УДК 550.831+550.8

© 2010

Ю. І. Дубовенко

Розв'язність задачі Алексідзе

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа з граничними даними на поверхні Ляпунова редукована до розв'язання двох еквівалентних нелінійних інтегральних рівнянь, які описують функцію сили тяжіння. Досліджено умови єдиності, існування та стійкості задачі Алексідзе в цих редукціях на парі банахових просторів, до яких належать вхідні дані та шуканий розв'язок.

Однією з важливих задач теорії потенціалу є гранична задача відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта, якими є значення аномалій сили тяжіння. Теоретичне підгрунтя задачі закладене в [1]. Ця задача має два альтернативні шляхи розв'язання: пошук границі послідовності розв'язків лінійних задач Неймана для рівняння Лапласа [2] та розв'язання нелінійної граничної задачі Алексідзе для того ж рівняння на довільних банахових просторах [3–5].

Потенціал сили тяжіння $V(x)$ є гармонічною функцією в області y^+, не зайнятій тяжіючими масами. Використати його для відновлення значень сили тяжіння $g(x)$ у точках x необмеженої області y^+ шляхом розв'язання зовнішньої граничної задачі Неймана для рівняння Лапласа (як і змішаної задачі) з граничною умовою $\partial V(x)/\partial n = g(x)$, $x \in \partial W_x$, заважає незбіг рельєфу ∂y з еквіпотенціальною поверхнею $\partial W_x \colon W(z) = Cx$. Непридатне для редукції значень $g(x)$ з поверхні ∂y в область y^+ і розв'язання зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа (і задачі Коші) через негармонічність [6] функції $g(x)$, $x \in y^+$.

Трактовка значень аномалій $\Delta g(x)$ як значень гармонічної функції або їх лінійної комбінації справедлива для областей малої міри [2]. Поширення підміни на регіональні гравіметричні побудови неправомірне.

Для характеристики розподілу $\Delta g(x)$ у глобальній області слід враховувати диференціальні властивості сили тяжіння, що реалізовані в нелінійній граничній задачі Алексідзе для рівняння Лапласа [4]: знайти функцію $W(x)$, $x \in y^+$, яка задовольняє всередині необмеженої замкнутої області $\overline{y}^+ = y^+ \bigcup \partial y$ рівняння Лапласа $\Delta W(x) = 0$, $x \in y^+$, а в будь-якій точці ляпуновської границі ∂y області та в нескінченно віддаленій точці умови:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2 = g^2(x), \qquad x \in \partial y, \qquad W(x) \to 0, \qquad \text{якщо} \qquad |x| \to \infty, \tag{1}$$

де $g(x)$ — задана неперервна функція.

Гармонічну в області y^+ функцію $W(x)$ знаходимо як розв'язок нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння [5], еквівалентний розв'язку Алексідзе (1):

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x) + \frac{\sigma(x)}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma(\xi)dS_\xi + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\xi dS_\eta =$$
$$= g^2(x), \qquad x \in \partial y. \tag{2}$$

Питання розв'язності задачі Алексідзе зводимо до з'ясування умов коректності рівняння (2).

Теорема 1 (єдиності). *Нехай $W_1(x)$ і $W_2(x)$, $x \in y^+$ — потенціали простих шарів, поширених на поверхні ∂y Ляпунова з густинами $\sigma_1(x)$ й $\sigma_2(x)$, $x \in \partial y$, і на цій границі ∂y рівні градієнти потенціалів $|\operatorname{grad} W_1(x)| = |\operatorname{grad} W_2(x)| = g(x)$, $x \in \partial y$, тоді потенціали збігаються між собою $W_1(x) = W_2(x)$ у кожній точці необмеженої області $x \in y^+$.*

Доведення. Введемо позначення $\delta W(x) = W_1(x) - W_2(x)$, $\delta\sigma(x) = \sigma_1(x) - \sigma_2(x)$, з (2) й умови теореми отримаємо рівність

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\cos(n, x_k)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_1(\xi) + \sigma_1(x))\, dS_\xi \right)^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\cos(n, x_k)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_2(\xi) - \sigma_2(x))\, dS_\xi \right)^2 = 0,$$

яку можна переписати таким чином:

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_1(\xi) + \sigma_1(x))\, dS_\xi - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_2(\xi) + \sigma_2(x)) dS_\xi \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_1(\xi) + \sigma_1(x)) dS_\xi + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} (\sigma_2(\xi) + \sigma_2(x)) dS_\xi \right) = 0.$$

