УДК 551.46.082

ВЛИЯНИЕ ГИДРОЛОГИИ СРЕДЫ НА РАБОТУ ФАЗОВЫХ ГИДРОЛОКАТОРОВ БОКОВОГО ОБЗОРА

© О.С. Голод, А.И. Гончар, Ю.А. Гончар, С.И. Донченко, Л.И. Шлычек, 2006

Государственный Северо-Западный технический университет, г. Санкт-Петербург

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины, г. Запорожье

У статті наведено оцінку впливу термоклину та флуктуацій швидкості течії на роботу бортового фазового гідролокатору бокового огляду.

В данной статье проведена оценка влияния термоклина и флюктуаций скорости течений на работу бортового фазового гидролокатора бокового обзора.

The influence evaluation of thermocline and current speed fluctuations on borne side scan sonar work carried out in this article.

На работу фазового гидролокатора бокового обзора (далее - ФГБО), антенна которого имеет небольшое заглубление, что характерно для бортовых систем, существенное влияние оказывает поверхность моря. Эхо-сигналы от толщи воды переотражаются поверхностью и поступают на приемные антенны ФГБО аддитивно с полезным сигналом, принимаемым в текущий момент времени от разрешаемой площадки дна. Поскольку радиус пространственной корреляции переотраженных поверхностью сигналов значительно больше размера базы приемной антенны, то эти сигналы являются источником коррелированной помехи, приводящей к появлению значительной систематической ошибки [1], величина и знак которой изменяются во времени.

Наличие термоклина приводит к появлению дополнительного источника коррелированной помехи – сигнала, отраженного от термоклина в направлении к поверхности. Для оценки интенсивности этой составляющей определим коэффициент отражения от слоя скачка скорости распространения звука в воде.

Используя результаты работ [2] и [3] запишем

$$\nabla^2\rho = \partial^2\rho/\partial t^2 = \nabla\rho\nabla p/\rho . \qquad (1)$$

В слоистой океанической среде и скорость распространения звука **c**, и плотность ρ обычно считают функцией только вертикальной координаты z, т.е. $c = c(z)$ и $\rho = \rho(z)$.

Совместим плоскость XZ с плоскостью падения монохроматической волны

$$P = Z^{1/z}(z)\Pi(z)\exp[i(k_x x - \omega t)],$$

где $Z(z) = \rho c/\cos\theta$ – акустический импеданс;

$\theta = \theta(z)$ – угол падения;

$k_x = \omega \sin\theta / c$ – горизонтальная проекция волнового вектора $\vec{k}$;

ω – круговая частота излученного сигнала.

Положив $\Pi(z) = \Phi|S|$, где $S = \int \cos\theta \, dz/c$, перепишем (1) в виде

$$\frac{d^2\Phi}{d\,S^2} + \left[\omega^2 - U(S)\right]\Phi = 0, \tag{2}$$

где

$$U(S) = \frac{1}{U} f^2 - df/2dS, \qquad f = g/\rho, \tag{3}$$

$g = dZ/dz$ – градиент импеданса.

Предположим, что в интервале –∞<z<+∞ имеется единственный слой скачка волновых параметров. Функцию **f** в слое зададим выражением

$$f = f_m / ch(S/T). \tag{4}$$

Параметры f_m и T связаны с граничными значениями функции z формулой

$$\pi f_m T = \ell n(z_1/z_0), \tag{5}$$

где $z_1 = z(\infty), z_0 = z(-\infty)$.

Соотношение (5) следует из дифференциального равенства

$$dz = gdz = fzdS.$$

Введем новую переменную

$$\tau = i sh(S/T). \tag{6}$$

Уравнение (2) для функции $\Phi(S) = \psi(\tau)$ в соответствии с (3), (4), (6) приобретает вид

$$\left(\tau^2 - 1\right)^2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \tau\left(\tau^2 - 1\right)\frac{d\psi}{d\tau} + \left(a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0\right)\psi = 0, \tag{7}$$

где $a_0 = \frac{1}{4} f_m^2 T^2 - \omega^2 T^2, \quad a_1 = -\frac{1}{2} f_m T, \quad a_2 = \omega^2 T^2$.

