УДК 517.956.4

Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин

Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)

Описано дії алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ на площині. Показано, що існують дві примітивні дії, які відповідають геометріям Лобачевського і де Сіттера, а також наведено класифікацію імпримітивних дій. Описано структури одновимірних геометричних величин та алгебри їх диференціальних інваріантів.

1. $\mathfrak{sl}_2$-геометрии. Напомним, что $\mathfrak{sl}_2$-геометрия на плоскости определяется транзитивным действием алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Поэтому, описание $\mathfrak{sl}_2$-геометрии эквивалентно описанию транзитивных представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в алгебре Ли гладких векторных полей на плоскости. Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ базис Шевалле A, B, H такой, что выполнены следующие коммутационные соотношения: $[A,B]=H$, $[H,A]=-2A$, $[H,B]=2B$. В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначения, мы не будем различать элементы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ с их образами при представлении.

Отметим, что из коммутационных соотношений вытекает, что если векторные поля A и B линейно зависимы, то и векторные поля A, B и H также линейно зависимы. В этом случае $\mathfrak{sl}_2$-действие является одномерным и классификация, по существу, совпадает с классификацией, приведенной в [1, 2]. Предполагая, что векторные поля A и B линейно независимы, выберем их за локальный базис в модуле векторных полей на плоскости. Пусть $H=aA+bB$ — разложение векторного поля H в этом базисе, где a, b — гладкие функции.

Теорема 1. *Каждое действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ на плоскости, при котором векторные поля A и B линейно независимы, локально эквивалентно одному из следующих.*

Примитивное действие*, $ab\neq 1$:*

$$A=(2-xy)\frac{\partial}{\partial x}-y^2\frac{\partial}{\partial y},\qquad B=x^2\frac{\partial}{\partial x}-(2-xy)\frac{\partial}{\partial y},\qquad H=2x\frac{\partial}{\partial x}-2y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1}$$

Импримитивное действие*, $ab=1$:*

$$\boldsymbol{T}:\qquad A=\partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,\quad B=x^2\partial_x-\frac{x^2\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,\quad H=x\partial_x-\frac{x\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y;$$

$$\boldsymbol{S}:\qquad A=\partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,\quad B=x^2\partial_x+\frac{2x-x^2\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,\quad H=x\partial_x+\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y;$$

$$\boldsymbol{R}:\qquad A=\partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,\quad B=x^2\partial_x+\frac{2x\beta-x^2\beta\varphi_x-e^{\varphi}}{\beta\varphi_y}\partial_y,\quad H=x\partial_x+\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_y}\partial_y,$$

где $\varphi=\varphi(x,y)$ — гладкая функция, $\varphi_y\neq 0$, а $\beta\in\mathbb{R}\setminus 0$ — константа.

Отметим, что первая часть теоремы, по существу, совпадает с классической теоремой Ли (см. [3–5]), а доказательство второй части аналогично данному в работе [5].

Представление вида (1) мы называем каноническим представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в векторных полях на плоскости. Отметим, что в действительности нормальная форма (1) содержит два неэквивалентных представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Одно из них отвечает случаю $xy > 1$, а другое — случаю $xy < 1$. Для доказательства их неэквивалентности заметим, что для представления (1) векторное пространство $\mathfrak{sl}_2$-инвариантных квадратичных дифференциальных форм одномерно и порождено следующей формой:

$$\Theta = \frac{y^2dx^2 - 2(xy-2)dxdy + x^2dy^2}{(xy-1)^2}.$$

Эта форма задает риманову структуру, если $xy > 1$, и псевдориманову структуру, если $xy < 1$. Рассмотрим преобразование $\mu_\pm\colon (x,y) \longrightarrow ((x^2 \pm y^2)/x, 1/x)$, где знак "+" выбирается в области $xy > 1$, а знак "−" — в области $xy < 1$. При этом преобразовании квадратичная форма Θ переходит в одну из следующих форм: $\mu_\pm^*(\Theta) = 4(dy^2 \pm dx^2)/y^2$. Тем самым геометрия, определяемая представлением (1), является геометрией Лобачевского, если $xy > 1$, или геометрией де Ситтера, если $xy < 1$. Отметим также, что пространство инвариантных дифференциальных 2-форм в обоих случаях также одномерно и порождено формой $\Omega = \dfrac{dx \wedge dy}{|xy-1|^{3/2}}$, при этом $\mu_\pm^*(\Omega) = \dfrac{dx \wedge dy}{y^2}$.

Отметим, что при преобразовании $\mu_\pm$ базисные векторные поля A, B, H переходят в следующие:

$$A = \partial_x, \qquad B = (x^2 \pm y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \qquad H = 2x\partial_x + 2y\partial_y, \tag{2}$$

где "+" выбирается в случае геометрии Лобачевского, а "−" — в случае геометрии де Ситтера. Эти два представления мы будем называть вторым каноническим представлением.