Подамо перший множник у вигляді

$$\delta\sigma(x) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-\xi|} \delta\sigma(\xi)\, dS_\xi = 0, \qquad x \in \partial y,$$

або через еквівалентне зображення у вигляді

$$\frac{\partial \delta W(x)}{\partial n_e} = 0, \qquad x \in \partial y. \tag{3}$$

Оскільки потенціал простого шару

$$\delta W(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\delta\sigma(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi \tag{4}$$

у нескінченно віддаленій точці дорівнює нулю, то за умови (3) він тотожно дорівнює нулю в області y^+, а отже, і на її границі. Оскільки потенціал (4) є гармонічною функцією всередині області y^-, то $\delta W(x) = 0$, $x \in y^-$. Звідси випливає умова $\partial \delta W(x)/\partial n_i = 0$ при $x \in \partial y$, яка в поєднанні з умовою (3) означає, що густина $\delta\sigma(x)$ потенціалу $\delta W(x)$ тотожно дорівнює нулю, або $\sigma_1(x) \equiv \sigma_2(x)$, $x \in \partial y$.

Ця теорема вказує на те, що разом з нелінійним оператором, який відображає простір густин $\sigma(x)$, $x \in \partial y$, потенціалів у простір модулів їх градієнтів $g(x)$, $x \in \partial y$, існує (принаймні “в малому”) обернення, яке переводить простір $g(x)$ у простір $\sigma(x)$, $x \in \partial y$. Знайшовши спосіб побудови цього оберненого відображення, доведемо існування розв'язку задачі Алексідзе (1).

Скільки розв'язків має рівняння (2)? Відповідь дає теорема.

Теорема 2 (єдиності). *Якщо нелінійне рівняння* (2) *має розв'язок, він єдиний.*

Доведення. Зауважимо, що рівняння (2) має еквівалентну простішу форму [5]:

$$\sigma^2(x) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi = 2g^2(x), \qquad x \in \partial y. \tag{5}$$

Нехай у рівнянні (5) два розв'язки $\sigma_1(x)$ та $\sigma_2(x)$, $x \in \partial y$, які породжують два потенціали простого шару $W_1(x)$ та $W_2(x)$, $x \in y^+$, модулі градієнтів яких збігаються один з одним на границі області y^+, тобто:

$$|\operatorname{grad} W_1(x)| = |\operatorname{grad} W_2(x)| = g(x), \qquad x \in \partial y. \tag{6}$$

З рівняння (5) та умови (6) отримуємо співвідношення

$$\sigma_1^2(x) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma_1(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma_1(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi - \sigma_2^2(x) -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \int\limits_{\partial y} \frac{\sigma_2(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma_2(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q)\, dS_\eta dS_\xi = 0.$$

Крім того, кожна з функцій $\sigma_1(x)$ й $\sigma_2(x)$ задовольняє однорідне рівняння

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x) - \frac{\sigma(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma(\xi)\, dS_\xi + g_0^2(x) = 0, \qquad x \in \partial y,$$

тому матимемо

$$\frac{\sigma_1(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma_1(\xi)\, dS_\xi - \frac{\sigma_2(x)}{4\pi} \int\limits_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} \sigma_2(\xi)\, dS_\xi = 0.$$

Цю рівність можна навести як

$$\sigma_1(x) \frac{\partial W_1(x)}{\partial n} - \sigma_2(x) \frac{\partial W_2(x)}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial y.$$

За означенням, $|\operatorname{grad} W_k(x)| = \partial W_k(x)/\partial n(x)$, де $n(x)$ — нормаль до еквіпотенціальної поверхні $W_k(y) = Cx$, яка проходить через точку x, тому з останньої рівності з урахуванням умови (6) маємо:

$$\sigma_1(x) \left(\frac{\partial W_1(x)}{\partial n} - \frac{\partial W_2(x)}{\partial n} \right) \frac{\partial n}{\partial m} + \frac{\partial m_2(x)}{\partial m} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x)) = \frac{\partial W_2(x)}{\partial m} (\sigma_1(x) - \sigma_2(x)) = 0,$$

$$x \in \partial y.$$

Це співвідношення можливе за умови $\sigma_1(x) - \sigma_2(x) = 0$ при $x \in \partial y$ і доводить теорему 2.

