УДК 551.588

С.Г.Богуславский, А.С.Кузнецов,
С.И.Казаков, Е.В.Берестовая

*Экспериментальное отделение
Морского гидрофизического института НАН Украины, пос.Кацивели*

КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА НА ОСНОВЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Характеризуется методика определений коэффициентов вертикальной турбулентной вязкости и температуропроводности в море на основе исходных дифференциальных уравнений: постоянного и убывающего с глубиной по экспоненте коэффициентов кинематической вязкости в теории дрейфовых течений; постоянного коэффициента температуропроводности в уравнении теплопроводности; коэффициента суммарного переноса с учетом вертикального адвективного переноса; использование уравнений теплопроводности с учетом влияния на температуру воды объемного поглощения солнечной радиации; вертикальный обмен в слое субантарктической промежуточной водной массы Атлантики. Показана ошибочность «универсальной» формулы Кармана, определяющей k_z по производным скорости течения.

В основе косвенных методов определений коэффициентов вертикального турбулентного обмена k_z лежит использование либо исходных дифференциальных уравнений, либо их решений. Преимущество использования уравнений обусловлено тем, что полученные формулы не связаны с какими-либо дополнительными начальными или граничными условиями и позволяют вычислить k_z в случаях нестационарных турбулентных процессов любого моря на любой глубине и проследить за временным изменением k_z.

Постоянный коэффициент турбулентного обмена k_z в теории дрейфовых течений. Запишем уравнение Экмана в комплексной форме

$$k_z \frac{d^2}{dz^2}(u + iv) = 2i\omega \sin\varphi (u + iv). \tag{1}$$

Из этого уравнения следует формула для определения k_z

$$k_z = \frac{2i\omega \sin\varphi (u + iv)}{\frac{d^2}{dz^2}(u + iv)}. \tag{2}$$

При использовании формулы (2) измерения скорости целесообразно производить через постоянный интервал глубины Δz, в знаменателе (2) перейти от дифференциалов к конечным приращениям. Тогда вместо $\frac{d^2}{dz^2}(u + iv)$ запишем

$$\frac{\Delta''}{\Delta z^2}(u+iv)=\frac{(u+iv)_{z-\Delta z}+(u+iv)_{z+\Delta z}-2(u+iv)_z}{\Delta z^2}. \qquad (3)$$

Эта формула перехода от дифференциалов к конечным разностям используется во всех последующих выражениях для k_z, содержащих вторую производную по z.

Тогда для k_z окончательно получим

$$k_z=\frac{2i\omega\, sin(u+iv)_z\,\Delta z^2}{(u+iv)_{z-\Delta z}+(u+iv)_{z+\Delta z}-2(u+iv)_z}. \qquad (4)$$

Здесь у скобок указаны горизонты, к которым относятся скорости. Для определения k_z по формуле (4) сведения о скорости целесообразно получать на основе данных наблюдений, так как для расчета скорости необходимо знать величину k_z.

Убывающий с глубиной по экспоненте коэффициент обмена в теории дрейфовых течений. Запишем уравнение движения

$$k_0\frac{d}{dz}\left[e^{-\alpha z}\frac{d}{dz}(u+iv)\right]=2i\omega\, sin\varphi(u+iv).$$

Здесь k_0 – коэффициент обмена при z = 0. Выполнив дифференцирование в квадратных скобках, получим уравнение

$$k_0\left[e^{-\alpha z}\frac{d^2}{dz^2}(u+iv)-\alpha e^{-\alpha z}\frac{d}{dz}(u+iv)\right]=2i\omega\, sin\varphi(u+iv).$$

Полагая z = 0, найдем формулу для кинематической вязкости у поверхности моря

$$k_0=\frac{2i\omega\, sin\varphi(u+iv)}{\frac{d^2}{dz^2}(u+iv)-\alpha\frac{d}{dz}(u+iv)}, \qquad (5)$$

для любого горизонта z будем иметь

$$k_z=\frac{e^{-\alpha z}2i\omega\, sin\varphi(u+iv)}{\frac{d^2}{dz^2}(u+iv)-\alpha\frac{d}{dz}(u+iv)}. \qquad (6)$$

Сравнение формул (2) и (5) свидетельствует о том, что при z = 0 коэффициент обмена в (5) меньше, чем в (2).

Для использования формулы (6) надо еще определить величину коэффициента α. Выполненные нами ранее [1, 2] исследования величины α показали, что величина этого коэффициента изменяется по акватории Мирового океана мало. В большинстве случаев α уменьшается с ростом географической широты. В средних широтах океанов и в Японском море α = 0,06 м$^{-1}$, в Черном море и в тропической зоне океанов α = 0,07 м$^{-1}$, в экваториальной зоне α = 0,08 м$^{-1}$ [1, 2]. Некоторое увеличение α в низких широтах объясняется ростом здесь вертикального градиента плотности за счет роста градиента температуры [2]. Но эта закономерность усложняется влиянием на градиент плотности солености.

Уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом k_z. Из всех физических полей Мирового океана температурное поле наиболее исследовано. Это обусловлено относительной простотой измерений температуры *in situ*. Но задача определения k_z с помощью уравнения теплопроводности осложняется тем, что до горизонтов 40 – 50 м временные изменения температуры T в известной мере обусловлены не только адвективно-диффузионным переносом тепла, но и объемным поглощением солнечной радиации. По этой причине уравнение теплопроводности в форме конечных разностей используется для определения k_z лишь ниже упомянутых выше горизонтов

$$k_z = \frac{\Delta T / \Delta t}{\Delta'' T / \Delta z^2}, \qquad (7)$$

здесь t – время.

