УДК 539.3

О. М. Панасюк

Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

Досліджено поширення плоских пружних хвиль у шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадки поширення перпендикулярно до шарів та вздовж шарів. При поширенні вздовж шарів отримані дисперсійні рівняння для квазіпоздовжніх, квазіпоперечних та чисто зсувних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

Поширення пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями розглядалося неодноразово, при цьому вважалося, що переміщення та напруження на границях розділу шарів є неперервними. Так, в роботі [1] розроблено метод дослідження та детально розглянуто випадок поширення хвиль перпендикулярно до шарів при скінченних (великих) початкових деформаціях. У роботі [2] розглянуто поширення хвиль вздовж шарів із стисливих матеріалів, причому, окрім скінченних початкових деформацій, розглянуто випадок малих початкових деформацій. У [3] побудована лінеаризована теорія пружності, в якій всі загальні розв'язки наведені в єдиній формі як для теорії скінченних (великих) початкових деформацій, так і для першого та другого варіантів теорії малих початкових деформацій. Також в цій роботі за допомогою лінеаризованої теорії досліджено закономірності поширення пружних хвиль в композитних шаруватих матеріалах. Тому в даній роботі будемо використовувати загальний метод дослідження, викладений в [3].

Як вже зазначалося, в усіх вище розглянутих роботах дослідження хвильових процесів в композитних шаруватих матеріалах з початковими напруженнями проводилися при умові ідеального контакту шарів. Ми будемо проводити дослідження при умові повного проковзування шарів.

Розглянемо шаруватий композитний матеріал з початковими напруженнями, що складається з двох компонентів, шари яких чергуються. Введемо дві лагранжеві системи координат: (x_1, x_2, x_3) та (y_1, y_2, y_3), які збігаються з декартовими системами відповідно в природному стані і в початковому напружено-деформівному стані. Всі величини, які відносяться до кожного з шарів, позначимо зверху індексом (j) $(j = 1, 2)$; товщини шарів в цих системах — $h^{(j)}$ і $h'^{(j)}$; густини — $\rho^{(j)}$ і $\rho'^{(j)}$. Матеріали шарів є стисливими, а деформації однорідними: $y_m = \lambda_m^{(j)} x_m^{(j)}$, де $\lambda_m^{(j)}$ — коефіцієнт видовження вздовж координатної осі. Вважаємо, що вісь oy_3 напрямлена перпендикулярно до границь розділу шарів.

Основні рівняння в системі координат початкового стану (y_1, y_2, y_3) мають вигляд [3]:

рівняння руху для j-го шару

$$L'^{(j)}_{m\alpha} u^{(j)}_{\alpha} = 0; \qquad L'^{(j)}_{m\alpha} = \omega'^{(j)}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho'^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \qquad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

де

$$\omega'^{(j)}_{im\alpha\beta} = \frac{\lambda_i^{(j)}\lambda_\beta^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(j)}\lambda_3^{(j)}}\omega^{(j)}_{im\alpha\beta}, \qquad \rho'^{(j)} = \frac{1}{\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(j)}\lambda_3^{(j)}}\rho^{(j)}; \qquad \omega^{(j)}_{im\alpha\beta} \text{ —}$$

пружні сталі матеріалу;

вирази для визначення складових тензора напружень при $y_3 = \mathrm{const}$

$$Q'^{(j)}_{3m} = \omega'^{(j)}_{im\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha^{(j)}}{\partial y_\beta}. \tag{2}$$

Розв'язок системи (1) запишемо у вигляді

$$u_\alpha^{(j)}(y_1, y_2, y_3, \tau) = u_\alpha^{(j)(0)}(y_3)e^{i(kn_t y_t - \omega\tau)} \qquad (t, \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2), \tag{3}$$

де k — хвильове число; ω — кругова частота; n_t — складові вектора хвильової нормалі. В (3) та нижче індексом (0) позначено амплітудні величини, які залежать лише від y_3.

Підставляючи розв'язок (3) в (1) і (2), отримаємо відповідно систему рівнянь для знаходження амплітуд вектора переміщень і вирази для визначення амплітуд складових тензора напружень при $y_3 = \mathrm{const}$. Враховуючи це, далі будемо розглядати задачі лише відносно амплітудних величин.