Уравнение (7) с помощью подстановки [2]

$$\psi(\tau) = (\tau+1)^{\mu}(\tau-1)^{\nu}\omega(\xi), \quad \xi = \frac{1}{2}(\tau+1), \tag{8}$$

при условии

$$4\nu(\nu-1) + 2\nu + a_0 + a_1 + a_2 = 0, \tag{9}$$

$$(\mu-\nu)[2(\mu+\nu)-1] = a_1,$$

сводится к гипергеометрическому

$$\xi(\xi-1)d^2\omega/d\xi^2 + [(2\mu+2\nu+1)\xi - 2\mu - (1/2)]d\omega/d\xi + \left[(\mu+\nu)^2 + a_2\right]\omega = 0.$$

Сравнивая последнее со стандартным видом

$$\xi(\xi-1)d^2\omega/d\xi^2 + [(\alpha+\beta+1)\xi - \gamma]d\omega/d\xi + \alpha\beta\omega = 0,$$

и используя (9), находим два набора параметров

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{4}f_m T, \quad \nu_1 = \overline{\mu_1}\alpha_1 = 1 + i\omega T, \quad \beta_1 = \overline{\alpha_2}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}Tf_m,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4}f_m T, \quad \nu_2 = \overline{\mu_2}, \quad \alpha_2 = i\omega T, \quad \beta_2 = \overline{\alpha_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}f_m T. \tag{10}$$

Чертой сверху обозначены комплексно сопряженные величины.

Общее решение гипергеометрического уравнения имеет при $(\xi) < 1$ следующий вид [3]

$$\omega(\xi) = c_1 F(\alpha, \beta; \gamma; \xi) + c_2 \xi^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma; 2-\gamma; \xi), \tag{11}$$

где F – гипергеометрическая функция, а c_1 и c_2 определяются из граничных условий.

Из выражения (8), используя второй набор параметров (10) и принимая во внимание (6), находим

$$\Phi(S) = \left[\frac{\operatorname{sh}(S/T) - i}{\operatorname{sh}(S/T) + i}\right]^{\frac{1}{4}f_m T} \omega\left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{sh}(S/T)\right]. \tag{12}$$

При нашем наборе параметров не возникает затруднений в описании волнового поля в случае скачка нулевой толщины, когда $\left|f_m\right| = 0 \cup T = \infty$. Из выражения (12) видно, что в этом случае поведение функции Φ определяется поведением решения гипергеометрического уравнения в окрестности бесконечно удаленной точки.

Для граничных значений из (12) следует

$$\Phi_0 \cong \tilde{\omega}\left(-\frac{i}{4}\ell^{-3/T}\right), \quad \Phi_1 \cong \omega\left(\frac{i}{4}\ell^{3/T}\right),$$

где ω – аналитическое продолжение решения (12) в окрестность точки $\xi = \infty$, которое легко осуществляется с помощью преобразования [4].

$$F(\alpha,\beta;\xi) = A_1(-\xi)^{-\alpha} F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;\xi^{-1}\right) + \\ + B_1(-\xi)^{-\beta} F\left(\beta,\beta+1-\gamma;\beta+1-\alpha;\xi^{-1}\right), \tag{13}$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где $\Gamma(\xi)$ – гамма-функция.

Применяя соотношение (13), легко находим

$$\Phi_0 \cong \left(\frac{i}{4}\right)^{-\alpha}\left[A_1C_1 + (-1)^{1-\gamma}A_2C_2\right]e^{\alpha S/T} + \left(\frac{i}{4}\right)^{-\beta}\left[B_1C_1 + (-1)^{1-\gamma}B_2C_2\right]e^{\beta S/T}, \tag{14}$$

$$\Phi_1 \cong \left(-\frac{i}{4}\right)^{-\alpha}\left[A_1C_1 + (-1)^{\gamma-1}A_2C_2\right]e^{-\alpha S/T} + \\ + \left(-\frac{i}{4}\right)^{-\beta}\left[B_1C_1 + (-1)^{\gamma-1}B_2C_2\right]e^{-\beta S/T}, \tag{15}$$

где

$$A_2 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\beta)}.$$

Первые слагаемые в формулах (14), (15) соответствуют, согласно (10), волнам, распространяющимся к слою скачка, а вторые, - идущим от слоя.

Потребуем, чтобы выражение (15) описывало волну, прошедшую слой, и задавалось следующими частными решениями гипергеометрического уравнения [4], справедливыми в окрестности точки $\xi = \infty$

$$\xi^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma; \beta+1-\alpha; \xi^{-1}\right) \cong \xi^{-\beta},$$

тогда

$$\Phi_1 = (i/4)^{-\beta} e^{-\beta S/T}. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), находим

$$C_1 = \frac{(-1)^{\beta+1} A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \qquad C_2 = \frac{(-1)^{\beta+1-\gamma} A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \tag{17}$$

Волновое поле теперь определено полностью.

