

Член-кореспондент НАН України Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський

## Оптимальне керування нагріванням прямокутної термочутливої області за обмежень на напруження у пластичній зоні

*Запропоновано числовий алгоритм розв'язання двовимірної задачі оптимального керування нагріванням довгого прямокутного паралелепіпеда за умов пружнопластичного деформування матеріалу. Визначено керування (температуру нагрівального середовища), яке за мінімальний час переводить тіло з початкового теплового стану у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою.*

Значна частина сучасних технологічних процесів виготовлення та експлуатації елементів конструкцій, зокрема у металургійній та машинобудівній галузях промисловості, передбачає їх термічну обробку. З точки зору зменшення енергетичних затрат таких процесів актуальною є проблема мінімізації часу нагрівання чи охолодження виробу [1–3]. Для забезпечення відповідних міцнісних характеристик і функціональних властивостей елементів конструкцій при визначенні режимів їх найшвидшого нагрівання (охолодження) потрібно враховувати низку обмежень на параметри теплового і напружено-деформованого станів [1–5]. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла, то важливим є врахування також залежності фізико-механічних властивостей матеріалу від температури та його пружнопластичного деформування [6].

У цій роботі для випадку пружнопластичного деформування матеріалу сформульована математична постановка і розроблено алгоритм числової побудови розв'язку двовимірної задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням довгого термочутливого прямокутного паралелепіпеда за обмежень на керування і максимальну величину інтенсивності дотичних термонапружень. Одновимірні задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми за обмежень на інтенсивність напружень розглянуто у роботі [7].

**1. Постановка задачі оптимізації.** Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження довгий ізотропний однорідний термочутливий прямокутний паралелепіпед, який перебуває за умов плоскої деформації [6]. Нехай нестационарне температурне поле тіла  $T(x, y, \tau)$  задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c_V \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad ((x, y) \in D, \tau > 0) \quad (1)$$

і крайові умови

$$\lambda \frac{\partial T(\pm 1, y, \tau)}{\partial x} \mp H_1^\pm (T(\pm 1, y, \tau) - t_1^\pm(y, \tau)) = 0 \quad (y \in [-a, a], \tau > 0), \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x, \pm a, \tau)}{\partial y} \mp H_2^\pm (T(x, \pm a, \tau) - t_2^\pm(x, \tau)) = 0 \quad (x \in [-1, 1], \tau > 0), \quad (3)$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{D}). \quad (4)$$

Тут  $\lambda = \lambda^*(T)/\lambda_0$ ,  $c_V = c_V^*(T)/c_V^0$  — безрозмірні коефіцієнт теплопровідності та питома об'ємна теплоємність, відповідно;  $\lambda^*(T)$ ,  $c_V^*(T)$  — залежні від температури коефіцієнт теплопровідності та питома об'ємна теплоємність;  $\lambda_0$ ,  $c_V^0$  — деякі сталі значення цих величин;  $x = x_*/h$ ,  $y = y_*/h$  — безрозмірні декартові координати;  $\tau = \lambda_0 \tau_*/(c_V^0 h^2)$  — безрозмірний час;  $x_* \in [-h, h]$ ,  $y_* \in [-l, l]$ ;  $\tau_*$  — декартові координати і час;  $a = l/h$ ;  $H_i^\pm(T) = \alpha_i^\pm \pm(T)h/\lambda_0$  ( $i = 1, 2$ ) — безрозмірні коефіцієнти теплообміну;  $\alpha_i^\pm(T)$  ( $i = 1, 2$ ) — коефіцієнти теплообміну;  $t_1^\pm(y, \tau)$ ,  $t_2^\pm(x, \tau)$  ( $i = 1, 2$ ) — температури оточуючих середовищ;  $T_0(x, y)$  — початковий розподіл температури;  $\bar{D} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-a, a]\}$  — поперечний переріз паралелепіпеда;  $D = \{(x, y) \in (-1, 1) \times (-a, a)\}$ .

Процес термопружнопластичного деформування матеріалу, зумовлений нестационарним температурним полем  $T(x, y, \tau)$ , розглядаємо в межах теорії неізотермічних процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини [6]. Теплофізичні і механічні характеристики матеріалу приймаємо функціями від температури.