Виділимо два сусідніх шари і приймемо, що шар, всі величини якого позначені індексом 1, займає по осі oy_3 область $0 \leqslant y_3 \leqslant h'^{(1)}$, а другий шар, всі величини якого позначені індексом 2, займає область $-h'^{(2)} \leqslant y_3 \leqslant 0$. Тоді при $y_3 = 0$, на відміну від умов неперервності, що розглядалися в роботах [1–3], повинні виконуватися такі умови контакту:

$$\begin{aligned} &u_3^{(1)(0)}(0) = u_3^{(2)(0)}(0), \qquad Q'^{(1)}_{31}(0) = 0, \qquad Q'^{(2)}_{31}(0) = 0, \\ &Q'^{(1)(0)}_{33}(0) = Q'^{(2)(0)}_{33}(0), \qquad Q'^{(1)}_{32}(0) = 0, \qquad Q'^{(2)}_{32}(0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Внаслідок періодичності структури матеріалу, повинні також виконуватися умови періодичності для амплітудних величин

$$\begin{aligned} &u_3^{(1)(0)}(h'^{(1)}) = u_3^{(2)(0)}(-h'^{(2)}), \qquad Q'^{(1)}_{31}(h'^{(1)}) = 0, \qquad Q'^{(2)}_{31}(-h'^{(2)}) = 0, \\ &Q'^{(1)(0)}_{33}(h'^{(1)}) = Q'^{(2)(0)}_{33}(-h'^{(2)}), \qquad Q'^{(1)}_{32}(h'^{(1)}) = 0, \qquad Q'^{(2)}_{32}(-h'^{(2)}) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, необхідно визначити величини амплітуд для переміщень та знайти за допомогою них амплітуди складових тензора напружень, підставити знайдені вирази для амплітуд в умови контакту (4) та умови періодичності (5). Тоді з умов існування нетривіального розв'язку системи алгебраїчних рівнянь отримаємо дисперсійне рівняння.

Відзначимо, що композитний шаруватий матеріал з умовами контакту між шарами (4) має деякі особливості. Зокрема, в ньому не можуть поширюватися поперечні хвилі перпендикулярно до шарів.

Оскільки випадок поширення поздовжніх хвиль перпендикулярно до шарів повністю збігається з дослідженнями, проведеними у роботах [1, 3] при ідеальному контакті шарів, то перейдемо до випадку поширення хвиль вздовж шарів.

Поширення хвиль вздовж шарів. Вважаємо, що хвилі поширюються в напрямку осі oy_1. В цьому випадку вихідну задачу можна розділити на дві незалежні: поширення хвиль вздовж осі oy_1, які поляризовані в площині y_1oy_3 (квазіпоздовжня хвиля та квазіпоперечна (зсувна) хвиля, поляризована у площині y_1oy_3); поширення хвиль вздовж осі oy_1, поляризованих в площині y_1oy_2 (чисто поперечна (зсувна) хвиля або SH-хвиля). Під квазіпоздовжніми та квазіпоперечними, розуміємо хвилі, які при довгохвильовому наближенні переходять у відповідні поздовжні та поперечні хвилі.

Хвилі, поляризовані в площині y_1oy_3. В цьому випадку для переміщень маємо: $u_1^{(j)} \neq 0$, $u_3^{(j)} \neq 0$, $u_2^{(j)} \equiv 0$. Розв'язок системи (1) можемо подати так [3]:

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)(0)} &= \gamma_1^{(1)} \left(B_1^{(1)} e^{ia_1^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} - B_2^{(1)} e^{-ia_1^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} \right) + \\
&\quad + \gamma_3^{(1)} \left(B_3^{(1)} e^{ia_3^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} - B_4^{(1)} e^{-ia_3^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} \right); \\
u_3^{(1)(0)} &= B_1^{(1)} e^{ia_1^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} + B_2^{(1)} e^{-ia_1^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} + \\
&\quad + B_3^{(1)} e^{ia_3^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)} + B_4^{(1)} e^{-ia_3^{(1)}(y_3 - h'^{(1)}/2)}; \\
u_1^{(2)(0)} &= \gamma_1^{(2)} \left(B_1^{(2)} e^{ia_1^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} - B_2^{(2)} e^{-ia_1^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} \right) + \\
&\quad + \gamma_3^{(2)} \left(B_3^{(2)} e^{ia_3^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} - B_4^{(2)} e^{-ia_3^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} \right); \\
u_3^{(2)(0)} &= B_1^{(2)} e^{ia_1^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} + B_2^{(2)} e^{-ia_1^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} + \\
&\quad + B_3^{(2)} e^{ia_3^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)} + B_4^{(2)} e^{-ia_3^{(2)}(y_3 + h'^{(2)}/2)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $B_m^{(j)}$, $a_l^{(j)}$, $\gamma_l^{(j)}$ $(m = \overline{1,4};\ l = 1,3)$ — постійні; $a_l^{(j)}$ та $\gamma_l^{(j)}$ визначаються відповідно до результатів роботи [3]; переміщення $u_\alpha^{(j)(0)}$ $(\alpha = 1,3;\ j = 1,2)$ записані відносно середини кожного з шарів.

Виражаючи складові тензора напружень (2) через переміщення (6) та підставляючи їх разом з переміщеннями в умови контакту (4) та періодичності (5), отримаємо однорідну систему восьмого порядку. Зважаючи на те, що система громіздка, тут її наводити не будемо і розглянемо частинні випадки.

Квазіпоздовжня хвиля. Для такої хвилі переміщення $u_1^{(j)}$ симетричні, а переміщення $u_3^{(j)}$ — антисиметричні відносно середини відповідних шарів. У зв'язку з цим в (2) покладемо

$$B_1^{(j)} = -B_2^{(j)}, \qquad B_3^{(j)} = -B_4^{(j)}. \tag{7}$$

Притримуючись вище викладеної процедури та враховуючи (7), одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь четвертого порядку відносно $B_1^{(j)}$ та $B_3^{(j)}$. Умови контакту та періодичності в цьому випадку збігаються. Прирівнюючи визначник цієї системи до нуля, отримаємо дисперсійне рівняння

$$\omega'^{(2)}_{3113} \Big(a_1^{(2)} \gamma_1^{(2)} - a_3^{(2)} \gamma_3^{(2)} \Big) \Big[\omega'^{(1)}_{3113} \omega'^{(1)}_{1313} k \gamma_1^{(1)} \gamma_3^{(1)} (a_3^{(1)} \beta_{13} - a_1^{(1)} \beta_{11}) +$$

$$+\omega'^{(1)}_{1313}\omega'^{(1)}_{1133}k^2(\gamma_1^{(1)}\beta_{13}-\gamma_3^{(1)}\beta_{11})+\omega'^{(1)}_{3113}\omega'^{(1)}_{3333}a_1^{(1)}a_3^{(1)}(\gamma_3^{(1)}\beta_{13}-\gamma_1^{(1)}\beta_{11})+$$

$$+\omega'^{(1)}_{1313}\omega'^{(1)}_{3333}k(a_1^{(1)}\beta_{13}-a_3^{(1)}\beta_{11})\Big]\beta_{21}\beta_{23}+$$

$$+\omega'^{(1)}_{3113}\Big(a_1^{(1)}\gamma_1^{(1)}-a_3^{(1)}\gamma_3^{(1)}\Big)\Big[\omega'^{(2)}_{3113}\omega'^{(2)}_{1313}k\gamma_1^{(2)}\gamma_3^{(2)}(a_3^{(2)}\beta_{23}-a_1^{(2)}\beta_{21})+$$

$$+\omega'^{(2)}_{1313}\omega'^{(2)}_{1133}k^2(\gamma_1^{(2)}\beta_{23}-\gamma_3^{(2)}\beta_{21})+\omega'^{(2)}_{3113}\omega'^{(2)}_{3333}a_1^{(2)}a_3^{(2)}(\gamma_3^{(2)}\beta_{23}-\gamma_1^{(2)}\beta_{21})+$$

$$+\omega'^{(2)}_{1313}\omega'^{(2)}_{3333}k(a_1^{(2)}\beta_{23}-a_3^{(2)}\beta_{21})\Big]\beta_{11}\beta_{13}=0. \tag{8}$$