Вычислим коэффициент отражения V от градиентного слоя.

Из (14) следует выражение

$$V = \frac{B_1 C_1 + (-1)^{1-\gamma} B_2 C_2}{A_1 C_1 + (-1)^{1-\gamma} A_2 C_2} \left(\frac{i}{4}\right)^{\alpha-\beta} = q(z_1 + z_0)^{-1}(q_1 z_1 - q_0 z_0) e^{-\pi\omega T}, \tag{18}$$

где

$$q = \Gamma\left[(1/2) + i\omega T\right] / \Gamma\left[(1/2) - i\omega T\right],$$

$$q_1 = \Gamma\left[(1/2) + (i/2) f_m T - i\omega T\right] / \Gamma\left[(1/2) + (i/2) f_m T + i\omega T\right],$$

$$q_0 = \Gamma\left[(1/2) - (i/2) f_m T + i\omega T\right].$$

При вычислении использовались соотношения (10), (17), формула

$$\Gamma(2\xi) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2\xi - 1/2} \Gamma(\xi) \Gamma\left[(1/2) + \xi\right],$$

и принято во внимание, что из-за множителя $-1 = e^{-i\pi/2} = ie^{-i\pi}$ в (15), следует в (18) положить $(-1) = e^{-i\pi/2}$.

Рассмотрим частные случаи, вытекающие из общего выражения (18). При вырождении слоя скачка в резкую границу двух однородных сред, когда $f_m=\infty$ и T=0, имеем обычную формулу Френеля

$$V=(z_1-z_0)(z_1+z_0)^{-1}.$$

При действительных f_m и T после несложных преобразований получим

$$V=\left(\theta z_1-\theta^{-1}z_0\right)(z_1+z_0)^{-1}\exp[-\pi\omega T-i\varphi(\omega)],$$

где

$$\theta=\left[\operatorname{ch}\left(\pi\omega T+\frac{1}{2}\pi f_m T\right)\Big/\operatorname{ch}\left(\pi\omega T-\frac{1}{2}\pi f_m T\right)\right]^{1/2},$$

$$\begin{gathered}\varphi(\omega)=2\arg\Gamma(i\omega T)+\arg\Gamma(2i\omega T+if_mT)+\arg\Gamma(2i\omega T-if_mT)-\\ -2\arg\Gamma(2i\omega T)-\arg\Gamma\left(i\omega T+\frac{1}{2}if_mT\right)-\arg\Gamma\left(i\omega T-\frac{1}{2}if_mT\right).\end{gathered}\tag{19}$$

Таким образом, в слое скачка при отражении имеет место амплитудно-фазовая модуляция и дополнительная временная задержка монохроматического сигнала, равная [5]

$$\begin{gathered}t_m=\partial\varphi/\partial\omega=T\operatorname{Re}\left[2\psi(i\omega T)+2\psi(2i\omega T++if_mT)+\right.\\ \left.+2\psi(2i\omega T-if_mT)-4\psi(i\omega T)-\psi\left(i\omega T+\frac{1}{2}if_mT\right)-\psi\left(i\omega T-\frac{1}{2}if_mT\right)\right],\end{gathered}\tag{20}$$

где $\psi(\xi)=d[\ell n\Gamma(\xi)]/d\xi$ – диаграмма-функция.

Выражения (19), (20) не изменяются при изменении знака у величины f_mT. Согласно (5) это означает, что фазовая и временная задержки в положительном и отрицательном слоях скачка с симметричной градиентной функцией вида (4) одинаковы.

При частоте $\omega_p=0{,}35(f_m)$, которую можно назвать частотой фазового резонанса, фаза коэффициента отражения имеет максимум, равный φ_p=1,5÷16=86º90. На уровне 0,5 ширина резонанса равна примерно $\Delta\omega\cong\frac{5}{8}(f_m)$. Характерной особенностью резонансной кривой является длинный «хвост», уходящий в область высоких частот.