Щоб з'ясувати умови існування розв'язку задачі Алексідзе, редукованої до нелінійних рівнянь (2), (5), розглянемо залежність лівої частини (5) від $\sigma_1(x)$, $x \in \partial y$. Вираз

$$F_0(x;\sigma_1) = \sigma_1^2(x) + \frac{\sigma_1(x)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_1(\xi)\,dS_\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial н}\frac{\sigma_1(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_2(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi \qquad -$$

нелінійний щодо аргументу $\sigma_1(\xi)$ функціонал на деякому лінійному нормованому (банаховому) просторі $B(\partial y)$ функцій $\sigma_1(x)$. Якщо $\sigma_2(x) \in B(\partial y)$ є певним зміщенням з точки $\sigma_1(x)$ цього простору, то

$$F_0(x;\sigma_1+\sigma_2) = F_0(x;\sigma_1) + 2\sigma_1(x)\sigma_2(x) + \frac{\sigma_2(x)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_1(\xi)\,dS_\xi +$$

$$+\frac{\sigma_1(x)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_2(\xi)\,dS_\xi + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_1(\eta)}{|x-\eta|^2}\frac{\sigma_2(\xi)}{|x-\xi|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi + F_0(x;\sigma_2) =$$

$$= F_0(x;\sigma_1) + \Delta F_0(x;\sigma_1,\sigma_2) + F_0(x;\sigma_2). \tag{7}$$

На основі рівності $\int\limits_{\partial н} K(x,\xi)dS_\xi = 1$, $x \in \partial y$, і леми 2 [5] маємо $\|F_0(x,\sigma_2)\|_B \leqslant 4\|\sigma_2(x)\|_B^2$ і за малого зміщення у прирості $F_0(x;\sigma_1)$ домінує лінійна функція від зміщення

$$\Delta F_0(x;\sigma_1,\sigma_2) = 2\varphi(x)\sigma_2(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial y}K(x;\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)\,dS_\xi,$$

де

$$\varphi(x) = \sigma_1(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_1(\xi)\,dS_\xi \neq 0,$$

$$K(x,\xi;\sigma_1) = \frac{1}{|x-\xi|^2}\left(\sigma_1(x)\cos(n,\rho) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}\sigma_1(\eta)\,dS_\eta\right).$$

Складемо відношення, яке пов'язує малі прирости густини потенціалу простого шару з густиною і значеннями модуля градієнта потенціалу $g(x)$, $x \in \partial y$, у вигляді:

$$\sigma_2(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}K_0(x,\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)\,dS_\xi = f(x,\sigma_1),$$

де $K_0(x,\xi\sigma_1) = K(x,\xi;\sigma_1)/\varphi(x)$, $f(x,\sigma_1) = 2g^2(x) - F_0(x;\sigma_1)/2$. Якщо $\Delta\sigma_{1,n}(x) = \sigma_{1,n+1}(x) - -\sigma_{1,n}(x)$, $f_n(x,\sigma_{1,n}) = 2g^2(x) - F_0(x;\sigma_{1,n})/2$, $n = 0,1,\ldots,\infty$; $\sigma_{1,0}(x) = g(x)$, то отримаємо для визначення послідовності $\{\sigma_{2,n}(x)\}$ *малих приростів густини* потенціалу простого шару $W_n(x)$ лінійне рівняння Фредгольма другого роду:

$$\sigma_{2,n}(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}K_0(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi=f_n(x,\sigma_{1,n}). \tag{8}$$

Відштовхуючись від (7) для функціоналу $F_0(x;\sigma_1+\sigma_2)$, припустимо, що

$$A[\sigma_{2,n}(x)]=\frac{f_n(x,\sigma_{1,n})}{\sigma_{1,n}(x)}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi-\frac{\sigma_{2,n}(x)}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_{1,n}(\xi)}{\sigma_{1,n}(x)}dS_\xi-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_{1,n}(\xi)}{\sigma_{1,n}(x)}\frac{\sigma_{2,n}(\eta)}{|x-\xi|^2}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi,$$