У виразі (8) введено таке позначення:

$$\beta_{jn}=\operatorname{tg}a_n^{(j)}\frac{h'^{(1)}}{2}\qquad (j=1,2;\ n=1,3). \tag{9}$$

Перейдемо до довгохвильового наближення. Замінюючи в (8) $\operatorname{tg}x$ на x, отримаємо

$$\Big(\omega'^{(2)}_{1111}-\rho'^{(2)}C^2_{ly_1}\Big)\Big[\omega'^{(1)\,2}_{1133}-\omega'^{(1)}_{3333}(\omega'^{(1)}_{1111}-\rho'^{(1)}C^2_{ly_1})\Big]m+$$

$$+\Big(\omega'^{(1)}_{1111}-\rho'^{(1)}C^2_{ly_1}\Big)\Big[\omega'^{(2)\,2}_{1133}-\omega'^{(2)}_{3333}(\omega'^{(2)}_{1111}-\rho'^{(2)}C^2_{ly_1})\Big]=0, \tag{10}$$

де $C_{ly_1}=\omega/k$ — швидкість квазіпоздовжньої хвилі, яка поширюється в напрямку осі oy_1; $m=h'^{(2)}/h'^{(1)}$ — відношення товщини другого шару до товщини першого.

З виразу (10) випливає, що для квазіпоздовжньої хвилі існує дві швидкості поширення. При малих m, або, що те саме, при $h'^{(2)}\to 0$ маємо:

$$C^2_{ly_1,1}=\rho'^{(1)\,-1}\omega'^{(1)}_{1111},\qquad C^2_{ly_1,2}=\rho'^{(2)\,-1}\Big(\omega'^{(2)}_{1111}-\omega'^{(2)\,2}_{1133}\,\omega'^{(2)\,-1}_{3333}\Big). \tag{11}$$

Для великих m ($h'^{(1)}\to 0$) одержуємо

$$C^2_{ly_1,1}=\rho'^{(2)\,-1}\omega'^{(2)}_{1111},\qquad C^2_{ly_1,2}=\rho'^{(1)\,-1}\Big(\omega'^{(1)}_{1111}-\omega'^{(1)\,2}_{1133}\,\omega'^{(1)\,-1}_{3333}\Big). \tag{12}$$

Зауважимо, що у формулах (11) та (12) перші вирази — це швидкості поздовжніх хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого та другого шарів. У подальшому планується провести більш детальне дослідження цього випадку поширення хвиль.

Квазіпоперечна хвиля. Для такої хвилі переміщення $u_1^{(j)}$ антисиметричні, а переміщення $u_3^{(j)}$ симетричні відносно середини відповідних шарів. У зв'язку з цим в (6) покладемо

$$B_1^{(j)}=B_2^{(j)},\qquad B_3^{(j)}=B_4^{(j)}. \tag{13}$$

Провівши такі самі перетворення, що й для квазіпоздовжньої хвилі, але з урахуванням співвідношень (13), отримаємо дисперсійне рівняння

$$\omega'^{(2)}_{3113}\Big(a_1^{(2)}\gamma_1^{(2)}-a_3^{(2)}\gamma_3^{(2)}\Big)\Big[\omega'^{(1)}_{3113}\omega'^{(1)}_{1313}k\gamma_1^{(1)}\gamma_3^{(1)}(a_1^{(1)}\beta_{13}-a_3^{(1)}\beta_{11})+$$

$$+ \omega'^{(1)}_{1313}\omega'^{(1)}_{1133}k^2(\gamma_3^{(1)}\beta_{13} - \gamma_1^{(1)}\beta_{11}) + \omega'^{(1)}_{3113}\omega'^{(1)}_{3333}a_1^{(1)}a_3^{(1)}(\gamma_1^{(1)}\beta_{13} - \gamma_3^{(1)}\beta_{11}) +$$

$$+ \omega'^{(1)}_{1313}\omega'^{(1)}_{3333}k(a_3^{(1)}\beta_{13} - a_1^{(1)}\beta_{11})\Big] +$$

$$+ \omega'^{(1)}_{3113}\left(a_1^{(1)}\gamma_1^{(1)} - a_3^{(1)}\gamma_3^{(1)}\right)\Big[\omega'^{(2)}_{3113}\omega'^{(2)}_{1313}k\gamma_1^{(2)}\gamma_3^{(2)}(a_1^{(2)}\beta_{23} - a_3^{(2)}\beta_{21}) +$$

