УДК 355.41

О.І. ХАЗАНОВИЧ, М.О. КУДРИЦЬКИЙ

ЛОГІСТИЧНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТА ЗМІНИ ОБСЯГІВ ЗАПАСІВ МАТЕРІАЛЬНИХ ЗАСОБІВ

Анотація. Виведено логістичне диференціальне рівняння у частинних похідних для визначення раціонального розміщення та зміни обсягів запасів матеріальних засобів протягом періоду забезпечення. Надалі з використанням логістичного диференціального рівняння у частинних похідних можна визначати та обчислювати конкретні значення показників, що входять до розв'язку логістичного диференціального рівняння у частинних похідних.

Ключові слова: логістичне диференціальне рівняння, запаси матеріальних засобів.

Споживачі матеріальних засобів [1] зазвичай розташовані територіально у різних місцях та мають різну потребу у цих засобах, змінну за часом. На сьогодні відсутній математичний апарат для розв'язання загальної задачі з визначення функції, яка б надала змогу описати зміну запасів матеріальних засобів у споживачів та на базах зберігання (у постачальників) за часом, а також представити просторовий розподіл цих запасів між споживачами та постачальниками. Розв'язання зазначеної задачі розглянуто в цій статті.

У науковій літературі [1–3] та інших джерелах постановка задачі з пошуку загального розв'язку для визначення як просторового, так і часового розподілу запасів матеріальних засобів між споживачами і постачальниками не зустрічається. Отже, метою статті є виведення логістичного диференціального рівняння у частинних похідних для визначення раціонального розміщення та зміни обсягів запасів матеріальних засобів у споживачів та постачальників.

Розглянемо певні особливості процесу зміни величини запасів матеріальних засобів у споживачів та постачальників. При цьому будемо аналізувати залежність величини цих запасів від двох параметрів: їхньої відстані ℓ від вибраної опорної лінії на розглядуваній території та визначеного часу забезпечення.

Спочатку дослідимо вплив параметра ℓ. Припустимо, що запаси матеріальних засобів розміщені на певній відстані від опорної лінії вглиб території, на якій знаходяться споживачі та постачальники. При цьому обсяги запасів зі збільшенням відстані від опорної лінії зростають. Однак, зростання обсягів запасів відбувається зі швидкістю, яка зменшується зі збільшенням зазначеної відстані. Тоді, ґрунтуючись на відомих співвідношеннях фізики, можна записати:

$$\frac{d^2Q(\ell)}{d\ell^2} = -\lambda_\ell \frac{dQ(\ell)}{d\ell}, \tag{1}$$

де $Q(\ell)$ — обсяги запасів матеріальних засобів як функція параметра ℓ; λ_ℓ — інтенсивність зміни обсягів запасів матеріальних засобів залежно від відстані до опорної лінії.

Знак мінус свідчить про те, що обсяги запасів матеріальних засобів Q зі збільшенням відстані від опорної лінії зростають повільніше.

Використовуючи спосіб розв'язання рівняння (1), наведений у [4], отримаємо

$$Q(\ell) = Q_{30}\ (1 - e^{-\lambda_\ell \ell}), \tag{2}$$

де Q_{30} — обсяги запасів матеріальних засобів на початок періоду забезпечення, коли $\ell = \ell_{\min}$, а саме дорівнює мінімальній відстані розташування постачальників третього (найвищого) рівня.

Звідси

$$0 \le \ell \le \ell_{\min}.$$

Розглянемо вплив параметра *t*. Можна записати, що витрати запасів матеріальних засобів певного виду *dQ* під час забезпечення за час *dt* будуть дорівнювати

$$dQ = \lambda t Q(t) dt, \tag{3}$$

де $Q(t)$ — обсяг запасів матеріальних засобів певного виду на момент часу *t*; λ_t — інтенсивність зміни обсягу запасів матеріальних засобів з плином часу.

Далі з (3) отримуємо диференціальне рівняння

$$dQ(t) = -\lambda t Q(t) dt,$$

або

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\lambda_t Q(t), \tag{4}$$

де $0 \le t \le t_{\max}$.

Знак мінус означає, що обсяги запасів матеріальних засобів $Q(t)$ з плином часу зменшуються, при цьому діє така вимога: чим більшою є швидкість зменшення запасів, тим більшими мають бути обсяги запасів.