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування  $u(y, \tau)$  (або  $v(x, \tau)$ ) — температури нагрівального середовища  $t_1^\pm(y, \tau)$  (або  $t_2^\pm(x, \tau)$ ) чи теплового потоку на одній із граничних поверхонь області, яке, задовольняючи умову

$$U_1(y, \tau) \leq u(y, \tau) \leq U_2(y, \tau) \quad (y \in [-a, a], \tau > 0) \quad (5)$$

або

$$V_1(x, \tau) \leq v(x, \tau) \leq V_2(x, \tau) \quad (x \in [-1, 1], \tau > 0) \quad (6)$$

та обмеження на величину інтенсивності дотичних напружень

$$\max_{(x,y) \in \bar{D}} S(T) \leq S_*(T), \quad (7)$$

за мінімальний час  $\tau_0 = \min \tau$  забезпечить нагрівання тіла з початкового стану (4) у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою

$$\frac{1}{4a} \int_{-a}^a \int_{-1}^1 T(x, y, \tau_0) dx dy = T_*. \quad (8)$$

Тут  $U_i$ ,  $V_i$  — відповідно нижня ( $i = 1$ ) та верхня ( $i = 2$ ) границі обмеження на функцію керування;  $S = (s_{ij} s_{ij}/2)^{1/2}$  — інтенсивність дотичних напружень;  $s_{ij}$  — компоненти девіатора напружень;  $S_*(T)$  — гранично допустиме значення інтенсивності дотичних напружень.

При побудові розв'язку сформульованої задачі оптимізації припускається керованість розглядуваного процесу, тобто вважається, що умови теплового навантаження і обмеження є такими, що можливим є досягнення кінцевої мети нагрівання (8).

**2. Побудова розв'язку задачі.** Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації скористаємося методом, запропонованим у роботах [2, 7]. Згідно з ним, оптимальне за швидкістю керування приймаємо рівним гранично допустимому обмеженню

$$u(y, \tau) = U_2(y, \tau) \quad y \in [-a, a], \quad (v(x, \tau) = V_2(x, \tau) \quad x \in [-1, 1]) \quad (9)$$

або таким, що забезпечує виконання рівності

$$\max_{(x,y) \in \bar{D}} S(T) = S_*(T). \quad (10)$$

Це означає, що найшвидше нагрівання тіла за обмежень (5) (або (6)) та (7) здійснюється по верхній межі одного із обмежень. Через це розв'язання задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням тіла проводимо поетапно.

**Етап 1.** На першому етапі припускаємо, що початковий розподіл температури  $T_0(x, y)$  задовольняє умову (7) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності за умови (9). Якщо в процесі нагрівання тіла за законом (9) умова (7) завжди виконується, то оптимальне за швидкодією керування визначаємо із умови (9) до моменту досягнення кінцевої мети нагрівання (8).

Оскільки задача теплопровідності (1)–(4) є нелінійною, то її розв'язок визначаємо числово за допомогою методу скінченних елементів [8]. Варіаційне рівняння теплопровідності, еквівалентне задачі (1)–(4), матиме вигляд

$$\delta I_D(T) = 0. \quad (11)$$

Вигляд функціоналу  $I_D(T)$  наведено у роботі [6].

Згідно з методом скінченних елементів, область зміни просторових координат  $\bar{D}$  апроксимуємо двовимірними скінченними елементами, а температурне поле подаємо у вигляді

$$T(x, y, \tau) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J T_{ij}(\tau) \varphi_i(x) \varphi_j(y), \quad (12)$$

де  $T_{ij}(\tau)$  — невідомі значення температури у вузлових точках заданого розбиття області на скінченні елементи;  $\varphi_i(x) \varphi_j(y)$  — базисні функції з локальним носієм [8].

Внаслідок представлення (12) функціонал  $I_D(T)$  залежатиме від дискретних значень вузлових температур  $T_{ij}$ , а варіаційне рівняння (11) зведеться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}(\tau)}{d\tau} + \mathbf{R}\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{F}, \quad (13)$$

де  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  — відповідно матриці теплоємності та теплопровідності;  $\mathbf{F}$  — вектор правих частин ключової системи рівнянь;  $\mathbf{T}$  — вектор вузлових температур [6].

Неявна різницева схема [6, 9] системи диференціальних рівнянь (13) матиме вигляд

$$\left( \mathbf{R} + \frac{1}{\Delta\tau} \mathbf{C} \right) \mathbf{T}_m = \frac{1}{\Delta\tau} \mathbf{C} \mathbf{T}_{m-1} + \mathbf{F}_m, \quad (14)$$

де  $\mathbf{T}_{m-1}$ ,  $\mathbf{T}_m$ ,  $\mathbf{F}_m$  — вектори відповідних вузлових величин для моментів часу  $\tau_{m-1}$  і  $\tau_m$ .

