,\, -3\right\}. \tag{23}$$

У ситуації $\left\{p,\, q,\, r\right\}$ виграш j-го гравця $v_j\left(p,\, q,\, r\right)$ знаходиться як

$$v_j\left(p,\, q,\, r\right) = \left(1-p\right)\left(1-q\right)\left(1-r\right)K_j\left(0,\, 0,\, 0\right) + \\ + \left(1-p\right)\left(1-q\right)rK_j\left(0,\, 0,\, 1\right) + \left(1-p\right)q\left(1-r\right)K_j\left(0,\, 1,\, 0\right) + \\ + \left(1-p\right)qrK_j\left(0,\, 1,\, 1\right) + p\left(1-q\right)\left(1-r\right)K_j\left(1,\, 0,\, 0\right) + \\ + p\left(1-q\right)rK_j\left(1,\, 0,\, 1\right) + pq\left(1-r\right)K_j\left(1,\, 1,\, 0\right) + \\ + pqrK_j\left(1,\, 1,\, 1\right) \tag{24}$$

для $j=\overline{1,3}$. Тому у ситуаціях (15)—(17) виграшами гравців є множини

$$\left\{v_1\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), v_2\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), v_3\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}==\left\{-\frac{4}{3},-1,-1\right\}, \quad (25)$$

$$\left\{v_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right), v_2\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right), v_3\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)\right\}==\left\{-1,-1,-\frac{4}{3}\right\}, \quad (26)$$

$$\left\{v_1\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right), v_2\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right), v_3\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)\right\}==\left\{-1,-\frac{4}{3},-1\right\}. \quad (27)$$

У ситуаціях (18) і (19) відповідні виграші гравців

$$\left\{v_1\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right),\ v_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right),\right.$$
$$\left. v_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right\}= \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-2,\frac{\sqrt{3}}{2}-2,\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right\} \quad (28)$$

та

$$\left\{v_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right),\ v_2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right),\right.$$
$$\left. v_3\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)\right\}= \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-2,-\frac{\sqrt{3}}{2}-2,-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right\}$$
$$(29)$$

співпадають, адже ці ситуації є симетричними.

Мотивація використання стратегій, що не входять у рівноважні ситуації, для врівноваження несиметричності і невигідності

Спочатку розглянемо ситуації рівноваги у чистих стратегіях (11)—(14). З них тільки ситуація (14) є симетричною, завдяки чому її використання призводить до справедливих наслідків у формі (23). Але у співвідношеннях (20)—(23) чітко видно, що у рівноважних ситуаціях (11)—(13) підприємства втрачають менше, ніж у ситуації (14). Тому можна стверджувати про те, що рівноважні ситуації (11)—(13) строго домінують рівноважну ситуацію (14), застосування якої, до того ж, означає безперервний злив відпрацьованої води у водойму без очищення усіма суб'єктами забруднення одночасно. Це, очевидно, не може бути вигідним нікому ні при яких умовах, адже водойма, поступово забруднюючись, з певного моменту часу вже не зможе бути повноцінно відновленою. Тут втратять і підприємства, оскільки не зможуть функціонувати, і держава, і, що найголовніше, населення тієї території, де розташовані ці підприємства. Саме тому в [1, с. 195] ситуація (14) була названа «рівновагою безнадії», коли перехід будь-якого підприємства на функціонування з очищенням відпрацьованої води не допомагає покращити становища двох інших підприємств, а тільки погіршує своє власне становище. Звичайно, при такому відхиленні від «рівноваги безнадії» екологічний стан у районі функціонування підприємств стане дещо ліпшим, але тут, очевидно, втрати суб'єктів забруднення будуть обумовлені значними штрафними санкціями з боку природоохоронних структур.

