УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ С РАЗЛИЧНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

Аннотация. Рассмотрена проблема сближения управляемых объектов с различной инерционностью в игровых задачах динамики на основе современной версии метода разрешающих функций. Для таких объектов характерно, что на некотором интервале времени не выполняется условие Понтрягина, что существенно затрудняет применение метода разрешающих функций к этому классу игровых задач динамики. Предложен метод решения таких задач, связанный с построением некоторых скалярных функций (разрешающих), качественно характеризующих ход сближения управляемых объектов с различной инерционностью и эффективность принятых решений. Метод разрешающих функций позволяет эффективно использовать современную технику многозначных отображений в обоснованиях игровых конструкций и получении на их основе содержательных результатов. Сравниваются гарантированные времена окончания игры для разных схем сближения управляемых объектов. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: управляемые объекты с различной инерционностью, квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению проблемы сближения управляемых объектов с различной инерционностью в игровых задачах динамики на основе метода разрешающих функций [1] и его современной версии [2]. Для таких объектов характерно, что на некотором интервале времени не выполняется условие Понтрягина, что существенно затрудняет применение метода разрешающих функций к этому классу игровых задач динамики. Примером может служить задача «мальчик и крокодил» [1]. В работе [1] приведено два способа использования терминального множества для расширения класса задач динамики, для которых применим метод разрешающих функций.

В данной статье предложен способ решения указанной задачи, отличный от процедур, рассмотренных в [1]. Исследуются специальные многозначные отображения, порождающие верхние и нижние разрешающие функции двух типов, впервые введенные в [3]. С помощью этих функций получены некоторые достаточные условия разрешимости задачи сближения управляемых объектов с различной инерционностью за гарантированное время. Результаты иллюстрируются на модельном примере «мальчик и крокодил».

Настоящая работа продолжает исследования [1–4], примыкает к публикациям [5–28] и расширяет класс игровых задач сближения управляемых объектов, имеющих решение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))\, d\tau, \ \ t \ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [9] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый (преследователь) пытается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а второй (убегающий) — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или избежать встречи.

Примем сторону первого игрока и полагаем, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t будем выбирать на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то говорят, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [7], а контруправление [5] $u(t) = u(z_0, v(t))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [8].

Сформулируем необходимые факты из выпуклого анализа [1, 10] в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $X \in R^n$ — выпуклый компакт, $\omega(\tau)$ — неотрицательная ограниченная измеримая числовая функция. Тогда $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. При этом если $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ и $\int_0^T \omega(\tau)\, d\tau \le 1$, то $\int_0^T f(\tau)\, d\tau \in X$, $f(\tau)$ — измеримая функция, $\tau \in [0, T]$.

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t, \tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$. Предположим, что многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [9] при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Если выполнено условие Понтрягина, то на множестве Δ существует по крайней мере один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ отображения $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такой селектор называют селектором Понтрягина.

Сформулируем условие Понтрягина в эквивалентной форме. На множестве Δ существует селектор Понтрягина $\gamma_0(t, \tau)$, для которого справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma: \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$ — некоторая, почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$, для каждого $t > 0$ функция, которую назовем функцией сдвига. Пусть M_1 — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n такой, что если $m \in M_1$, то $-m \in M_1$ и $M_2 = M \overset{*}{-} M_1 = \{m \in L: m + M_1 \subset M\} = \bigcap_{m \in M_1} (M - m) \neq \varnothing$,

где $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского [1]. Назовем допустимыми функцию $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливы указанные условия и свойства.

Рассмотрим на множестве Δ некоторую непрерывную матричную функцию $B(t, \tau)$. Ее значения — матрицы порядка k, k — размерность вектора v. Обозначим $W_B(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, B(t, \tau)v)$, $\varphi_B(t, u, v) = \varphi(u, B(t, \tau)v) - \varphi(u, v)$, $t \ge \tau \ge 0$, $u \in U$, $v \in V$, и рассмотрим при $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$ многозначное отображение

$$\Lambda_B(t, \tau, v) = \{\lambda \ge 0: \pi\Omega(t, \tau)\varphi_B(t, U, v) \subset \lambda M_1\}.$$

Если на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие $\Lambda(t, \tau, v) \neq \varnothing$, то рассмотрим скалярную функцию $\lambda_B(t, \tau, v) = \inf\{\lambda: \lambda \in \Lambda_B(t, \tau, v)\}$, $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Можно показать [12], что многозначное отображение $\Lambda_B(t, \tau, v)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а функция $\lambda_B(t, \tau, v)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измерима по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и поэтому она суперпозиционно измерима [12], т.е. $\lambda_B(t, \tau, v(\tau))$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, со значениями из V. Отметим также, что функция $\lambda_B(t, \tau, v)$ полунепрерывна снизу по переменной v и функция $\sup_{v \in V} \lambda_B(t, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$.