Уравнения диффузии и теплопроводности с учетом вертикального адвективного переноса. По предложению А.Г. Колесникова [3] турбулентный и адвективный переносы в уравнении диффузии можно объединить

$$\frac{dS}{dt} = k_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \mp \omega \frac{dS}{dz} = \left(k_z \mp \omega \frac{\partial S}{\partial z} \Big/ \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial z^2},$$

где S – диффундирующая субстанция. Второй член в скобках имеет размерность коэффициента обмена и в сумме с k_z составляет коэффициент суммарного переноса k_z^*

$$k_z^* = k_z \mp \omega \frac{\partial S / \partial z}{\partial^2 S / \partial z^2}.$$

Тогда уравнение диффузии упрощается

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_z^* \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \qquad (8)$$

Переходя в (8) от дифференциалов к конечным разностям, коэффициент суммарного переноса k_z^* можно определить по формуле (7), заменяя T на S.

Уравнение теплопроводности с учетом влияния на температуру моря объемного поглощения солнечной радиации. Для этого случая исходное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1 - A}{c\rho} \alpha J_0 e^{-\alpha z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

где A – альбедо водной поверхности, c – теплоемкость, J_0 – интенсивность солнечной радиации, падающей на поверхность моря, α – коэффициент поглощения радиации.

Интегрируя это уравнение от горизонта z до h (h – глубина, на которой годовые колебания температуры затухают), определим выражение для k_z

$$k_z = \left(\int_z^h \frac{\partial T}{\partial t} dz - \frac{1-A}{c\rho} \alpha J_0 \int_z^h e^{-\alpha z} dz \right) \Bigg/ \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z .$$

Заметим, что эта формула применима к районам с минимально возможной горизонтальной адвекцией.

Вертикальный обмен в слое промежуточной субантарктической водной массы (ПСВМ) Атлантического океана. Эта водная масса формируется в южной части океана в районе Антарктической конвергенции. Полоса конвергенции располагается вблизи 50º ю.ш., ядро ПСВМ – в слое 700 – 1000 м. Уравнение диффузии, которому подчиняется стационарное распределение температуры или солености при наличии установившегося течения, запишем в виде

$$u \frac{\partial S}{\partial x} = k_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} . \tag{9}$$

Отсюда следует

$$k_z = \frac{u \dfrac{\partial S}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 S}{\partial z^2}} . \tag{10}$$

В [4] приведена более сложная формула для определения k_z, полученная на основе решения уравнения (9). Для средней части Южной Атлантики при скорости Промежуточного течения 7 см/с согласно формуле (10) k_z = 20 см^2/с. Но у восточного берега Южной Америки, где скорость Промежуточного субантарктического течения достигает 30 – 40 см/с, величина k_z должна быть соответственно большей.

Все изложенные выше формулы, полученные на основе дифференциальных уравнений, и другие, подобные им, существенно отличаются от «универсальной» формулы Кармана [5], справедливой, по мнению ее автора, для любого турбулентного потока, в котором имеется градиент скорости,

$$k_z = \kappa^2 \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left| \dfrac{\partial u}{\partial z} \right|}{\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2} , \tag{11}$$

здесь κ – безразмерная универсальная постоянная Кармана, u – горизонтальная скорость. Эта формула получена на основе соотношений теории кинематического подобия [5]. Интересно, какому уравнению движения соответствует эта формула. Из (11) следует

$$k_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 = \kappa^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| .$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей этого уравнения, получим

$$\sqrt{k_z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \kappa \frac{\partial u}{\partial z}\sqrt{\frac{\partial u}{\partial z}} = 0\,. \qquad (12)$$

Умножая уравнение (12) на $\sqrt{k_z}$, будем иметь

$$k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \kappa\sqrt{k_z}\,\frac{\partial u}{\partial z}\sqrt{\frac{\partial u}{\partial z}} = 0\,. \qquad (13)$$

Из (13) следует, что формула Кармана (11) является следствием нелинейного дифференциального уравнения движения жидкости, частицы которой приводятся в движение касательным напряжением ветра (первый член) и еще какой-то неизвестной в природе силой, зависящей от градиента скорости. Но в этом уравнении отсутствует сила Кориолиса, пропорциональная скорости течения, которую нельзя игнорировать в теории дрейфовых течений. По этой причине ошибаются те авторы (например, [6]), которые используют эти формулы для определения коэффициента кинематической вязкости морских течений.

Список литературы

1. *Богуславский С.Г.* Годовой ход коэффициента турбулентной температуропроводности по вертикали в море //. Труды МГИ АН СССР.– 1958.– т.13.– С.3-13.
2. *Богуславский С.Г., Кузнецов А.С., Богуславский А.С.* Формирование термоклина в экваториальной зоне океанов // Морской гидрофизический журнал.– 2004.– № 6.– С.10-16.
3. *Колесников А.Г., Иванова З.С., Богуславский С.Г.* О влиянии устойчивости на интенсивность вертикального обмена в океане // Океанология.– 1961.– 1, вып.4.– 1961.– С.65-72.
4. *Богуславский С.Г.* Определение расхода Антарктической конвергенции в Атлантике.– Киев: Наукова думка, 1967.– С.36-41.
5. *Karman T.V.* Nachr. D. Gottingen, Mat. Phys. k1., 58.– 1930.– 22 p.
6. *Шулейкин В.В.* Единая характеристика турбулентной вязкости для морских волн и течений // Докл. АН СССР.– 1962.– т.144.– 1962.– С.781-784.

Материал поступил в редакцию 01.09.2008 г.