і розглянемо ітераційний процес визначення наближень густини $\sigma_1(x)$, $x\in\partial y$, потенціалу простого шару, поширеного на поверхні Ляпунова ∂y:

$$\begin{aligned}&\sigma_{1,0}(x)=g(x),\qquad \sigma_{2,0}(x)=0,\qquad x\in\partial y,\\&\sigma_{1,n+1}(x)=\sigma_{1,n}(x)+\sigma_{2,n}(x),\qquad \sigma_{2,n+1}(x)=A[\sigma_{2,n}(x)],\qquad n=0{,}1{,}2,\ldots,\infty.\end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 3 (існування). *Нехай задана на поверхні Ляпунова ∂y функція $g(x)$, $x\in\partial y$, належить до обмеженої множини деякого банахового простору $B(\partial y)$, тоді розв'язок $\sigma_1(x)$, $x\in\partial y$, нелінійного рівняння* (2) *існує як гранична функція послідовності $\{\sigma_{1,n}(x)\}$ з простору $B(\partial y)$, генерованої процесом* (9), *що збігається зі швидкістю геометричної прогресії.*

Доведення. Оцінимо різницю $\sigma_{2,n+1}(x)-\sigma_{2,n}(x)$ з точністю не нижче другого порядку малості порівняно з $\|\sigma_{2,n}(x)\|_B$. Виходячи із (7), $2\sigma_{1,n}(x)\sigma_{2,n+1}(x)=2\sigma_{1,n}(x)A[\sigma_{2,n}(x)]$, і врахуємо, що $\sigma_{1,n}(x)\sigma_{2,n+1}(x)-\sigma_{1,n-1}(x)\sigma_{2,n}(x)=\sigma_{1,n}(x)(\sigma_{2,n+1}(x)-\sigma_{2,n}(x))+o(\sigma_{2,n}^2)$. Після нескладних перетворень:

$$\sigma_{2,n+1}(x)-\sigma_{2,n}(x)=\frac{\sigma_{1,n-1}(x)}{\sigma_{1,n}(x)}(\sigma_{2,n}(x)-\sigma_{2,n-1}(x))-\frac{f_n(x,\sigma_{1,n-1})}{\sigma_{1,n}(x)}-$$

$$-\frac{\sigma_{1,n-1}(x)}{\sigma_{1,n}(x)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(m,\rho)}{|x-\xi|^2}(\sigma_{2,n}(\xi)-\sigma_{2,n-1}(\xi))\,dS_\xi-$$

$$-\frac{\sigma_{2,n}(x)-\sigma_{2,n-1}(x)}{2\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(m,\rho)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_{1,n-1}(\xi)}{\sigma_{1,n}(x)}dS_\sigma-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_{2,n}(\xi)-\sigma_{2,n}(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}\frac{\sigma_{1,n-1}(\eta)}{\sigma_{1,n}(x)}dS_\xi dS_\xi.$$

Звідси, посилаючись на те, що $\sigma_{2,0}(x)=0$, а прирости $\sigma_{2,n-1}(x)$ малі, отримуємо ланцюжок нерівностей $\|\sigma_{2,n+1}(x)-\sigma_{2,n}(x)\|_B\leqslant q\|\sigma_{2,n}(x)-\sigma_{2,n-1}(x)\|_B\leqslant\cdots\leqslant q^n\|\sigma_{2,1}(x)\|_B$, де $q=1-\|\sigma_2(x)\|/\|\sigma_1(x)\|$, при цьому $\|\sigma_2(x)\|=\min\limits_n\|\sigma_{2,n}(x)\|$, $\|\sigma_1(x)\|=\max\limits_n\|\sigma_{1,n}(x)\|$. Послідовності $\{\sigma_{2,n}(x)\}$ та $\{\sigma_{1,n}(x)\}$ збігаються. Зі збіжності випливає, що $\|\sigma_{1,n}(x)\|<\infty$ і $\|\sigma_{2,n}(x)\|\to 0$ при $n\to\infty$. Через це в нерівності $\|4q^2(x)-F_0(x;\sigma_{1,n})\|_B\leqslant M(\sigma_{1,n})\|\sigma_{2,n}(x)\|_B$

константа $M(\sigma_{1,n}) > 0$ — обмежена. Послідовність $\{\sigma_{1,n}(x)\}$ збігається зі швидкістю геометричної прогресії до розв'язку $\sigma_1(x)$, $x \in \partial y$, рівняння (2). Рівняння (5) досліджується за аналогією.

З нелінійного функціоналу

$$F_1(x;\sigma_1) = \frac{1}{2}\sigma_1^2(x) + \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_1(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_1(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi,$$

ввівши позначення

$$K_1(x,\xi;\sigma_1) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_1(\eta)}{\sigma_1(x)}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}dS_\eta, \qquad b(x;\sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1(x)}(g^2(x) - F_1(x;\sigma_1)), \tag{10}$$

пропонуємо три алгоритми визначення густини потенціалу простого шару.