Резонансная частота растет с ростом угла падения θ_0 на слой. Так, в случае жидкой или газообразной среды легко показать, что

$$f_m = \rho'_m C_m / \rho_m \left(1 - \frac{C_m^2}{C_0^2}\sin^2\theta_0\right)^{1/2} + C'_m \Big/ \left(1 - \frac{C_m^2}{C_0^2}\sin^2\theta_0^2\right)^{3/2}, \qquad (21)$$

где

$$\rho'_m = (\partial\rho/\partial z)z = 0, \quad C'_m = (\partial C/\partial z)z = 0.$$

Рассмотрим поведение функций (19), (20) при $\omega >> \omega_p$. Разложим их в ряд по $f_m/2\omega$. Нулевой член и все нечетные члены равны нулю. При вычислении коэффициента при первом, отличном от нуля квадратичном члене, учтем, что [4]

$$\frac{d\left[\arg\Gamma(iy)\right]}{dy} = \mathrm{Re}\psi(iy) = -\gamma + y^2\sum_{n-1}^{\infty} n^{-1}\left(n^2+y^2\right)^{-1} \cong \int_{1/2}^{\infty} t^{-1}\left(t^2+y^2\right)^{-1} dt,$$

где $\gamma = 0{,}577216$ – постоянная Эйлера.

Находим

$$\varphi(\omega) \cong \pi^{-2} F(\omega T)\ell n^2(z_1/z_2),$$

$$t_m \cong \pi^{-2} T\theta(\omega T)\ell n^2(z_1/z_0),$$

где

$$F(\xi) = \xi\left(7+16\xi^2\right)\Big/\left(1+16\xi^2\right)\left(1+4\xi^2\right),$$

$$\theta(\xi) = \left(7\cdot 92\xi^2 - 1024\xi^4 - 1024\xi^6\right)\Big/\left(1+16\xi^2\right)\left(1+4\xi^2\right)^2.$$

Функция F достигает максимального значения при $F_n = 0{,}807$ при $\omega\tau = 0{,}220$.

Для слоя скачка в океане

$$T = \pi^{-1} f_m^{-1}\left(\ell n\frac{\rho_1 C_1}{\rho_0 C_0} + \frac{1}{2}\ell n\frac{1-\sin^2\theta}{1-(C_1/C_0)^2\sin^2\theta_6}\right).$$

Здесь f_m задается формулой (21).

При перпендикулярном падении плоской волны на слой и нулевом градиенте плотности

$$T = \ell n\left(C_1/C_0\right)/\pi C'_m \cong \Delta C/\pi C_0 C'_m \cong L/2\pi C_0,$$

где L – эффективная толщина слоя.

Следовательно, $\omega T \cong L/\lambda_0$.

Полученные соотношения позволяют выполнить расчет интенсивности и временной задержки сигнала, отраженного от термоклина к поверхности океана.

Влияние флюктуаций скорости распространения звука в воде на фазовые характеристики акустического поля исследовано в ряде работ [6, 7], где показано, что неоднородности водной среды, имеющие пространственные размеры, соизмеримые с длиной волны, приводят к появлению дополнительных флюктуаций разности фаз поля давления даже в близко расположенных точках. В фазовом гидролокаторе бокового обзора (ФГБО) это приводит к появлению дополнительной флюктуационной составляющей.

Для оценки влияния флюктуаций скорости течения рассмотрим следующую модель: источник звука расположен на дне (в нашем случае это элемент дна, возбужденный сигналом ГБО) в точке с координатами $M_0(0,z_0)$, звук от точки M_0 проходит через слой течения толщиной d, примыкающий к поверхности воды, прием сигнала осуществляется в точке с координатами M(x,z), находящейся в слое течения, т.е. $z>-d$, считаем скорость распространения звука по глубине постоянной. Так как в среде имеются только горизонтальные течения, а скорость звука постоянна, то уравнение Эйконала не трудно проинтегрировать и определить траектории лучей. Это дает возможность получить поправки к оптическим длинам лучей и амплитудам поля на них при произвольном профиле скорости течения. Складывая поля всех лучей, приходящих в точку M, находим значение поля давления рассматриваемого точечного источника.

Используя наличие малого параметра $\varepsilon = v_{max}/C_{min}$, решение задачи о распространении звука в неоднородно движущейся среде можно представить в виде ряда по степеням ε. В этом случае нулевое приближение будет соответствовать задаче о распространении звука в неоднородной неподвижной среде, а поправка, обусловленная имеющимся течением, выразится через нулевое приближение.

Т.к. отношение характерного размера изменения свойств среды по вертикали к характерному размеру изменения свойств среды в горизонтальном направлении в океане имеет порядок 10^{-2}, то с помощью пространственно-временного лучевого метода решение задач по нахождению коэффициентов ряда по степеням малого параметра ε удается существенно упростить.

