

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.047>

УДК 539.3

О.Я. Григоренко¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

М.Ю. Борисенко¹, <https://orcid.org/0000-0002-7287-0975>

О.В. Бойчук², <https://orcid.org/0000-0003-1592-3660>

С.О. Сперкач³, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

А.Д. Безугла³, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

² Миколаївський національний аграрний університет, Миколаїв

³ Технічний центр НАН України, Київ

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,

boychuklena27@gmail.com, svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я. Григоренком

Методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонкої гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з вільним та жорстко закріпленим одним та двома торцями. Проведено порівняння отриманих результатів з результатами для незамкнутої оболонки з іншим кутом розкриття та замкнутої оболонки з однакови́ми геометричними та фізико-механічними параметрами, а також граничними умовами. Реалізовані у роботі підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики гофрованих оболонок інших конфігурацій і можуть бути використані для оцінки точності інших підходів.

Ключеві слова: гофрована незамкнута циліндрична оболонка, жорстке закріплення, частота вільних коливань, метод скінченних елементів, FEMAP.

Гофровані циліндричні оболонки завдяки своїй міцності та стійкості, при відносно невеликій масі, широко використовуються у різних галузях промисловості. При проектуванні корпусів різних машин та механізмів, оболонкових елементів будівель, споруд та конструкцій важливим є розрахунок частот і форм вільних коливань. У сучасній науці для розв'язування задачі динаміки широко застосовують різноманітні комп'ютерні програмні комплекси автоматизованого проектування, наприклад, програмний комплекс FEMAP з розв'язувачем NX Nastran, в основі роботи якого лежить метод скінченних елементів

Цитування: Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 2. С. 47–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.047>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

(МСЕ). Постає актуальна проблема механіки та прикладної математики про поширення МСЕ до дослідження частот і форм вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок.

В рамках теорії тонких оболонок можливе визначення частот і форм вільних коливань оболонок простої геометричної форми [1–5]. У випадку оболонок складної геометричної форми, які мають некруговий поперечний переріз сталої [6] або змінної [7] товщини, відкритий контур [8, 9], гофрованість [10, 11] а також товстотинність [12] доцільно використовувати МСЕ. Окрім чисельних методів визначення частот і форм вільних коливань оболонок складної форми має місце використання експериментальних методів [13, 14].

Метою даної роботи є визначення МСЕ частот та форм вільних коливань тонкої кругової незамкнутої гофрованої циліндричної оболонки з вільним та жорстко закріпленням одним та двома торцями, а також порівняння з незамкнутою оболонкою з іншим кутом розкриття та замкнутою оболонкою.

Основні співвідношення. Рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\bar{\Phi}}_i, \quad U = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\bar{\Phi}}_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -го скінченного елемента відповідно; $\bar{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа (1), отримуємо наступні рівняння руху за відсутності демпфування:

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\bar{\Phi}}_j = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; $\bar{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -му ступеню вільності і відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях механічної системи всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

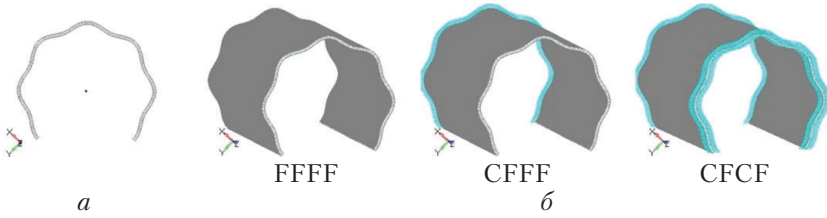
$$\bar{\Phi}_j(t) = \bar{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (3)$$

Після підстановки функцій (3) в рівняння руху (2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \bar{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

Рис. 1. Скінченно-елементна модель гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$



NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Цей метод дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{\Phi}_j\| / \|\bar{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Метод Ланцоша використовує зведення до трьохдіагонального вигляду матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (5)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку за методом Ланцоша; \bar{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \bar{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{q}_k - \alpha_k \bar{q}_k - \beta_k \bar{q}_k \quad (6)$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \beta_k & \alpha_k & \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \bar{s}_h^k - \lambda_h^k \bar{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (7)$$

$$(\omega_h^k)^2 = 1 / \lambda_h^k,$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h ; $h = 1, 2, \dots, n$; n – число власних пар.

Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні k – номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнута задана точність за всіма необхідними власними значеннями.