Тепер, коли вже невигідність і нераціональність використання ситуації (14) є абсолютно очевидною, слід обговорити можливості використання рівноважних ситуацій (11)—(13). У цих ситуаціях загальні втрати підприємств складають 2. Якщо підприємства будуть використовувати ситуації (11)—(13), то у середньому кожне з них втрачатиме по 2/3. Проте у кожній з ситуацій (11)—(13) існує реальний суб'єкт забруднення, який одноособово зливає відпрацьовану воду у водойму без очищення. Якраз його втрати і дорівнюють нулю. Звичайно, для досягнення у такому випадку справедливості те підприємство («нахаба»), що захопило право на злив, повинно виплачувати компенсацію у розмірі 1/3 кожному з двох інших («добросовісних») підприємств [1, с. 196]. Але як тоді підприємствам обрати «нахабу», схиливши інших бути «добросовісними», якщо коаліції чи попередні домовленості неможливі? Безсумнівно, якщо таке обрання і матиме місце, то тільки у випадковій формі, неявно, непередбачуваним чином. Тому і результати цього неявного обрання можуть виявитись непередбачуваними, коли, скажімо, з'явиться дві «нахаби», внаслідок чого кожне з підприємств втрачатиме щонайменше по три одиниці. Зрештою, якщо суб'єкт забруднення думатиме спочатку про рівноважну ситуацію з «нахабою», то імовірність того, що підприємство обере себе ним, удвічі менша за імовірність того, що воно стане «добросовісним». Звідси розмірковування про можливість використання чистих стратегій у ситуаціях (11)—(13), де попередні домовленості виключені, стають наступними. Радше підприємство відважиться на використання очисних технологій, ніж на те, щоб стати «нахабою». Якщо вирішать так усі, то така спільна «добросовісність» дасть ситуацію

$$\{x_1, y_1, z_1\} = \{0, 0, 0\}, \tag{30}$$

у якій втрати гравців згідно з

$$\begin{gathered}\{K_1(x_1, y_1, z_1), K_2(x_1, y_1, z_1), K_3(x_1, y_1, z_1)\} = \\ = \{K_1(0, 0, 0), K_2(0, 0, 0), K_3(0, 0, 0)\} = = \{-1, -1, -1\}\end{gathered} \tag{31}$$

є однаковими. У сукупності вони складають три одиниці, що лише на одиницю більше, ніж в одній із несправедливих ситуацій рівноваги (11), (12) або (13). Так, ситуація (30) не є рівноважною, але вона є симетричною і призводить до справедливого розподілу втрат між трьома конкуруючими підприємствами. Якщо ж одне з підприємств змінить чисту стратегію й, отже, відхилиться від ситуації (30), його власні втрати стануть нульовими. Але при цьому є ризик, що ще одне підприємство паралельно змінить чисту стратегію, а тоді вже втрати будуть суттєвими для усіх, де, у найкращому випадку, буде (23). Виходячи з цього, ситуацію (30) можна рахувати рівноважною перед ризиком більших втрат; вона практично мінімізує ризик втрат, а плата за нестійкість складає лише одну одиницю на трьох. Її, крім того, можна вважати вихідною по відношенню до несиметричних стійких ситуацій (11)—(13). Ситуація (30) є своєрідною буферною зоною, покинути яку дозволено лише одному гравцю. Оскільки наперед невідомо, хто це буде, а ризик втрат є значним, то краще цю зону у процесі перших повторень гри не покидати. Також зауважимо, що дотримання ситуації (30) означає не тільки справедливість у розподілі мінімальних втрат, а й екологічну «добросовісність», котра тут вже не є вимушеною, як у ситуаціях з «нахабою».

Займемося тепер ситуаціями у змішаних стратегіях (15)—(19). Звісно, коли мова йде про змішані стратегії, то необхідно пам'ятати, що їх дотримання опирається на практичну реалізацію ймовірностей [5, 6]. Це реально можливо лише за багатьох повторень гри, число яких має бути принаймні таким, щоб можна було реалізувати компоненти змішаної стратегії як статистичні імовірності. У досліджуваній діадичній грі, в принципі, така кількість повторів можлива, коли, наприклад, підприємства будуть функціонувати протягом року і кожен день визначатимуться з тим, очищувати відпрацьовану воду чи скидати її у водойму без очищення. Тоді за 300 днів можна випадковим чином обрати 100 днів, де буде злив неочищеної води, і реалізувати у такий спосіб імовірність 1/3 застосування одиничної чистої стратегії. Але несиметричність ситуацій (15)—(17) так само, як і несиметричність ситуацій (11)—(13), дасть несправедливий розподіл втрат (25) — (27). Можливо, у змішаних ситуаціях рівноваги (15)—(17) і легше визначатися з одним «добросовісним» підприємством, ніж з одним «нахабою», та все ж втрати у таких ситуаціях у середньому більші за втрати не тільки у ситуаціях (11)—(13), а й за втрати у ситуації (30). Зважаючи на це і на згадану вище несиметричність ситуацій (15)—(17), ситуацію (30) можна вважати як таку, що домінує ситуації у змішаних стратегіях (15)—(17).