Матриці  $\mathbf{C}$  і  $\mathbf{R}$  будуть блочними і тридіагональними. Це дозволяє застосувати до розв'язання отриманої системи рівнянь ефективні ітераційні методи [9]. Ітераційний процес розв'язання задачі теплопровідності завершується, коли два послідовні наближення температури у кожній вузловій точці розбиття області  $\bar{D}$  збігаються з наперед заданою точністю.

Нелінійну задачу термопластичності лінеаризуємо методом додаткових деформацій [6]. З цією метою, аналогічно до задачі теплопровідності, процес деформування елементів тіла розбиваємо на ряд малих етапів за часом. Інтегруючи відповідні фізичні співвідношення вздовж усього шляху деформування і підсумовуючи при цьому прирости пластичних деформацій за етап, побудову розв'язку задачі термопластичності зводимо до розв'язання

на кожному етапі навантаження послідовності задач термопружності для однорідного ізотропного тіла з додатковими деформаціями, що враховують як пластичне деформування матеріалу, так і залежність механічних характеристик від температури.

Розв'язок задачі термопружності для прямокутної області будемо методом, що передбачає зведення вихідної задачі до інтегро-диференціальних рівнянь [10].

**Етап 2.** В момент часу  $\tau = \tau_k$ , коли максимальне значення інтенсивності дотичних напружень перевищує гранично допустиме, здійснюємо перехід на керування, яке забезпечує виконання умови (10). Ця умова служить умовою спряження температурних режимів, визначених на першому та другому етапах керування, і використовується для визначення часу перемикавання  $\tau_k$ . Отже, починаючи з моменту часу  $\tau_k$ , переходимо до розв'язання оберненої задачі термопластичності: за заданим допустимим значенням інтенсивності дотичних напружень  $S_*(T)$  в пластичній області деформування матеріалу визначаємо відповідну теплову дію — функцію керування  $u(y, \tau)$  або  $v(x, \tau)$ .

Для визначення керування дискретний аналог двовимірної задачі теплопровідності (14) з невідомою тепер, крім температури, функцією  $u(y, \tau)$  або  $v(x, \tau)$ , доповнюємо умовою (10), яка замикає цю систему рівнянь. Умову (10) записуємо через розподіл температури і додаткових деформацій на основі розв'язку задачі термопружності з додатковими деформаціями.

Невідомий в момент часу  $\tau = \tau_k$  розподіл пластичної деформації в умові (10), а, отже, і керування визначаємо методом послідовних наближень. За початкове наближення для розрахунку пластичних деформацій  $(\varepsilon_{ij}^{(p)})^{(k)}$  у момент часу  $\tau = \tau_k$  приймаємо їх розподіл у попередній момент часу  $\tau = \tau_{k-1}$ . Потім визначаємо початкове наближення додаткових деформацій і розв'язуємо розширену систему рівнянь (14), (10), тобто визначаємо початкові наближення функції керування і температурного поля у прямокутній області. За знайденим наближенням функції керування на основі розв'язку прямої задачі термопластичності визначаємо перше наближення розподілу пластичних і додаткових деформацій у момент часу  $\tau = \tau_k$ . У результаті розв'язання оберненої задачі за знайденим наближенням додаткових деформацій визначаємо нове наближення функції керування і температурного режиму. Процес послідовних наближень для моменту часу  $\tau = \tau_k$  продовжуємо до збігу з наперед заданою точністю двох послідовних наближень керування.

При досягненні функцією керування гранично допустимого значення в усій області її визначення здійснюємо перехід на перший етап алгоритму розв'язання задачі керування. З умови (9) визначаємо момент перемикавання керування. Обчислення припиняємо при досягненні кінцевої мети нагрівання.