Результати чисельних розрахунків. За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію кругової гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки висотою $h = 120$ м, товщиною $d = 2$ мм,

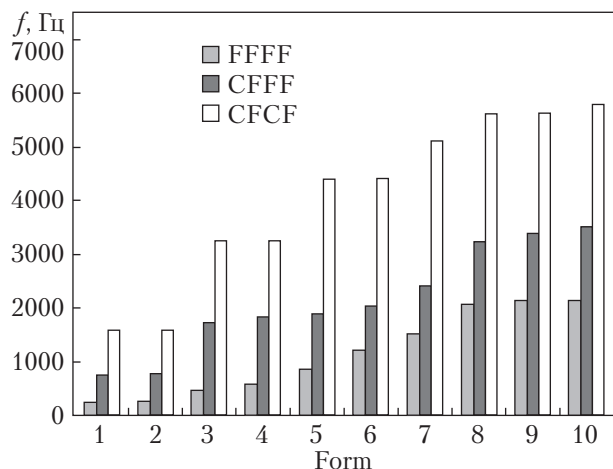


Рис. 2. Порівняння частот вільних коливань оболонки з $\varphi = 90^\circ$

досліджували при різних варіантах жорстко закріплених (С) і вільних торців (F) (рис. 1, б). Розрахунок виконували на визначення частот і форм вільних коливань.

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталеві кругові гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з кількістю гофр $k = 8$ при різних варіантах вільного та жорсткого закріплення торців. Перші десять частот вільних коливань досліджуваної гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ з різними способами закріплення представлені в табл. 2 та гістограмі (рис. 2). Порівняння розрахованих частот з частотами, отриманими в інших роботах для гофрованої оболонки з кутом розкриття $\varphi = 180^\circ$ [10] та замкнутої оболонки [11] з однаковими геометричними та фізико-механічними параметрами, а також граничними умовами представлені в табл. 2 та гістограмах (рис. 3)

Аналізуючи дані гістограми (див. рис. 2) можна побачити однакову тенденцію зростання частот для всіх розглянутих граничних умов, при жорсткому закріпленні одного торця оболонки перша частота збільшилась в 3,5 рази, а при закріпленні двох торців збільшилась

серединною поверхнею з параметричними рівняннями: $x(\theta) = [a + r \cos(k\theta)] \cos\theta$; $y(\theta) = [b + r \cos(k\theta)] \sin\theta$, де $a = b = 42,064$ мм, $r = 2$ мм, $k = 8$. Далі оболонка розрізалась по тах-ах гофрів двома взаємно перпендикулярними півплощинами, побудованими від осі симетрії оболонки (рис. 1, а). Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820$ кг/м³. Розбиття проводили лінійними plate-елементами розміром 1×1 мм товщиною $d = 2$ мм. Скінченно-елементна модель оболонки складається з 24805 вузлів та 24480 елементів. Оболонку

Таблиця 1. Частоти вільних коливань гофрованої незамкнутої циліндричної оболонки з $\varphi = 90^\circ$

Form	f, Гц		
	FFFF	CFFF	CFCF
1	208	726	1572
2	252	751	1572
3	460	1714	3250
4	546	1830	3250
5	842	1883	4401
6	1195	2026	4413
7	1494	2415	5131
8	2083	3257	5636
9	2121	3370	5641
10	2133	3519	5816

