УДК 519.6

О. М. Литвин, О. В. Ткаченко

Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Отримано загальний метод побудови явних аналітичних формул для поліноміальних базисних сплайнів на нерівномірній сітці вузлів.

Актуальність теми. Використання B-сплайнів вищих порядків для побудови операторів інтерполяції та апроксимації функцій, заданих таблицею значень, є одним з ефективних методів наближення функцій сплайнами. Але використання для цього класичних B-сплайнів n-го степеня ($n = 2, 3, \ldots$), заданих на рівномірній сітці вузлів рекурентними формулами ($N_k(t)$ — сплайн степеня $k-1$)

$$N_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} N_{k-1}(t)N_1(x-t)\,dt, \qquad k = 2, 3, \ldots;$$

$$N_1(t) = 1, \qquad 0 \leqslant t < 1; \qquad N_1(t) = 0, \qquad t < 0, \qquad t \geqslant 1,$$

має ряд недоліків. Пояснимо їх на прикладі задачі інтерполювання невідомої функції $f(x)$, заданої таблицею експериментальних даних (X_k, Y_k), $Y_k = f(X_k)$, $0 = X_0 < X_1 < \cdots < X_Q = 1$, $k = \overline{1,Q}$. Для спрощення припустимо, що інтерполяційний сплайн будуємо за допомогою B-сплайна 2-го степеня

$$N_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} N_2(t)N_1(x-1)\,dt = \frac{1}{2}\begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ x^2, & x \in (0,1],\\ -2x^2+6x-3, & x \in (1,2],\\ (x-3)^2, & x \in (2,3),\\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases} \tag{1}$$

у вигляді:

$$S(X,Y,x) = \sum_{j=0}^{Q+2} c_j N_3(Qx - j + 2). \tag{2}$$

Як видно з (1), базисний сплайн $N_3(x)$ має вузли $x = 0, 1, 2, 3$. В цих точках друга похідна $\dfrac{d^2}{dx^2}N_3(x)$ має розриви першого роду. Тому функція $N_3(Q_x)$ має вузли в точках $Qx = k$, $k = 0, 1, 2, 3$, тобто в точках $x_k = k/Q$, $k = 0, 1, 2, 3$; $Q \geqslant 3$ і функція $N_3(Q(x - p/Q)) = N_3(Qx - p)$, $0 \leqslant p \leqslant Q$ має вузли в точках $x_k = (k+p)/Q$, $k = 0, 1, 2, 3$; $0 \leqslant k + p \leqslant Q$.

Тому, якщо система експериментальних даних (X_p, Y_p), $0 \leqslant p \leqslant Q$ задана на рівномірній сітці вузлів $X_p = p/Q$, $0 \leqslant p \leqslant Q$, то для знаходження невідомих C_j, $0 \leqslant j \leqslant Q+2$ у формулі (2) отримаємо СЛАР

$$\sum_{j=0}^{Q+2} c_j N_3(QX_p - j + 2) = Y_p, \qquad 0 \leqslant p \leqslant Q, \tag{3а}$$

до якої слід додати дві граничні умови

$$\sum_{j=0}^{Q+2} c_j N_3'(QX_p - j + 2) = Y_p', \qquad p = 0, Q. \tag{3б}$$

Враховуючи, що

$$N_3(QX_p - j + 2) = N_3(p - j + 2),$$

$$N_3(0) = 0, \qquad N_3(1) = \frac{1}{2}, \qquad N_3(2) = \frac{1}{2}, \qquad N_3(3) = 0;$$

$$N_3'(0) = 0, \qquad N_3'(1) = 1, \qquad N_3'(2) = -1, \qquad N_3'(3) = 0,$$

можна зробити висновок, що елементи $a_{p,j} = N_3(p - j + 2)$ матриці системи (3а) не треба обчислювати. Але у випадку $X_p \neq p/Q$, $0 \leqslant p \leqslant Q$ для формування матриці системи потрібно обчислювати значення $N_3(QX_p - j + 2)$.

Таким чином, по-перше, перевага сплайнів, вузли яких збігаються з вузлами інтерполяції, полягає у більш простій процедурі отримання коефіцієнтів C_j, $0 \leqslant j \leqslant Q+2$. По-друге, якщо для наближення використовуються базисні сплайни та їх похідні на рівномірній сітці вузлів, а точки інтерполяції $X_p \neq p/Q$, то між двома точками інтерполяції може змінюватись аналітичний вираз базисних сплайнів та їх похідних і, більш того, в цей інтервал може попасти навіть декілька доданків суми

$$\sum_{j=0}^{Q+2} c_j N_3(QX_p - j + 2),$$

що потребує детального дослідження похибки наближення.