Ситуації (18) і (19) є симетричними, але, як видно з наслідків їх використання (28) і (29), ситуація (18) домінує ситуацію

(19). Виключивши з подальшого розгляду ситуацію (19), порівняймо ситуації (30) і (18). Остання є рівноважною і, використовуючи її, підприємства втрачають трішки більше одиниці: $\frac{\sqrt{3}}{2}-2\approx-1.133975$. Величину в 0,133975 одиниць можна називати платою за урівноваження ситуації (30) і перехід до умов функціонування, за яких близько п'ятої частини відпрацьованої води скидається у водойму без очищення: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0.211325$. Але ж імовірності у (18) є ірраціональними числами, тому їх статистично реалізувати неможливо за будь-яку як завгодно велику кількість днів функціонування підприємств, не кажучи вже про 300 днів чи навіть декілька років. Як наслідок, практична реалізація ситуації (18) буде лише наближеною навіть з точки зору статистичних ймовірностей. Це може дестабілізувати рівновагу ситуації (18) у процесі роботи суб'єктів забруднення таким чином, що їх втрати стануть більш значними. Тому ситуацію (18) рекомендовано використовувати тільки для довгострокових планів функціонування трьох підприємств-забруднювачів водойми.

А тепер зробимо ще одне важливе зауваження. Справа у тому, що симетрична ситуація рівноваги (18) не є вигідною [1, с. 196]: якщо троє підприємств відійдуть від неї гуртом до деякої симетричної ситуації

$$\left\{\hat{p},\,\hat{q},\,\hat{r}\right\}=\left\{\varsigma,\,\varsigma,\,\varsigma\right\} \tag{32}$$

з відповідними виграшами

$$v_j\left(\varsigma,\,\varsigma,\,\varsigma\right)>v_j\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\,\frac{3-\sqrt{3}}{6},\,\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\quad\forall\ j=\overline{1,\,3}\,, \tag{33}$$

то саме ситуація (32) буде вигідною. Не зважаючи на те, що ситуація (32), котра задовольнятиме (33), не буде рівноважною, вона відіграватиме фактично ту саму роль, що й ситуація (30). Якщо при цьому буде виконана нерівність

$\varsigma < \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, то ситуація (32) відповідатиме ще й більшій «добросовісності» підприємств, коли ще більше будуть використані очисні споруди. У ситуації (32) виграш *j*-го гравця $v_j(\varsigma, \varsigma, \varsigma)$

$$v_j(\varsigma, \varsigma, \varsigma) = (1-\varsigma)^3 K_j(0, 0, 0) + \varsigma(1-\varsigma)^2 K_j(0, 0, 1) + \\ +\varsigma(1-\varsigma)^2 K_j(0, 1, 0) + \varsigma^2(1-\varsigma)K_j(0, 1, 1) + \\ +\varsigma(1-\varsigma)^2 K_j(1, 0, 0) + \varsigma^2(1-\varsigma)K_j(1, 0, 1) + \\ +\varsigma^2(1-\varsigma)K_j(1, 1, 0) + \varsigma^3 K_j(1, 1, 1) \qquad (34)$$

має бути незмінним для $j = \overline{1, 3}$. Легко перевірити, що при цьому (34) спроститься до

$$v_j(\varsigma, \varsigma, \varsigma) = 6\varsigma^3 - 9\varsigma^2 + \varsigma - 1 \qquad (35)$$

для $j = \overline{1, 3}$. Максимум функції (35) відповідатиме виграшу кожного підприємства у найбільш вигідній ситуації (32). Нулями першої похідної

$$\frac{d}{d\varsigma} v_j(\varsigma, \varsigma, \varsigma) = 18\varsigma^2 - 18\varsigma + 1 \qquad (36)$$

функції (35) є

$$\varsigma = \varsigma_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{6} \qquad (37)$$

та

$$\varsigma = \varsigma_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{6}, \qquad (38)$$

причому (37) і (38) належать сегменту [0; 1] (ці значення є ймовірностями), тобто

$$\{\varsigma_1, \varsigma_1, \varsigma_1\} = \left\{\frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}\right\} \tag{39}$$

та

$$\{\varsigma_2, \varsigma_2, \varsigma_2\} = \left\{\frac{3+\sqrt{7}}{6}, \frac{3+\sqrt{7}}{6}, \frac{3+\sqrt{7}}{6}\right\} \tag{40}$$