**3. Числовий приклад.** Розглянемо задачу оптимального за швидкістю керування нагріванням квадратної області  $0,05 \times 0,05 \text{ м}^2$ , виготовленої із сталі ЕІ-395, теплофізичні і механічні характеристики якої наведено у роботі [6]. Вважаємо, що нагрівання теплоізольованої по поверхнях  $x = -1$  і  $y = \pm a$  квадратної області здійснюється через поверхню  $x = 1$  оточуючим середовищем, температуру якого  $t_1^+(y, \tau)$  вибираємо за функцією керування. При цьому приймаємо, що  $H_1^+ = 1$ ;  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  і  $U_2(y, \tau) = \varphi(\tau)(1 - y^2/a^2)$ , де  $\varphi(\tau)$  — функція часу, закон зміни якої зображено на рис. 1 штриховою лінією 3. Штриховими лініями 1 і 2 на цьому рисунку зображено характер поведінки величин  $\bar{S} = S\sqrt{3}$  і  $T$  у максимально навантаженої точці тіла  $M(1, 0)$ , коли  $t_1^+(y, \tau) = U_2(y, \tau)$  протягом усього процесу нагрівання. Поведінку в часі оптимального керування при  $S_*(T) = 400/\sqrt{3} \text{ МПа}$  і  $T_* = 55 \text{ }^\circ\text{C}$  зображено на рис. 1 суцільною лінією 3. Суцільними лініями 1, 2 на рисунку

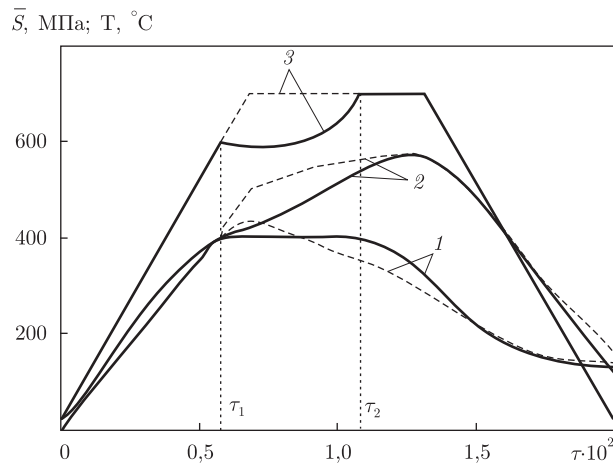


Рис. 1. Поведінка за часом інтенсивності напружень (крива 1), температури (крива 2) та оптимального керування (крива 3) у максимально навантаженій точці  $M(1, 0)$  квадратної області

зображено поведінку величин  $\bar{S}$  і  $T$  у точці  $M(1, 0)$  при реалізації знайденого оптимального режиму нагрівання області. Як видно із рисунка, оптимальне керування складається з трьох етапів. На першому  $[0, \tau_1]$  і третьому  $[\tau_2, \tau_0]$  етапах воно дорівнює гранично допустимому, а на другому  $[\tau_1, \tau_2]$  — забезпечує виконання умови (10).

За результатами проведених розрахунків було побудовано у двовимірному просторі Ільюшина [6] траєкторії деформування максимально навантаженої точки області. Оцінка радіусів кривини побудованих траєкторій підтвердила правомірність використання для розрахунку напружено-деформованого стану співвідношень теорії процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

*Дослідження виконані в рамках спільного проекту НАН України і РФФД (проект 0108U006250).*

1. Mahapatra D. B. Time optimal control on linear diffusion systems by a spatial discretization procedure // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1977. – **22**, No 3. – P. 481–482.
2. Вигаж В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
3. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – Москва: Металлургия, 1993. – 279 с.
4. Nyashin Y., Kiryukhin V., Ziegler F. Control of thermal stresses and strain // J. of Thermal Stresses. – 2000. – **23**. – P. 309–326.
5. Ashida F., Tauchert T. R. Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk // Ibid. – 2002. – **25**. – P. 99–121.
6. Шевченко Ю. Н., Савченко В. Г. Термовязкопластичность. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-ти т. Т. 2).
7. Vihak V. M., Yasinskii A. V., Yuzvyak M. Y. Optimal control of the heating of thermosensitive canonical bodies with constraints on the stress in the plastic zone // Intern. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No 12. – P. 997–1003.
8. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986. – 319 с.
9. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – Москва: Наука, 1989. – 606 с.
10. Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain // J. of Thermal Stresses. – 1998. – **21**. – P. 545–561.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

*Надійшло до редакції 21.05.2009*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **R. M. Kushnir, A. V. Yasinsky**

**Optimal control over the heating of a thermosensitive rectangular domain under restrictions of stresses in a plastic zone**

*A numerical algorithm for solving the two-dimensional problem of the optimal control over the heating of a long rectangular parallelepiped under an elastoplastic deformation of the material has been proposed. The control (temperature of the heating medium) changing the initial thermal state of the body to the final one characterized by a given average integral temperature has been determined.*