Тобто, актуальною є задача побудови явних аналітичних виразів для базисних сплайнів n-го степеня ($n = 2, 3, \ldots$) дефекту r ($r = 1, 2, \ldots, n-1$).

Аналіз літературних джерел, присвячених поставленій задачі. Відзначимо, що при заданих числових значеннях вузлів базисного сплайна існують ефективні алгоритми їх побудови [1–8], які входять до програмних продуктів сучасних систем комп'ютерної математики Mathcad, Maple, Matlab. На жаль, їх використання у випадку необхідності отримання явних аналітичних виразів для параметрів базисних сплайнів залежно від координат сітки вузлів сплайна не є можливим.

Основні твердження. Описаний вище метод побудови B-сплайнів дозволяє ефективно будувати базисні сплайни лише для рівномірної сітки вузлів. В деяких задачах експериментальні дані отримані на нерівномірній сітці, тому використання базисних сплайнів з рівномірною сіткою може привести до небажаних результатів. Нижче викладемо ефективний метод побудови базисного сплайна n-го степеня на нерівномірній сітці вузлів.

Теорема 1. *Якщо* $-\infty < X_0 < X_1 < \dots < X_{n+1} < \infty$, $y_0 = 0$, $y_{n+1} = 0$, y_k, $k = \overline{1,n}$ — *невідомі сталі і функція* $SS_n(x, X, y)$ *визначається таким чином:*

$$SS_n^{(n-1)}(x, X, y) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} SS_n(x, X, y),$$

$$SS_n^{(n-1)}(x, X, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_0, \\ g_{n-1}(x, X, y), & X_{k-1} < x \leqslant X_k, \qquad k = \overline{1, n+1}, \\ 0, & x \geqslant X_{n+1}, \end{cases} \tag{4}$$

$$g_{n-1}(x, X, y) := y_{k-1} \frac{x - X_k}{X_{k-1} - X_k} + y_k \frac{x - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}},$$

$$SS_n^{(n-p)}(x, X, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_0, \\ \int\limits_{X_0}^{x} SS_n^{(n-p+1)}(t, X, y) dt, & p = \overline{2, n}, \\ 0, & x > X_{n+1}, \end{cases} \tag{5}$$

при умові

$$SS_n^{(n-p)}(X_{n+1}, X, y) = 0, \qquad p = \overline{2, n}. \tag{6}$$

Це однорідна система $n - 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Одну змінну, наприклад y_n, можна визначити з деякої додаткової умови нормування ($y_n = 1$ або $y_n = \left(\int\limits_{X_0}^{X_{n+1}} SS_n(x, X, y^*) dx \right)^{-1}$, $y^* = [0, y_1^*, \dots, y_{n-1}^*, 1, 0]^T$, вектор y^* є розв'язком системи (6) при $y_n = 1$). Тоді функція

$$SS_n(x, X, y^*) = SS_n^{(0)}(x, X, y^*)$$

задовольняє умову

$$SS_n(x, X, y^*) \in C^{n-1}(R).$$

При цьому функція

$$S_n(x, X) = SS_n(x, X, y^*) \left(\int\limits_{X_0}^{X_{n+1}} SS_n(t, X, y^*)\, dt \right)^{-1}$$

є базисним сплайном степеня n дефекту 1 з властивістю $\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_n(t, X, y)\, dt = 1$.

П р и к л а д 1. Базисний сплайн 2-го степеня дефекту 1 на довільній сітці вузлів $-\infty < X_0 < X_1 < X_2 < X_3 < \infty$ має вигляд:

$$S_2(x, X) = SS_2(x, X, y^*) \left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x, X, y^*)\, dt \right)^{-1};$$

$$SS_2(x,X,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_0, x \geqslant X_3, \\ \dfrac{(x-X_0)^2}{2(X_1-X_0)}y_1, & X_0 < x \leqslant X_1, \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2}y_1 + \dfrac{(x-X_2)^2}{2(X_1-X_2)}y_1 + \dfrac{(x-X_1)^2}{2(X_2-X_1)}y_2, & X_1 < x \leqslant X_2, \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2}y_1 + \dfrac{(X_3-X_1)^2}{2}y_2 + \dfrac{(x-X_3)^2}{2(X_2-X_3)}y_2, & X_2 < x \leqslant X_3. \end{cases}$$

З умови $SS_2(X_3, X, y) = 0$ отримуємо

$$y_2 = -\frac{(X_2 - X_0)}{(X_3 - X_1)}y_1.$$

Якщо

$$y_1 = \left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x, X, y^*)\, dx\right)^{-1},$$