Действительно, пусть среда характеризуется функциями $\vec{v}^*, p^*$ и ρ^*. При прохождении звуковой волны $\vec{v}^*, p^*$ и ρ^* получат малое приращение $\vec{\xi}^*, \pi^*$ и δ^* соответственно, т.е. $\vec{\xi}^*$ – скорость звуковых колебаний; π^* – давление звука; δ^* – изменение плотности среды.

Перейдем к безразмерным переменным и безразмерным функциям, положив

$$x = x^*\ell^{-1},\ y = y^*\ell^{-1},\ z = z^*r^{-1},\ t = t^* C_0\ell^{-1},\ \vec{v} = \vec{v}^* v_0^{-1},\ v_0 = \max\left|\vec{v}^*\right|,$$

$$\rho = \rho^*\rho_0^{-1},\ \vec{\xi} = \vec{\xi}^*\xi_0^{-1},\ \xi_0 = \max\left|\vec{\xi}^*\right|,\ \pi = \pi^* C_0\left(p_0\xi_0\right)^{-1},\ \delta = \delta^* C_0\left(\rho_0\xi_0\right)^{-1},$$

где r и ℓ – характерные масштабы изменения свойств среды по вертикали и в горизонтальных направлениях соответственно;

p_0 и ρ_0 – равновесное давление и плотность;

$C_0 = (\delta p_0 \rho_0)^{1/2} \gamma$ – коэффициент Пуассона.

Будем искать $\vec{\xi}$ и π в форме рядов по степеням ε:

$$\vec{\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{\xi}_m \varepsilon^m, \quad \pi = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \varepsilon^m, \quad \delta = \pi C^{-2}, \quad C^2 = dp/d\rho.$$

Тогда мы получим, что функции $\Pi_m = \pi m \rho^{-1}$ при $m = 0,1\ldots$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial t^2} - \frac{C^2}{\gamma} \Delta \Pi_m - \frac{C^2}{\gamma\rho} (\nabla \Pi_m, \nabla \rho) = F_{m-1},$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + q\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \quad q = \ell r^{-1},$$

причем $F_{-1} = 0$, а F_{m-1} выражается через решение задачи на предыдущем (m-1)-ом шаге.

В океане $q = \ell r^{-1} \cong 10^{-2}$ поэтому, следуя пространственно-временному лучевому методу, будем искать $\Pi_0 = \pi_0 \rho^{-1}$ в виде

$$\Pi_0 = \pi_0 \rho^{-1} = e^{-qi\theta(x,y,t)} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(0)}(x,y,z,t)(i/q)j,$$

где θ и $A_j^{(0)}$ – функции, подлежащие определению.

Для $A_j^{(0)}$ в предположении, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью z=0, а снизу – твердым дном $z = -H(x,y)$, получаем задачу на нахождение собственных значений и собственных функций

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho \frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z}\right] + \frac{\gamma\rho}{C^2}\omega^2 A_0^{(0)} - \rho|\vec{v}|^2 A_0^{(0)} = 0,$$

$$A_0^{(0)}\Big|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0,$$

(где $\omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\vec{v}=\frac{\partial\theta}{\partial x}i+\frac{\partial\theta}{\partial y}j$), которая определяет некоторую связь между ω и $|\vec{v}|$. Уравнение $\omega=\omega(|\vec{v}|)$ – это дисперсионное уравнение задачи, являющееся аналогом уравнения Эйконала. При этом пространственно-временные лучи $t=S$, $x=x(S)$, $y=y(S)$ в пространстве t, x, y определяются из системы

$$\frac{dt}{d}=1,\quad \frac{dx}{dS}=\frac{\partial\omega}{\partial v_x},\quad \frac{dy}{dS}=\frac{\partial\omega}{\partial v_y},\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{dv_x}{dS},\quad \frac{dv_y}{dS}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\quad \frac{d\theta_t}{dS}=0\,.$$

Обозначим через $\tilde{A}_0^{(0)}$ решение задачи для $A_0^{(0)}$, зафиксированное соотношением

$$\int_{-H}^{0}\rho C^2\left[\tilde{A}_0^{(0)}\right]^2 dz=1\cdot$$

Тогда

$$A_0^{(0)}=a_0^{(0)}(x,y,t)\tilde{A}_0^{(0)}.$$

Для нахождения амплитуды $a_0^{(0)}$ необходимо рассмотреть задачу для следующего приближения по q^{-1}, которая будет представлять собой неоднородную задачу Штурма-Луивилля на собственном числе. Условие разрешимости такой задачи позволяет получить для $a_0^{(0)}$ формулу

$$a_0^{(0)}(x,y,t)=a_0^{(0)}(x_0,y_0,0)j^{-1/2},$$

где x_0,y_0 – координаты точки, в которой пространственно-временной луч пересекается с плоскостью $t=0$.