Використовуючи спосіб розв'язання рівняння (4), наведений у [4], отримаємо:

$$Q(t) = Q_0\ e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

де Q_0 — обсяг запасів матеріальних засобів певного виду на момент часу $t = 0$.

Отже, тут і далі використання експоненти у (5) пояснюється тим, що вона є результатом розв'язання задачі, а саме диференціального рівняння (4), що відображає так званий «процес чистої загибелі».

Додаючи рівняння (1) до рівняння (4) та переходячи до частинних похідних, отримаємо логістичне рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 Q(\ell)}{\partial \ell^2} + \lambda_\ell \frac{\partial Q(\ell)}{\partial \ell} + \gamma \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \gamma \lambda_t Q(t) = 0 \tag{6}$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} Q(0, t) = 0 \\ Q(\ell_{\max}, t) = Q(t), \end{cases}$$

та початковою умовою

$$Q(0,0) = 0,$$

де γ — коефіцієнт, за допомогою якого вирівнюється розмірність доданків рівняння (6).

Рівняння (6) є лінійним однорідним рівнянням у частинних похідних другого порядку з постійними коефіцієнтами та двома незалежними змінними. Воно належить класу рівнянь параболічного типу.

Використовуючи спосіб розв'язання рівняння (6), наведений у [5], отримаємо вираз для розв'язку цього рівняння:

$$Q(\ell, t) = Q_{30}\ (1 - e^{-\lambda_\ell \ell}) e^{-\lambda_t t}. \tag{7}$$

Слід врахувати, що запаси матеріальних засобів зі збільшенням відстані від опорної лінії розподіляються не безперервно. Тому криві (2), (5), (7) потрібно розглядати як огинальні величини розподілених вглиб території та за часом запасів матеріальних засобів.

Отже, у статті виведено логістичне диференціальне рівняння у частинних похідних для визначення раціонального розміщення та зміни обсягів запасів матеріальних засобів протягом періоду забезпечення (6). Знайдено розв'язок (7) зазначеного рівняння.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з визначенням та розрахунком конкретних значень показників, що входять до розв'язку логістичного диференціального рівняння у частинних похідних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Романченко І.С., Шуєнкін В.О., Хазанович О.І., Марко І.Ю. Теоретичні основи аналізу, моделювання та синтезу системи матеріально-технічного забезпечення як просторово-розподіленої системи. Київ: ЦНДІ ЗС України, 2013. 221 с.
2. Романченко І.С., Хазанович О.І., Трегубенко С.С. Моделювання системи матеріально-технічного забезпечення. Львів: НАСВ ЗС України, 2015. 156 с.
3. Шуенкин В.А. Математические модели управления запасами. Киев: ООО «Междунар. фин. Агентство», 1997. 302 с.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, 1963. 548 с.
5. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1985. 384 с.

Надійшла до редакції 07.02.2020

А.И. Хазанович, М.А. Кудрицкий

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМОВ ЗАПАСОВ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДСТВ

Аннотация. Выведено логистическое дифференциальное уравнение в частных производных для определения рационального размещения и изменения объемов запасов материальных средств в течение периода обеспечения. В дальнейшем с использованием логистического дифференциального уравнения в частных производных можно определять и рассчитывать конкретные значения показателей, входящих в решение логистического дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: логистическое дифференциальное уравнение, запасы материальных средств.

O.I. Khazanovych, M.O. Kudrytskyi

LOGISTIC DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES FOR DETERMINATION OF RATIONAL LOCATION AND CHANGES IN INVENTORIES OF MATERIALS

Abstract. In the article, it is deduced the logistic differential equation in partial derivatives to determine the rational placement and change in the inventories of material means during the provision period. In the future, using the logistic differential equation in partial derivatives, it is possible to determine and calculate the specific values of indicators that are part of the solution of the logistic differential equation in partial derivatives.

Keywords: logistic differential equation, inventories of materials.

Хазанович Олександр Ізраїльович,
доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Центрального науково-дослідного інституту Збройних Сил України, Київ, e-mail: alexhaz55@mail.com.

Кудрицький Максим Олександрович,
кандидат військ. наук, старший науковий співробітник, вчений секретар секретаріату вченої ради Центрального науково-дослідного інституту Збройних Сил України, Київ, e-mail: kma_13@ukr.net.