$$+\omega'^{(2)}_{1313}\omega'^{(2)}_{1133}k^2(\gamma_3^{(2)}\beta_{23} - \gamma_1^{(2)}\beta_{21}) + \omega'^{(2)}_{3113}\omega'^{(2)}_{3333}a_1^{(2)}a_3^{(2)}(\gamma_1^{(2)}\beta_{23} - \gamma_3^{(2)}\beta_{21}) +$$

$$+ \omega'^{(2)}_{1313}\omega'^{(2)}_{3333}k(a_3^{(2)}\beta_{23} - a_1^{(2)}\beta_{21})\Big] = 0. \tag{14}$$

Перейдемо до довгохвильового наближення. Обмежуючись одночленною апроксимацією, з (14) отримаємо

$$C^2_{1Sy_3} = \left(\rho'^{(1)}h'^{(1)} + \rho'^{(2)}h'^{(2)}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left[(\omega'^{(1)}_{1331} - \omega'^{(1)}_{3113}{}^{-1}\omega'^{(1)}_{1313}{}^{2})h'^{(1)} + (\omega'^{(2)}_{1331} - \omega'^{(2)}_{3113}{}^{-1}\omega'^{(2)}_{1313}{}^{2})h'^{(2)}\right], \tag{15}$$

де $C_{1Sy_3} = \omega/k$ — швидкість квазіпоперечної хвилі, яка поширюється в напрямку осі oy_1 і поляризована в площині y_1oy_3.

Відзначимо, що в результаті проведення цих же досліджень в лінійній постановці (без початкових напружень), аналогічно роботі [4], встановлено, що при довгохвильовому наближенні дисперсійного рівняння для квазіпоперечної хвилі необхідно враховувати кубічні члени при розкладі тангенсів.

Хвиля, поляризована в площині $\boldsymbol{y_1oy_2}$. Чисто поперечна (зсувна) хвиля вздовж осі oy_1. В цьому випадку $u_2^{(j)} \neq 0$, $u_1^{(j)} \equiv 0$, $u_3^{(j)} \equiv 0$. За аналогією з (6), розв'язок системи (1) подамо у вигляді [3]

$$u_2^{(j)(0)} = A^{(j)}e^{ia^{(j)}y_3}. \tag{16}$$

Дисперсійне рівняння запишемо

$$\sin a^{(1)}h'^{(1)} \sin a^{(2)}h'^{(2)} = 0, \tag{17}$$

звідки випливає, що взаємодії між шарами немає, і вони ковзають один по одному при поширенні хвиль. Оскільки граничні умови зводяться до рівності дотичних напружень нулеві на обох поверхнях шарів, то в кожному з шарів хвиля поширюється, незалежно від інших. Тому результати досліджень в цьому випадку збігаються з результатами поширення SH-хвиль в шарі з початковими напруженнями, дослідження яких проводилося в роботах [3, 5]. Щоб розглянути симетричні та несиметричні SH-хвилі, аналогічно до вказаних робіт, потрібно розв'язок (16) записати відносно середини кожного з шарів, і для симетричних хвиль прийняти умови (13), а для несиметричних — (7).

Таким чином, в даній роботі досліджено поширення плоских пружних хвиль в композитних шаруватих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадки поширення хвиль перпендикулярно до шарів та вздовж шарів. При поширенні вздовж шарів отримані дисперсійні рівняння для квазіпоздовжніх, квазіпоперечних та чисто зсувних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

1. *Гузь А. Н., Ле Минь Кхань.* Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 1. – С. 3–11.
2. *Ле Минь Кхань.* Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями // Там же. – 1977. – **13**, № 9. – С. 21–26.
3. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальними (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
4. *Рытов С. М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. – 1956. – **2**, № 1(68). – С. 71–83.
5. *Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 104 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.04.2009

O. M. Panasiuk

On the propagation of waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at a slipping of layers

The propagation of plane elastic waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at a slipping of layers is investigated. The cases of the propagation perpendicularly to layers and along layers are considered. The dispersion equations for quasilongitudinal, quasitransversal, and SH-waves and their long-wave approximation for the propagation along layers are obtained.