Очевидно, что пространственно-временной луч в рассматриваемом поле лучей полностью определяется точкой (x_0,y_0), поэтому $x=x(x_0,y_0,t)$, $y=y(x_0,y_0,t)$ $j=D(x,y)D(x_0,y_0)$ - якобиан перехода от переменных x_0,y_0 к переменным x,y.

Для поправок, обусловленных наличием течения, получаем

$$\Pi_m=\pi_m\rho^{-1}=q^m e^{-i\theta(x,y,t)q}\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(m)}(x,y,z,t)(i/q)^j;\quad m=1,2,\dots,$$

причем $A_0^{(m)}=a_0^{(m)}(x,y,t)\tilde{A}_0^{(0)}$, а амплитуды $a_0^{(m)}$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль пространственно-временного луча. В частности, амплитуда $a_0^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left\{a_0^{(1)}\left[a_0^{(0)}\right]\right\}=q_0\left[A_0^{(0)}\right],$$

где $\left[A_0^{(0)}\right]$ выражается через $A_0^{(0)}$.

Итак,

$$\pi=\rho t^{-iq\theta(x,y,t)}\sum_{m=0}^{\infty}(\varepsilon q)^m\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(m)}(i/q)^j.$$

Это разложение удобно тем, что его нулевое приближение по ε соответствует хорошо изученной задаче о распространении звука в неоднородном океане без течений. Однако, новый безразмерный параметр $\varepsilon q\cong 0{,}1$, поэтому при вычислении звуковых полей в океане с сильными течениями в полученном разложении надо удерживать довольно много членов.

Для случая однородного океана с течением в работе [7] получена формула, определяющая поле давления

$$\operatorname{Re} p=(A/4\pi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[\beta_n^{(1)}-\beta_n^{(2)}\right], \qquad (22)$$

где

$$\beta_n^{(j)}=\frac{1}{\mu_n(j)}\left\{1+2\delta_n^{(j)}\left[1+\left(\delta_n^{(j)}\right)^2\right]\frac{\xi_n^{(j)}}{\mu_n^{(j)}}\right\}\cos\left\{k\mu_n^{(j)}+k\delta_n^{(j)}\xi_n^{(j)}\right\}, \qquad (23)$$

$$\delta_n^{(j)}=\frac{x}{2nh+(-1)^{j-1}z_0-z},\qquad \mu_n^{(j)}=\sqrt{x^2+\left[2nh+(-1)^{j-1}z_0-z\right]^2},$$

$$\xi_n^{(j)}=\left(2n+(-1)^j\right),\quad \int_{-d}^{0}\gamma(\xi)d\xi-\int_{0}^{z}\gamma(\xi)d\xi;\quad j=1,2;\quad \gamma(z)=\frac{v(z)}{C_0}.$$

Введем обозначение

$$S_n^{(j)}=2nh+(-1)^{j-1}z_0-z.$$

Тогда выражение (23) для $\beta^{(j)}$ может быть записано в виде

$$\beta_n^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}}}\left\{1 + \frac{2x}{S_n^{(j)}}\left[1 + \frac{x^2}{S_n^{(j)^2}}\right]\frac{\xi_n^j}{\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}}}\right\}\times$$

$$\times\cos\left\{k\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}} + \frac{kx}{S_n^{(j)}}\xi_n^{(j)}\right\} = \tag{24}$$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}}} + \frac{2x}{S_n^{(j)^3}}\xi_n^{(j)}\right\}\cos\left\{k\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}} + \frac{kx}{S_n^{(j)}}\xi_n^{(j)}\right\} =$$

$$= \left(A_{n0}^{(j)} + \tilde{A}_n^{(j)}\right)\cos\left(\Phi_{n0}^{(j)} + \tilde{\Phi}_n^{(j)}\right),$$

где $A_{n0}^{(j)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}}}$, $\Phi_{n0}^{(j)} = k\sqrt{x^2 + S_n^{(j)^2}}$ – соответственно амплитуда и фаза n-го луча при отсутствии течения;