Условие 1. На множестве Δ существуют матрица $B(t, \tau)$, допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множество M_1, для которых справедливы соотношение $\Lambda(t, \tau, v) \neq \varnothing$ и включения

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W_B(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)], \ \varphi_B(t, U, V) \subset \sup_{v \in V} \lambda_B(t, \tau, v) M_1.$$

Обозначим $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau$ и рассмотрим множество $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \geq 0\colon \xi(t) \in M_2, \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(t, \tau, \upsilon) dt \leq 1\}$. Если соотношения в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t \geq 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1, для некоторых матрицы $B(t, \tau)$, допустимых функции $\gamma(t, \tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U(\tau, \upsilon) = \{u \in U\colon \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u, B(\mathrm{P}, \tau)\upsilon) - \gamma(\mathrm{P}, \tau) = 0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [12] при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Принимая во внимание формулу (1), получаем

$$\pi z(\mathrm{P}) = -\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau))\, d\tau +$$

$$+\xi(\mathrm{P}) + \int_0^{\mathrm{P}} (\pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u(\tau), B(\mathrm{P}, \tau)\upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}, \tau)) d\tau.$$

Тогда в силу условия 1 по определению момента P имеем

$$\pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\mathrm{P}, \tau, \upsilon) M_1,$$

$$\int_0^{\mathrm{P}} \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\mathrm{P}, \tau, \upsilon)\, d\tau \leq 1.$$

Поэтому вследствие леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \in M_1$$

и , следовательно, $-\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \in M_1$. С учетом закона выбора управления первым игроком получим $\pi z(\mathrm{P}) \in M_1 + \xi(\mathrm{P}) \in M_1 + M_2 \subset M$ и $z(\mathrm{P}) \in M^*$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема 1 является аналогом первого прямого метода Понтрягина [1] для управляемых объектов с различной инерционностью. Если выполнено условие Понтрягина, то положим $B(t, \tau) = E$, где E — единичная матрица, и преобразуем условие 1 в условие Понтрягина.

Рассмотрим при $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in V$ многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon) = \{\alpha \geq 0 \colon [W_B(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha [M_2 - \xi(t)] \neq \varnothing\}. \qquad (5)$$

Условие 2. На множестве Δ существуют матрица $B(t, \tau)$, допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливы соотношение $\Lambda(t, \tau, \upsilon) \neq \varnothing$ и включения

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W_B(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(t)]\},$$

$$\varphi_B(t, U, V) \subset \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(t, \tau, \upsilon) M_1.$$

Если выполнено условие 2, то рассмотрим скалярную функцию $\lambda_B(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\lambda \colon \lambda \in \Lambda_B(t, \tau, \upsilon)\}$, $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции [3]

$$\alpha^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\}, \ \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\},$$

$$\tau \in [0, t], \ \upsilon \in V.$$

Покажем [12], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, и поэтому они суперпозиционно измеримы [12], т.е. $\alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau))$ и $\alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $\upsilon(\cdot) \in V(\cdot)$. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, нижняя — полунепрерывна снизу по переменной υ, функции $\inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)$ и $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$.

Рассмотрим множество

$$P_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \geq 0 \colon \xi(t) \in M_2, \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(t, \tau, \upsilon) d\tau \leq 1, \ \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau \leq 1 \right\}. \qquad (6)$$

Если соотношения в фигурных скобках равенства (6) не выполняются ни для каких $t \geq 0$, то положим $P_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, для некоторых матрицы $B(t, \tau)$, допустимых функции $\gamma(t, \tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $P_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $P_*^1 \in P_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^1 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, P_*^1]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, P_*^1]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^1(\tau, \upsilon) =$$

$$= \{u \in U \colon \pi\Omega(P_*^1, \tau)\varphi(u, B(P_*^1, \tau)\upsilon) - \gamma(P_*^1, \tau) \in \alpha_*(P_*^1, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(P_*^1)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(P_*^1, \tau, \upsilon)$ компактнозначное отображение $U_*^1(\tau, \upsilon)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [12] при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, P_*^1]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U_*^1(\tau, \upsilon)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*^1(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Принимая во внимание формулу (1), получаем

$$\pi z(\mathrm{P}_*^1) = -\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^1, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau))d\tau +$$

$$+\xi(\mathrm{P}_*^1) + \int_0^{\mathrm{P}_*^1} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(B(\mathrm{P}_*^1, \tau)u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau))\, d\tau. \qquad (7)$$

В силу условия 2 по определению момента P_*^1 имеем

$$0 \in M_1,\ \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^1, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon) M_1,$$

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon)\, d\tau \le 1.$$

Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^1, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau))d\tau \in M_1$$

и по предположению

$$-\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^1, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau))d\tau \in M_1.$$

Вследствие выбора управления и по определению момента P_*^1 имеем

$$0 \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1),$$

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(B(\mathrm{P}_*^1, \tau)u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1)],$$

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon)\, d\tau \le 1.$$

Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(B(\mathrm{P}_*^1, \tau)u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau))\, d\tau \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1).$$

Таким образом, соотношение (7) дает

$$\pi z(\mathrm{P}_*^1) \in M_1 + \xi(\mathrm{P}_*^1) + M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1) = M_1 + M_2 \subset M$$

и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*^1) \in M^*$, что завершает доказательство теоремы.