2. Геометрические величины. Рассмотрим однородные одномерные расслоения $\pi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,u) \mapsto (x,y)$, т. е. расслоения, в которые поднято действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим через $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$ соответствующие поднятия векторных полей A, B, H. Сечения таких расслоений мы называем геометрическими величинами.

Теорема 2. *Локально любое поднятие действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в расслоении π имеет вид*

$$\overline{A} = A + A(f)\partial_u, \qquad \overline{B} = B + (B(f) + h)\partial_u, \qquad \overline{H} = H + H(f)\partial_u,$$

где f — произвольная функция, а функция h зависит от представления ρ. Так, $h = F(u-f)\sqrt{|xy-1|}/y$ для первого канонического представления и $h = F(u-f)y$ для второго канонического представления. Здесь F — произвольная гладкая функция.

Отметим, что классификация одномерных геометрических величин относительно группы автоморфизмов расслоения π основывается, как и в работе [1], на анализе одномерных векторных полей $h\partial_u$ и, по существу, совпадает с классификацией, приведенной в этой работе.

3. Алгебры дифференциальных инвариантов. Под дифференциальным инвариантом порядка $\leqslant k$ мы понимаем гладкую функцию, заданную на пространстве k-джетов расслоения геометрических величин π, которое инвариантно относительно продолженного действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Ниже мы приводим описание алгебр дифференциальных инвариантов для случая невырожденных ($ab \neq 1$) геометрий, т. е. для геометрий Лобачевского и де Ситтера. Отметим также, что действие алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ на пространстве геометрических величин, по существу, определяется функцией h. При этом если $h \neq 0$, то векторное поле $h\partial_u$ преобразованием $(x, y, u) \mapsto (x, y, U(x, y))$ локально можно привести к виду ∂_u. Ниже мы будем рассматривать случаи $h = 0$ или $h = 1$.

В случае геометрий Лобачевского и де Ситтера каждый дифференциальный инвариант f порождает два инвариантных дифференцирования

$$\nabla_f = y^2\left(\frac{df}{dx}\frac{d}{dx} \pm \frac{df}{dy}\frac{d}{dy}\right), \qquad \gamma_f = y^2\left(\frac{df}{dy}\frac{d}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d}{dy}\right).$$

Здесь и ниже мы используем координаты x, y второй канонической формы.

Отметим, что ограничения дифференцирований ∇_f и γ_f на график k-джета геометрической величины s совпадают с векторным полем градиента (относительно метрики g) функции f_s и, соответственно, с гамильтоновым векторным полем (относительно симплектической структуры Ω), отвечающим гамильтониану f_s.

Эти дифференцирования определяют две дополнительные структуры в алгебре дифференциальных инвариантов, задаваемые скобками: $(f_1, f_2) = \nabla_{f_1}(f_2)$, $[f_1, f_2] = \gamma_{f_1}(f_2)$. Относительно второй скобки алгебра дифференциальных инвариантов является пуассоновой алгеброй, при этом порядок дифференциального инварианта $[f_1, f_2]$, как правило, больше порядков f_1 и f_2.

Отметим также, что имеется инвариантный дифференциальный оператор второго порядка. А именно, оператор Лапласа, построенный по метрике g:

$$\Delta = -y^2\left(\frac{d^2}{dx^2} \pm \frac{d^2}{dy^2}\right).$$

Теорема 3. *В окрестности регулярных орбит алгебра дифференциальных инвариантов для геометрий Лобачевского и де Ситтера порождена:*

в случае $h = 0$ дифференциальным инвариантом нулевого порядка $J_0 = u$ и дифференциальным инвариантом второго порядка $J_2 = \triangle(u) = y^2(u_{11} \pm u_{22})$, а также их всевозможными скобками;

в случае $h = 1$ дифференциальными инвариантами первого порядка

$$J_1 = (u_1 + {u_1}^2 y + {u_2}^2 y)y, \qquad J_2 = u + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + 2yu_1}{2yu_2}\right)$$

и дифференциальным инвариантом второго порядка $J_3 = y^2(u_{11} \pm u_{22})$, а также их всевозможными скобками.

1. *Коновенко Н. Г., Лычагин В. В.* Дифференциальные инварианты нестандартных проективных структур // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 10–13.
2. *Konovenko N.* Projective structures and algebras of their differential invariants // Acta Appl. Math. – DOI10.1007/s10440-009-9443-3.
3. *Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. J.* Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. – 1992. – **64**. – P. 339–368.
4. *Hermann R., Ackerman M.* Sophus Lie's 1880: Transformation Group Paper. – Brookline: Math. Sci. Press, 1975. – 271 p.
5. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen // Math. Ann. – 1880. – **16**. – S. 441–528.

Одесская национальная академия пищевых технологий
Поступило в редакцию 22.04.2009

N. G. Konovenko, V. V. Lychagin

Algebras of differential invariants for the Lobachevsky and de Sitter geometries

We classify $\mathfrak{sl}_2$-actions on the plane and show that there are two primitive actions which correspond to the Lobachevsky and de Sitter geometries. The detailed classification of imprimitive actions is given. We describe one-dimension geometrical quantities and find algebras of their differential invariants.