Алгоритм 1 базується на наближеній рівності $\Delta F(x;\sigma_1,\sigma_2) = g^2(x) - F_1(x;\sigma_1)$, яку з урахуванням (10) подамо

$$\sigma_2(x) + \int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)\,dS_\xi = b(x,\sigma_1). \tag{11}$$

Оскільки ядро і права частина залежні від густини, то для її визначення придатний процес

$$\begin{gathered}\sigma_{1,0}(x) = g(x), \qquad \sigma_{2,0}(x) = 0, \qquad x \in \partial y,\\ \sigma_{1,n+1}(x) = \sigma_{1,n}(x) + \sigma_{2,n}(x), \qquad \sigma_{2,n+1}(x) = A_1[\sigma_{2,n}(x)], \qquad n = \overline{0,\infty},\end{gathered} \tag{12}$$

де

$$A_1[\sigma_{2,n}(x)] = b(x;\sigma_{1,n}) - \int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi.$$

Алгоритм 2 базується на рівності $\Delta F(x;\sigma_1,\sigma_2) = g^2(x) - F_1(x;\sigma_1) - F_1(x;\sigma_2)$, яку подамо як

$$\sigma_2(x) + \int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)\,dS_\xi = b_1(x,\sigma_1),$$

де

$$b_1(x;\sigma_1) = \frac{g^2(x) - F_1(x;\sigma_1) - F_1(x;\sigma_2)}{\sigma_1(x)}.$$

Для визначення наближень густини придатний процес

$$\begin{gathered}\sigma_{1,0}(x) = g(x), \qquad \sigma_{2,0}(x) = 0, \qquad x \in \partial y,\\ \sigma_{1,n+1}(x) = \sigma_{1,n}(x) + \sigma_{2,n}(x), \qquad \sigma_{2,n+1}(x) = A_2[\sigma_{2,n}(x)], \qquad n = \overline{0,\infty},\end{gathered} \tag{13}$$

де

$$A_2[\sigma_{2,n}(x)] = b_1(x;\sigma_{1,n}) - \int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi.$$

Алгоритм 3 оснований на обчисленні приростів густини чисельними методами з лінійних інтегральних рівнянь 2-го роду

$$\sigma_{2,n+1}(x) + \int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n+1}(\xi)\,dS_\xi = b_1(x,\sigma_{1,n}) \tag{14}$$

відносно приростів $\sigma_{2,n}(x) = \sigma_{1,n+{}^{\backprime}1}(x) - \sigma_{1,n}(x)$, $n = \overline{0,\infty}$; $\sigma_{1,0}(x) = g(x)$, $\sigma_{2,0}(x) = 0$, $x \in \partial y$.

Теорема 4 (існування). *Розв'язок* $\sigma_1(x)$, $x \in \partial y$ *нелінійного рівняння* (5) *існує як границя послідовності* $\{\sigma_{1,n}(x)\}$ *функцій з простору* $B(\partial y)$, *генерованої процесом* (11), *що збігається зі швидкістю геометричної прогресії.*

Доведення. Оцінимо різницю приростів $\sigma_{2,n+1}(x) - \sigma_{2,n}(x)$ густини. Виходячи із зображення функціоналу $F_1(x;\sigma_1+\sigma_2) = F_1(x;\sigma_1) + \Delta F_1(x;\sigma_1,\sigma_2) + F_1(x;\sigma_2)$, який відповідає зміщенню $\sigma_2(x)$, запишемо рівність $2\sigma_{1,n}(x)\sigma_{2,n+1}(x) = 2\sigma_{1,n}(x)A_1[\sigma_{2,n}(x)]$, з якої одержуємо

$$\sigma_{2,n+1}(x) - \sigma_{2,n}(x) = \frac{\sigma_{1,n+1}(x)}{\sigma_{1,n}(x)}(\sigma_{2,n}(x) - \sigma_{2,n-1}(x)) -$$
$$- \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y} \frac{\sigma_{2,n}(\xi) - \sigma_{2,n-1}(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_{1,n-1}(\xi)}{\sigma_{1,n}(x)}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi - (g^2(x) - F_1(x;\sigma_{1,n-1})).$$