$A_n^j = \dfrac{2x}{S_n^{(j)^3}}\xi_n^{(j)}$, $\tilde{\Phi}_n^j = \dfrac{kx}{S_n^{(j)}}\xi_n^{(j)}$ – поправка к амплитуде и фазе n-го луча, обусловленные наличием течения.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть скорость $v(z)$ представляет собой сумму двух функций, зависящих от z:

$$v(z) = v_0(z) + U(z), \tag{25}$$

причем $v_0(z)$ – по-прежнему неслучайная функция, а $U(z)$ – случайная функция с математическим ожиданием, равным нулю, дисперсией $D[U(z)] = \sigma_U^2(z)$ и автокорреляционной функцией

$$K_u(z, z_z)\ K_u(z, z) = \sigma_U^2(z).$$

Тогда математическое ожидание, дисперсия и автокорреляционная функция $v(z)$ будут иметь вид

$$M[v(z)] = v_0(z),$$

$$D[U(z)] = \sigma_U^2(z), \tag{26}$$

$$K_v(z_1, z_2) = K_U(z_1, z_2).$$

Введем обозначение

$$\omega(z) = (1/C_0)\int_0^z v(\xi)d\xi = (1/C_0)\int_0^z v_0(\xi)d\xi + (1/C_0)\int_0^z U(\xi)d\xi =$$

$$= \omega_0(z) + (1/C_0)\int_0^z U(\xi)d\xi \,. \qquad (27)$$

Первое слагаемое в (27) − неслучайная функция, а второе − случайная функция z с математическим ожиданием, равным нулю. Найдем математическое ожидание, дисперсию и автокорреляционную функцию ω(z)

$$M[\omega(z)] = \omega_0(z) = (1/C_0)\int_0^z v_0(\xi)d\xi \,, \qquad (28)$$

$$D[\omega(z)] = M\left[(1/C_0)\int_0^z U_0(\xi)d\xi\right]^2 = \left(1/C_0^2\right)M\left[\int_0^z\int_0^z U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right] =$$

$$= \left(1/C_0^2\right)\int_0^z\int_0^z K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \,, \qquad (29)$$

$$K\omega(z_1,z_2) = M\left[(1/C_0)\int_0^{z_1} U(\xi)d\xi(1/C_0)\int_0^{z_2} U(\xi)d\xi\right] =$$

$$= (1/C_0)M\left[\int_0^{z_1}\int_0^{z_2} U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right] = \left(1/C_0^2\right)\int_0^{z_1}\int_0^{z_2} K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \,.$$

Перейдем теперь к отысканию математического ожидания, дисперсии и автокореляционной функции $\xi_n^{(j)}$, которая может быть выражена через ω(z) следующим образом

$$\xi_n^{(j)} = -\left[2n + (-1)^j\right]\omega(z) = -\left\{\left[2n + (-1)^j\right]\omega_0(-d) + \omega_0(z)\right\} -$$

$$-\left\{\frac{2n + (-1)^j}{C_0}\int_0^{-d} U(\xi)d\xi + (1/C_0)\int_0^z U(\xi)d\xi\right\} . \qquad (30)$$

В выражении (30) первое слагаемое – неслучайное, а второе – случайная функция z_c с нулевым математическим ожиданием.

$$M\left(\xi_n^{(j)}\right) = -\left[2n + (-1)^j\right]\omega_0(-d) - \omega_0(z) =$$

$$= -\left[\frac{2n + (-1)^j}{C_0}\int_0^{-d} v_0(\xi)d\xi + \int_0^z v_0(\xi)d\xi\right], \qquad (31)$$

$$D\left(\xi_n^j\right) = \left(1/C_0^2\right)D\left\{-\left[2n + (-1)^j\right]\int_0^{-d} U(\xi)d\xi - \int_0^z U(\xi)d\xi\right\} =$$

$$= \left(1/C_0^2\right)M\left\{+\left[2n + (-1)^j\right]\int_0^{-d} U(\xi)d\xi + \int_0^z U(\xi)d\xi\right\}^2 =$$

$$= \left(1/C_0^2\right)M\left\{\left[2n + (-1)^j\right]^2 \int_0^{-d}\int_0^{-d} U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^z\int_0^z U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + 2\left[2n + (-1)^j\right]\int_0^z\int_0^{-d} U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right\} = \qquad (32)$$

$$= \left(1/C_0\right)\left\{\left[2n + (-1)^j\right]^2 \times \int_0^{-d}\int_0^{-d} K_U(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^z\int_0^z K_U(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + 2\left[2n + (-1)^j\right]\int_0^z\int_0^{-d} K_U(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right\}.$$