то, очевидно, отримана формула

$$S_2(x,X) = SS_2(x,X,y^*)\left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y^*)\, dx\right)^{-1}$$

задовольняє умову:

$$\int\limits_{X_0}^{X_3} S_2(x,X)\, dx = 1.$$

П р и к л а д 2. У нормованому сплайні 3-го степеня $S_3(x,X) \in C^2(R)$,

$$S_3(x,X) = SS_3(x,X,y^*)\left(\int\limits_{X_0}^{X_4} SS_3(x,X,y^*)\, dx\right)^{-1},$$

невідомі y_1, y_2, y_3 знаходимо з умов:

$$S_3(X_4, X, y) = 0; \qquad \frac{d}{dx}S_3(x,X,y)\bigg|_{x=X_4} = 0.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд:

$$y_1 = \frac{(X_4 - X_1)(X_4 - X_2)}{(X_3 - X_0)(X_2 - X_0)}y_3;$$

$$y_2 = \frac{(X_4 - X_2)(X_0 + X_1 - X_3 - X_4)}{(X_3 - X_0)(X_3 - X_1)}y_3.$$

Введемо також позначення $S_3(x,X) = SS_3(x,X,y^*)$. Тоді для шуканого сплайна отримаємо (7).

Таким чином, у роботі запропоновано загальний метод побудови явних аналітичних формул для поліноміальних базисних сплайнів на нерівномірній сітці вузлів. Для частинних випадків $n = 2, 3$ наведені явні вирази для цих сплайнів. Ці результати планується використати для наближення реальних кривих, заданих таблицями даних,

$$S_3(x) = \begin{cases} 0, \qquad x \leqslant X_0, \\ \dfrac{y_1(x-X_0)^3}{6(X_1-X_0)}, \qquad X_0 < x \leqslant X_1, \\ \dfrac{y_1}{6}(X_1-X_0)^2 + \dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)(x-X_1) + \\ \qquad + \dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(\dfrac{(x-X_2)^3-(X_1-X_2)^3}{3} - (X_1-X_2)^2(x-X_1)\right) + \\ \qquad + \dfrac{(x-X_1)^3}{X_2-X_1}\dfrac{y_2}{6}, \qquad X_1 < x \leqslant X_2, \\ \dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3} + (X_2-X_1)\right) + \\ \qquad + \dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3} + (X_1-X_2)^3\right) + \dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(x-X_2) + \\ \qquad + \dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\left(\dfrac{(x-X_3)^3-(X_2-X_3)^3}{3}\right) - \dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)} \times \\ \qquad\quad \times ((X_2-X_3)^2(x-X_2)) + \dfrac{(x-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6}, \qquad X_2 < x \leqslant X_3, \\ \dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3} + (X_2-X_1)\right) + \\ \qquad + \dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3} + (X_1-X_2)^3\right) + \dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(X_3-X_2) + \\ \qquad + \dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\left(\dfrac{-(X_2-X_3)^3}{3} - (X_2-X_3)^2(X_3-X_2)\right) + \\ \qquad + \dfrac{(X_3-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6} + \dfrac{y_1}{2}(X_2-X_0)(x-X_3) + \dfrac{y_2}{2}(X_3-X_1)(x-X_3) + \\ \qquad + \dfrac{y_3}{2}(X_3-X_2)(x-X_3) + \dfrac{y_3}{2(X_3-X_4)}\left(\dfrac{(x-X_4)^3-(X_3-X_4)^3}{3}\right) + \\ \qquad + \dfrac{y_3}{2(X_3-X_4)}((X_4-X_3)^2(x-X_3)), \qquad X_3 < x < X_4, \\ 0, \qquad x \geqslant X_4. \end{cases} \tag{7}$$

1. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – Москва: Радио и связь, 1985. – 304 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – Москва: Наука, 1983. – 352 с.
3. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
4. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1976. – 248 с.
5. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень. У 2-х ч. Ч. 1. – Київ: Вища шк., 1995. – 376 с.
6. *Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д.* Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 279 с.

7. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов в численном анализе. – Москва: Изд-во МГУ, 1979. – 100 с.
8. *Квасов Б. И.* Метод изогеометрической аппроксимации сплайнами. – Москва: НИЦ, 2006. – 416 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 17.02.2009

O. N. Lytvyn, A. W. Tkachenko

Mathematical modeling of processes by interpolating splines on a nonuniform grid of knots

A general method for the construction of explicit analytical formulas for polynomial basis splines on a nonuniform grid of knots is given.