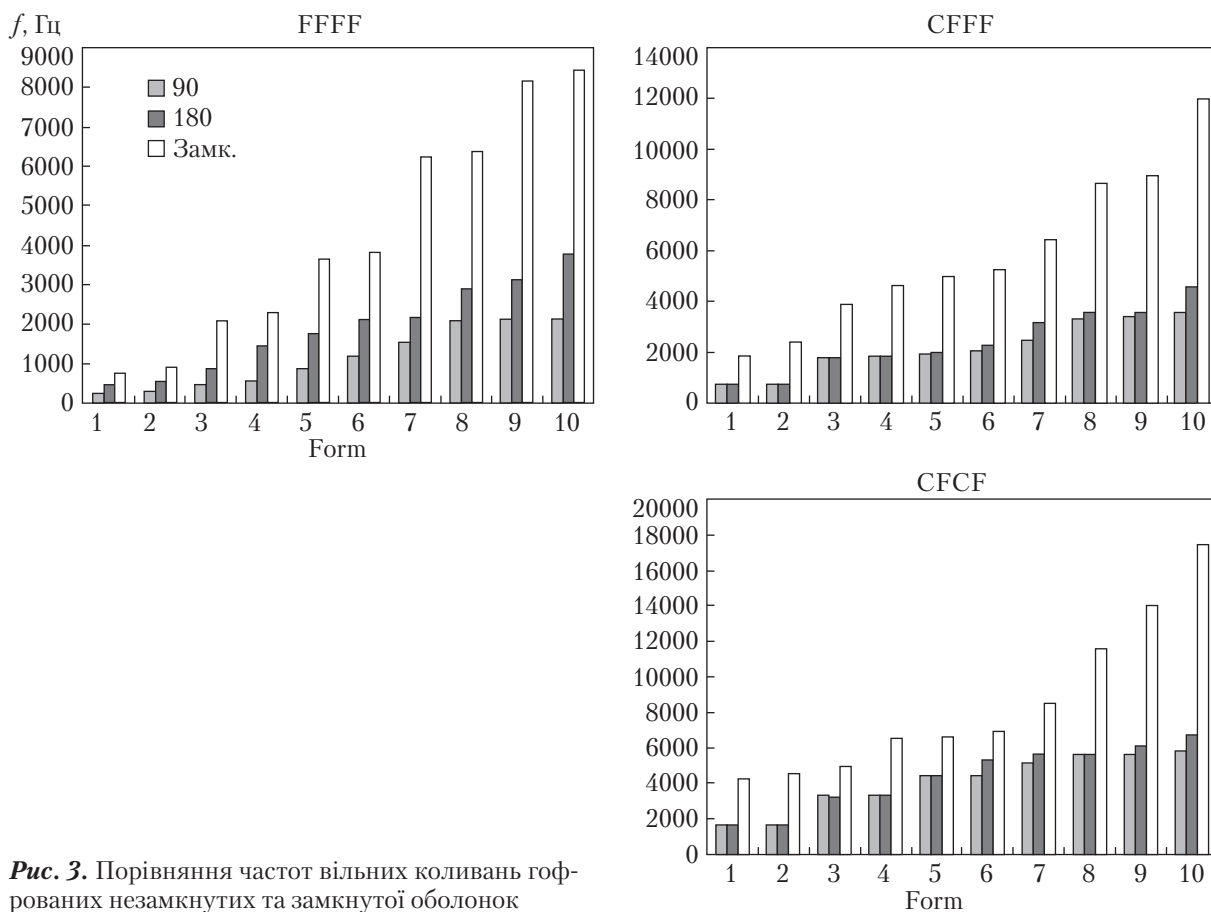


Рис. 3. Порівняння частот вільних коливань гофрованих незамкнутих та замкнутої оболонок

Таблиця 2. Частоти вільних коливань гофрованих незамкнутих та замкнутої оболонок

Form	f , Гц								
	FFFF			CFFF			CFCF		
	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 180^\circ$ [10]	Замк. [11]	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 180^\circ$ [10]	Замк. [11]	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 180^\circ$ [10]	Замк. [11]
1	208	428	735	726	709	1797	1572	1549	4251
2	252	502	874	751	752	2347	1572	1595	4529
3	460	842	2061	1714	1770	3857	3250	3244	4906
4	546	1430	2259	1830	1815	4599	3250	3257	6501
5	842	1771	3627	1883	1968	4962	4401	4442	6618
6	1195	2087	3791	2026	2226	5256	4413	5266	6852
7	1494	2154	6248	2415	3138	6394	5131	5638	8462
8	2083	2868	6391	3257	3520	8668	5636	5643	11530
9	2121	3113	8178	3370	3528	8958	5641	6128	14093
10	2133	3786	8462	3519	4558	11987	5816	6671	17507