Лемма 2. Для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1 тогда и только тогда, когда существуют матрица $B(t, \tau)$, допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливо условие 2 и $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$ на множестве $\Delta \times V$.

Доказательство. Пусть существуют матрица $B(t,\tau)$ и допустимые функция $\gamma(t,\tau)$, множества M_1, M_2, для которых справедливо условие 2 и $0 \in \mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ на множестве $\Delta \times V$. Тогда нулевое значение α обеспечивает непустоту пересечения в выражении (5), поэтому с учетом условия $\Lambda(t,\tau,\upsilon) \neq \varnothing$, $\upsilon \in V$, имеем $0 \in W_B(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta$, $\upsilon \in V$. Отсюда вытекает, что для $(t,\tau) \in \Delta$ имеем $0 \in \bigcap\limits_{\upsilon \in V} [W_B(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau)]$, т.е. справедливо условие 1. Рассуждая в обратном порядке, приходим к нужному выводу.

Замечание 2. Если существуют матрица $B(t,\tau)$, допустимые функция $\gamma(t,\tau)$ и множества M_1, M_2, для которых выполнено условие 1, то в силу леммы 2 $\alpha_*(t,\tau,\upsilon) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\} = 0$ на множестве $\Delta \times V$.

Условие 3. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W_B(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau)] - \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon)[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Замечание 3. Если существуют матрица $B(t,\tau)$, допустимые функция $\gamma(t,\tau)$ и множества M_1, M_2, для которых выполнено условие 1, то по аналогии с леммой 2 выполнено условие 3 и $\sup\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon) = 0$.

Рассмотрим множество

$$T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot)) =$$
$$= \left\{ t \geq 0: \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(t,\tau,\upsilon)\, d\tau \leq 1,\ \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t,\tau,\upsilon)\, d\tau \geq 1,\ \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon)\, d\tau < 1 \right\}. \quad (8)$$

Если при некотором $t > 0$ имеем $\alpha^*(t,\tau,\upsilon) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0,t]$, $\upsilon \in V$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (8) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливы другие неравенства в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства соотношения (8) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 3, для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0,T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot)) \notin M_2$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)\, d\tau,\ \ t \in [0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))\, d\tau \leq 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T,\tau,\upsilon)\, d\tau \leq 0.$$

Вследствие непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s): s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ назовем «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Рассмотрим компактнозначные отображения

$$U_1^*(\tau, \upsilon) = \{u \in U: \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T, \tau)\upsilon) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha^*(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \tag{9}$$

$$U_*^1(\tau, \upsilon) = \{u \in U: \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T, \tau)\upsilon) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [t_*, T]. \tag{10}$$

Многозначные отображения $U_1^*(\tau, \upsilon)$ и $U_*^1(\tau, \upsilon)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\alpha^*(T, \tau, \upsilon)$ и $\sup\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)$ компактнозначные отображения $U_1^*(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, t_*)$, и $U_*^1(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [t_*, T]$, при $\upsilon \in V$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы [4]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримому селектору $u_1^*(\tau, \upsilon)$ и $u_*^1(\tau, \upsilon)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $u_1^*(\tau) = u_1^*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T) = -\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, u_1^*(\tau), \upsilon(\tau))d\tau + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau))d\tau\right] +$$

$$+ \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1^*(\tau), B(T, \tau)\upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), B(T, \tau)\upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau. \tag{11}$$

В силу условия 2 по определению момента T имеем

$$0 \in M_1, \quad \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \le 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, u_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(T, \tau, \upsilon)M_1, \ \tau \in [0, t_*),$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(T, \tau, \upsilon)M_1, \ \tau \in [t_*, T].$$

Тогда с учетом леммы 1 получим

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_1^*(\tau), v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*^1(\tau), v(\tau))d\tau \in M_1$$

и по предположению

$$-\int_0^{t_*} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_1^*(\tau), v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*^1(\tau), v(\tau))d\tau \in M_1.$$

Используя последнее включение и соотношения (9)–(11), получаем

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M_2 - \xi(T)]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)[M_2 - \xi(T)]d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau[M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)d\tau[M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)d\tau\right] +$$

$$+\left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)d\tau\right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$, включение $M_1 + M_2 \subset M$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M_2 может быть подтвержден применением аппарата опорных функций [10].