Враховуючи, що $g = 1 - \|\sigma_2\|/\|\sigma_1\| < 1$ при $\|\sigma_2\| = \min\limits_n \|\sigma_{2,n}(x)\|$, $\|\sigma_1\| = \max\limits_n \|\sigma_{1,n}(x)\|$ і $\sigma_{2,0}(x) = 0$, маємо $\|\sigma_{2,n+1}(x) - \sigma_{2,n}(x)\| = g\|\sigma_{2,n}(x) - \sigma_{2,n-1}(x)\| \leqslant \cdots \leqslant q^n\|\sigma_{2,1}(x)\|$. Послідовність $\{\sigma_{2,n}(x)\}$ збігається зі швидкістю геометричної прогресії разом з послідовністю $\{\sigma_{1,n}(x)\}$. З (11) з урахуванням наведеного приходимо до $\|g^2(x) - F_1(x;\sigma_{1,n})\| \leqslant M_1(\sigma_{1,n})\|\sigma_{2,n}(x)\|$, де $M_1(\sigma_{1,n}) < \infty$, з якої випливає, що границя $\sigma_1(x)$ послідовності $\{\sigma_{1,n}(x)\}$ задовольняє рівняння (5). Аналогічне доведення в алгоритмах 2,3.

Теорема 5 (стійкості). *Розв'язки нелінійних рівнянь* (2) *та* (5) *неперервно залежать від граничної функції* $g(x) \in B(\partial y)$.

Доведення. Нехай $g_1(x)$ та $g_2(x)$, $x \in \partial y$ — граничні дані двох задач Алексідзе, що відрізняються не більш, ніж на $\varepsilon > 0$. Тоді два розв'язки $\sigma_{1,1}(x)$ і $\sigma_{1,2}(x)$ рівняння (2), що відповідають граничним даним, задовольнятимуть відношенню:

$$\sigma_{1,1}^2(x) - \sigma_{1,2}^2(x) + \frac{\sigma_{1,1}(x) - \sigma_{1,2}(x)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(m,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma_{1,1}(\xi)\,dS_\xi +$$
$$+ \frac{\sigma_{1,2}(x)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(m,\rho)}{|x-\xi|^2}(\sigma_{1,1}(\xi) - \sigma_{1,2}(\xi))\,dS_\xi +$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_{1,1}(\xi) + \sigma_{1,2}(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_{1,1}(\eta) - \sigma_{1,2}(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi = 4(g_1^2(x) - g_2^2(x)).$$

Звідси та на основі леми 2 з [5] отримуємо нерівність

$$\|\sigma_{1,1}(x) - \sigma_{1,2}(x)\|_B \leqslant \frac{2\|g_1(x) + g_2(x)\|_B}{\|\sigma_{1,1}(x)\|_B + \|\sigma_{1,2}(x)\|_B}\varepsilon, \qquad \varepsilon \geqslant \|g_1(x) - g_2(x)\|_B. \tag{15}$$

Отримуємо за нормою банахового простору нерівність

$$\|\sigma_{1,1}(x) - \sigma_{1,2}(x)\|_B \leqslant \frac{\|g_1(x) + g_2(x)\|_B}{\|\sigma_{1,1}(x) + \sigma_{1,2}(x)\|_B}\varepsilon, \tag{16}$$

тобто, малим варіаціям граничних даних $g(x) \in B(\partial y)$ відповідають малі варіації розв'язку $\sigma_1(x) \in B(\partial y)$.

Теорема 6. *Задача Алексідзе для рівняння Лапласа з граничними даними на поверхні Ляпунова є коректно поставленою задачею на парі банахових просторів* $B(\partial y)g(x)$ *і* $B(y^+)W(x)$.

У справедливості теореми можна переконатись, якщо довести, що обернений оператор обмежений у просторі $B(y^+)$.

1. *Черный А. В.* Об уравнении силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1970. – № 2. – С. 145–148.
2. *Якимчик А. І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22. – Київ: Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2001. – 16 с.
3. *Чорний А. В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72–80.
4. *Дубовенко Ю. І.* Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матеріали наук. конф. "Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6–10 жовт. 2008 р. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – С. 156–158.
5. *Дубовенко Ю. І.* Редукція задачі Алексідзе для рівняння сили тяжіння // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 112–119.
6. *Алексидзе М. А.* Редукция силы тяжести. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 256 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.04.2009

Yu. I. Dubovenko

Solvability of the Alexidze problem

The nonlinear boundary-value Alexidze problem for the Laplace's equation with the boundary data on the Liapunov's surface is reduced to the solution of two equivalent nonlinear integral equations, which describe the gravity force function. The conditions of the uniqueness, existence, and stability of the Alexidze problem at these reductions on a pair of Banach domains including the initial data and the required solution are investigated.