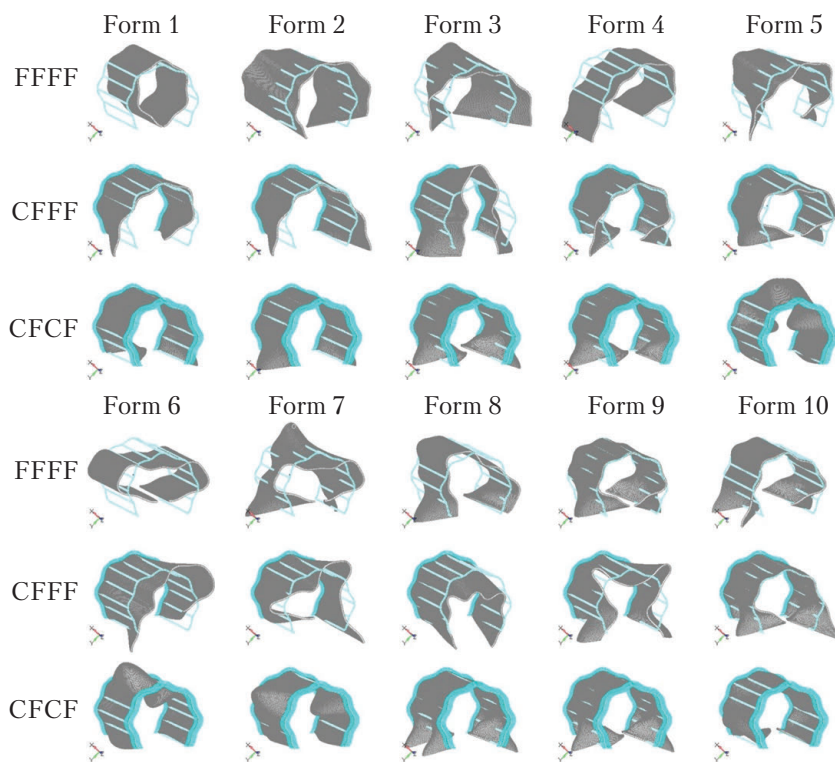


Рис. 4. Перші десять форм вільних коливань незамкнутої оболонки $\varphi = 90^\circ$

у 7,6 разів у порівнянні з частотами оболонки з вільними краями.

Аналізуючи дані табл. 2 можна спостерігати близькість значень частот при жорстко закріпленому одному та двома торцях для незамкнутих оболонок; збільшення частоти в середньому в 1,8 разів для незамкнутої оболонки з кутом розкриття $\varphi = 180^\circ$ в порівнянні з частотами для оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ при вільних торцях; збільшення частоти в 1,5 і більше для замкнутої оболонки в порівнянні з частотами для оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ при всіх видах граничних умов.

Перші десять форм вільних коливань незамкнутої оболонки $\varphi = 90^\circ$ при всіх видах граничних умов представлені на рис. 4.

Висновки. В роботі МСЕ визначено частоти і форми вільних коливань тонких гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ з вільним та жорстко закріпленням одним та двома торцями. Спостерігається однакова тенденція зростання частот для всіх розглянутих граничних умов, при жорсткому закріпленні одного торця оболонки перша частота збільшилась в 3,5 рази, а при закріпленні двох торців — в 7,6 разів у порівнянні з частотами оболонки з вільними краями.

Проведено порівняння отриманих результатів з результатами для незамкнутої оболонки з іншим кутом розкриття та замкнутої оболонки з однаковими геометричними та фізико-механічними параметрами, а також граничними умовами. Спостерігається близькість значень частот при жорстко закріпленому одному та двома торцях для незамкнутих оболонок; збільшення частоти в середньому в 1,8 разів для незамкнутої оболонки з кутом розкриття $\varphi = 180^\circ$ в порівнянні з частотами для оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ при вільних

торцях; збільшення частоти в 1,5 і більше для замкнутої оболонки в порівнянні з частотами для оболонки з кутом розкриття $\varphi = 90^\circ$ при всіх видах граничних умов.

Реалізовані у роботі підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики гофрованих оболонок інших конфігурацій і можуть бути використані для оцінки точності інших підходів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1953. **167 A**, № 1. P. 62–80. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1953_167_014_02
2. Baron M.L., Bleich H.H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. *J. Appl. Mech.* 1954. **21**, № 2. P. 178–184. <https://doi.org/10.1115/1.4010861>
3. Greenspon J.F. Vibration of thick cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1959. **31**, № 12. P. 1682–1683.
4. Markus S. The mechanics of vibrations of cylindrical shells. Amsterdam: Elsevier, 1988. 159 p.
5. Yu Y.Y. Free vibration of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges. *J. Appl. Mech.* 1955. **22**, № 4. P. 547–552. <https://doi.org/10.1115/1.4011152>
6. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *J. Mech. Sci.* 2016. **212**, № 2. P. 182–192. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2658-0>
7. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Natural frequencies and modes of noncircular cylindrical shells with variable thickness. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 2. P. 164–172. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0802-x>
8. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free vibrations of an open non-circular cylindrical shell of variable thickness. *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. 2020. **134**. P. 141–154. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8
9. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free vibrations of an open elliptical cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.* 2020. **56**, № 4. P. 389–401. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01023-9>
10. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free vibration corrugated open cylindrical shells. *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures*. 2022. **151**. P. 63–74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6
11. Grigorenko O.Y., Borisenko, M.Y., Boichuk, O.V. Free vibrations of a corrugated closed cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.* 2022. **58**, № 1. P. 43–52. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01133-6>
12. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical determination of natural frequencies and modes of the vibrations of a thick-walled cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.* 2018. **54**, № 1. P. 75–84. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7>
13. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic interferometry study of the free vibrations of cylindrical shells of constant and variable thickness. *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 68–74. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0611-4>
14. Grigorenko A., Zolotoi Yu., Prigoda A., Zhuk I., Khorishko V., Ovcharenko A. Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry. *J. Math. Sci.* 2013. **194**, № 3. P. 239–244. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1523-2>