Амплитуда и фаза звукового поля линейно выражаются через $\xi_n^{(j)}$, поэтому математическое ожидание, дисперсия и автокорреляционная функция фазы легко могут быть выражены через соответствующие характеристики $\xi_n^{(j)}$ (31) – (33).

$$K_\xi(z_1,z_2)=(1/C_0)M\left\{\left[\left(2n+(-1)^j\right)\int_0^{-d}U(\xi)d\xi+\int_0^{z_1}U(\xi)d\xi\right]\times\right.$$

$$\times\left.\left[\left(2n+(-1)^j\right)\int_0^{-d}U(\xi)d\xi+\int_0^{z_2}U(\xi)d\xi\right]\right\}=\left(1/C_0^2\right)M\left\{\left[2n+(-1)^j\right]^2\times\right.$$

$$\times\int_0^{-d}\int_0^{-d}U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1d\xi_2+\left[2n+(-1)^j\right]\int_0^{-d}\int_0^{z_1}U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1d\xi_2+$$

$$=\left[2n+(-1)^j\right]\int_0^{-d}\int_0^{z_2}U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1d\xi_2+\int_0^{z_1}\int_0^{z_2}U(\xi_1)U(\xi_2)d\xi_1d\xi_2= \qquad (33)$$

$$=\left(1/C_0^2\right)\left\{\left[2n+(-1)^j\right]^2\int_0^{-d}\int_0^{-d}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2+\right.$$

$$+\left[2n+(-1)^j\right]\int_0^{-d}d\xi_2\left[\int_0^{z_1}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1+\int_0^{z_2}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1\right]+$$

$$\left.+\int_0^{z_1}\int_0^{z_2}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2\right\}.$$

Функциональные характеристики фазы запишем в виде

$$M\left[\Phi_n^{(j)}\right]=\Phi_{n0}^{(j)}+\frac{kx}{S_n^{(j)}}M\left[\xi_n^{(j)}\right]=$$

$$=\Phi_{n0}^{(j)}-\frac{kx}{S_n^{(j)}C_0}\left\{\left[2n+(-1)^j\right]\int_0^{-d}v_0(\xi)d\xi+\int_0^{z}v_0(\xi)d\xi\right\}, \qquad (34)$$

$$D\left[\Phi_n^{(j)}\right]=D\left[\tilde{\Phi}_{n0}^{(j)}\right]=D\left[\frac{kx}{S_n^{(j)}}\xi_т^{(j)}\right]=\frac{k^2x^2}{\left[S_n^{(j)}\right]^2}D\left[\xi_n^{(j)}\right]=$$

$$=\frac{k^2x^2}{\left[S_n^j\right]^2C_0^2}\left\{\left[2n+(-1)^j\right]^2\int_0^{-d}\int_0^{-d}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2+\right. \qquad (35)$$

$$\left.+\int_0^{z}\int_0^{z}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2+2\left[2n+(-1)^j\right]^2\int_0^{-d}\int_0^{z}K_U(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2\right\},$$

$$K_{\Phi}(z_1,z_2) = K_{\tilde{\Phi}}(z_1,z_2) = \frac{k^2x^2}{\left[S_n^{(j)}\right]^2} K_{\xi}(z_1,z_2) =$$

$$= \frac{k^2x^2}{\left[S_n^{(j)}\right]^2 C_0^2} \left\{ \left[2n + (-1)^j\right]^2 \int_0^{-d}\int_0^{-d} K_U(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \right.$$

$$+ \left[2n + (-1)^j\right] \int_0^{-d} \left[\int_0^{z_1} K_U(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^{z_2} K_U(\xi_1,\xi_2) d\xi_1, d\xi_2 \right] d\xi + \tag{36}$$

$$+ \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} K_U(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 .$$

Используя методику, изложенную в [2, 3] и полученные соотношения (34) – (36), можно количественно оценить влияние флюктуаций скорости течения на точность измерения глубины гидролокатором бокового обзора.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965. - 203 с.
2. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
3. Бейтлин Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1965. - 294 с.
4. Абрамовиц М., Стиган М. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
5. Скучик Е. Основы акустики. - М.: Мир, 1976. - 520 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: АН СССР, 1957. - 488 с.
7. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане. Успехи физических наук. 1973, Т. 109, Вып. 2. – С. 333-354.