є ситуаціями у досліджуваній діадичній грі. Друга похідна

$$\frac{d^2}{d\varsigma^2} v_j(\varsigma, \varsigma, \varsigma) = \frac{d}{d\varsigma}\left(18\varsigma^2 - 18\varsigma + 1\right) = = 36\varsigma - 18 = s(\varsigma, \varsigma, \varsigma) \tag{41}$$

функції (35) є такою, що

$$s(\varsigma_1, \varsigma_1, \varsigma_1) = s\left(\frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}\right) = -6\sqrt{7} \tag{42}$$

та

$$s(\varsigma_2, \varsigma_2, \varsigma_2) = s\left(\frac{3+\sqrt{7}}{6}, \frac{3+\sqrt{7}}{6}, \frac{3+\sqrt{7}}{6}\right) = 6\sqrt{7}, \tag{43}$$

тобто точка (37) є точкою максимуму функції (35), у якій

$$v_j\left(\frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}, \frac{3-\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{7\sqrt{7}}{18} - 2 \tag{44}$$

для $j = \overline{1, 3}$. Таким чином, симетрична ситуація (39) є найбільш вигідною для підприємств, хоча справедливі найбільші виграші $\frac{7\sqrt{7}}{18} - 2 \approx -0.971097$ тут не на багато більші за справедливі виграші (28) у рівноважній ситуацій (18). Проте, взагалі кажучи, при найменших однакових втратах підприємств у ситуації (39) забруднення навколишнього середовища є найменшим, адже

$\frac{3-\sqrt{7}}{6} \approx 0.05904$, і порівняно із (18) підприємства більш, ніж у три з половиною рази, зменшать брудні викиди у водойму.

Висновки та перспективи подальших досліджень безкоаліційних моделей охорони довкілля

У дослідженій діадичній грі одночасно не існує симетричних, вигідних і рівноважних ситуацій. Але можна надати рекомендації стосовно використання підприємствами-забруднювачами рівноважної ситуації (18) поряд із нерівноважними (30) і (39). Звичайно, якщо при виборі нульової чистої стратегії йдеться про закупівлю очисних споруд, то як для моделі охорони навколишнього середовища з трьома суб'єктами забруднення довкілля ситуація (30) є найбільш раціональною, у якій кожне підприємство нестиме одиничні втрати. Ці втрати незначним чином зростають при переході до рівноважної змішаної ситуації (18), де, втім, більше двадцяти відсотків відпрацьованої води скидатиметься у водойму без очищення. Не ідеально «добросовісною», та все ж більш екологічно привабливою є ситуація (39), у якій втрати підприємств уже дещо менші за одиничні, й у цьому нерівноважному положенні лише шість відсотків відпрацьованої води скидатиметься у водойму без очищення. Очевидною умовою використання ситуації (39) є така: вибір нульової чистої стратегії полягає в увімкненні очисних споруд, закупівля яких здійснена заздалегідь і зараз уже не входить у витрати підприємств. Тоді протягом декількох сотень днів можна реалізувати наближено ймовірність $\frac{3-\sqrt{7}}{6} \approx 0.05904$ для того, щоб втрачати близько 0,971 одиниць, забруднюючи водойму при цьому лише на шість відсотків допустимого рівня забруднення.

Подальші дослідження безкоаліційних моделей охорони довкілля слід зосередити на узагальненні системі штрафів за недотримання умов екологічної безпеки. Тоді втрати у три одиниці будуть лише частинним випадком. Але необхідно буде також визначити верхню границю цього матеріального покарання, за якої суб'єкти забруднення після сплати штрафу ще зможуть повернутися до «добросовісного» функціонування, адже у їх діяльності (внесок до внутрішнього валового продукту, робочі місця, сплачування податків у бюджет) зацікавлена держава.

* * *

1. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьёв. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

2. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. — М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.: ил.

3. Оуэн Г. Теория игр / Г. Оуэн [пер. с англ.]. — 2-е изд. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.

4. Васин А.А. Введение в теорию игр с приложениями к экономике : [учебное пособие] / А.А. Васин, В.В. Морозов. — М., 2003. — 278 с.

5. Романюк В.В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з пустою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з невідомою кількістю партій гри / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2009. — № 2. — С. 224—229.

6. Романюк В.В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 45—52.

Отримано: *5.04.2010 р.*