Надійшло до редакції 07.09.2022

REFERENCES

1. Arnold, R. N. & Warburton, G. B. (1953). The flexural vibration of thin cylinders. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 167 A, No. 1, pp. 62-80. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1953_167_014_02
2. Baron, M. L. & Bleich, H. H. (1954). Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 21, No. 2, pp. 178-184. <https://doi.org/10.1115/1.4010861>
3. Greenspon, J. F. (1959). Vibration of thick cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 31, No. 12, pp. 1682-1683.
4. Markus, S. (1988). The mechanics of vibrations of cylindrical shells. Amsterdam: Elsevier.

5. Yu, Y. Y. (1955). Free vibration of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges. *J. Appl. Mech.*, 22, No. 4, pp. 547-552. <https://doi.org/10.1115/1.4011152>
6. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boychuk, E. V. (2016). Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *J. Mech. Sci.*, 212, No. 2, pp. 182-192. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2658-0>
7. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boichuk, E. V. (2017). Natural frequencies and modes of noncircular cylindrical shells with variable thickness. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 2, pp. 164-172. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0802-x>
8. Grigorenko, A. Y., Borysenko, M. Y., Boychuk, O. V. & Vasil'eva, L. Y. (2020). Free vibrations of an open non-circular cylindrical shell of variable thickness. *Analysis of Shells, Plates, and Beams*, 134, pp. 141-154. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8
9. Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu. & Boichuk, E. V. (2020). Free vibrations of an open elliptical cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.*, 56, No. 4, pp. 389-401. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01023-9>
10. Grigorenko, A. Y., Borysenko, M. Y., Boychuk, O. V. & Boreiko, N. P. (2022). Free vibration corrugated open cylindrical shells. *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures*, 151, pp. 63-74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6
11. Grigorenko, O. Y., Borisenko, M. Y. & Boichuk, O. V. (2022). Free vibrations of a corrugated closed cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.*, 58, No. 1, pp. 43-52. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01133-6>
12. Grigorenko, A. Ya., Borisenko, M. Yu., Boichuk, E. V. & Prigoda, A. P. (2018). Numerical determination of natural frequencies and modes of the vibrations of a thick-walled cylindrical shell. *Int. Appl. Mech.*, 54, No. 1, pp. 75-84. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7>
13. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Khorishko, V. V. & Borisenko, M. Yu. (2014). Holographic interferometry study of the free vibrations of cylindrical shells of constant and variable thickness. *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 1, pp. 68-74. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0611-4>
14. Grigorenko, A., Zolotoi, Yu., Prigoda, A., Zhuk, I., Khorishko, V. & Ovcharenko, A. (2013). Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry. *J. Math. Sci.*, 194, No 3, pp. 239-244. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1523-2>

Received 07.09.2022

A.Ya. Grigorenko¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

M.Yu. Borysenko¹, <https://orcid.org/0000-0002-7287-0975>

O.V. Boychuk², <https://orcid.org/0000-0003-1592-3660>

S.O. Sperkach³, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

A.D. Bezuglaya³, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

² Nikolaev National Agrarian University, Nikolaev

³ Technical center of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com,

boychuklena27@gmail.com, svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

NUMERICAL DETERMINATION OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF A CORRUGATED OPEN CYLINDRICAL SHELL

In the work, the frequencies and forms of free vibrations of thin corrugated open cylindrical shells with free and rigidly fixed one and two ends were determined using the finite element method. A comparison of the obtained results with the results for an open shell with another opening angle and a closed shell with the same geometric and physic-mechanical parameters, as well as boundary conditions, was carried out. The approaches implemented in work make it possible to study the dynamic characteristics of corrugated shells of other configurations and can be used to evaluate the accuracy of other approaches.

Keywords: *corrugated open cylindrical shell, rigid fastening, frequency and mode of free vibrations, finite element method, FEMAP.*