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot)) \in M_2$ достаточно использовать теорему 2.

Условие 4. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v\in V} \{[W_B(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] - \inf_{v\in V} \alpha^*(t,\tau,v)[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 3, 4, для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot) \notin M_2$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^{t} \inf_{v\in V} \alpha^*(T,\tau,v)d\tau - \int_{t}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)d\tau, \ t \in [0, T].$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau > 0, \ h(T) = 1 - \int_0^{T} \inf_{v\in V} \alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau \le 0.$$

Вследствие непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ назовем «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$\widetilde{U}_1^*(\tau, v) = \{u \in U: \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T, \tau)v) - \gamma(T, \tau) \in$$
$$\in \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \tag{12}$$

$$\widetilde{U}_*^1(\tau, v) = \{u \in U: \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T, \tau)v) - \gamma(T, \tau) \in$$
$$\in \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M_2 - \xi(T)]\}, \qquad \tau \in [t_*, T]. \tag{13}$$

Многозначные отображения $\widetilde{U}_1^*(\tau, v)$ и $\widetilde{U}_*^1(\tau, v)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)$ и $\sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)$ компактнозначные отображения $\widetilde{U}_1^*(\tau, v)$, $\tau \in [0, t_*)$, и $\widetilde{U}_*^1(\tau, v)$, $\tau \in [t_*, T]$, при $v \in V$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримому селектору $\widetilde{u}_1^*(\tau, v)$ и $\widetilde{u}_*^1(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $\widetilde{u}_1^*(\tau) = \widetilde{u}_1^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $\widetilde{u}_*^1(\tau) = \widetilde{u}_*^1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T) = -\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_1^*(\tau), v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*^1(\tau), v(\tau))d\tau\right] +$$
$$+\xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_1^*(\tau), B(T, \tau)v(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau +$$
$$+\int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*^1(\tau), B(T, \tau)v(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau. \tag{14}$$

В силу условия 2 по определению момента T имеем

$$0 \in M_1, \ \int_0^T \sup_{v \in V} \lambda_B(T, \tau, v)\, d\tau \le 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_1^*(\tau), v(\tau)) \in \sup_{v \in V} \lambda_B(T, \tau, v) M_1, \ \tau \in [0, t_*),$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*^1(\tau), v(\tau)) \in \sup_{v \in V} \lambda_B(T, \tau, v) M_1, \ \tau \in [t_*, T].$$

Тогда с учетом леммы 1 получим

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_1^*(\tau), v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*^1(\tau), v(\tau))d\tau \in M_1,$$

поэтому имеем

$$-\left[\int_0^{t_*}\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T,\tilde{u}_1^*(\tau),\upsilon(\tau))d\tau+\int_{t_*}^{T}\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T,\tilde{u}_*^1(\tau),\upsilon(\tau))d\tau\right]\in M_1.$$

С учетом последнего включения, используя соотношения (12)–(14), получаем

$$\pi z(T)\in M_1+\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M_2-\xi(T)]d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)[M_2-\xi(T)]d\tau=$$

$$=M_1+\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)d\tau[M_2-\xi(T)]+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau[M_2-\xi(T)]=$$

$$=M_1+\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)d\tau-\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]+$$

$$+\left[\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]M_2=M_1+M_2\subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$, включение $M_1+M_2\subset M$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M_2 можно подтвердить применением аппарата опорных функций [10].

Для случая $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M_2$ достаточно использовать теорему 2.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА. РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ТИПА

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau)=\bigcap_{\upsilon\in V}\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon),\ (t,\tau)\in\Delta. \tag{15}$$

Условие 5. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0\in\bigcap_{\upsilon\in V}\{[W_B(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)]-\mathfrak{A}(t,\tau)[M_2-\xi(t)]\}.$$

Если выполнено условие 5, то многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ не пусто на множестве Δ и порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha\colon \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\},\quad \alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha\colon \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\},\ \tau\in[0,t].$$

Можно показать [12], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L}$-измеримо по τ, $\tau\in[0,t]$, а верхняя $\alpha^*(t,\tau)$ и нижняя $\alpha_*(t,\tau)$ разрешающие функции $\mathfrak{L}$-измеримы по переменной τ при фиксированном t.

Замечание 4. Если для некоторых допустимых матрицы $B(t,\tau)$, функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 3, то $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\alpha_*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Если для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 4, то $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)=\alpha^*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\xi(t)\in M_2,\ \int\limits_0^t\sup_{\upsilon\in V}\lambda_B(t,\tau,\upsilon)d\tau\le 1,\ \int\limits_0^t\alpha_*(t,\tau)d\tau<1\right\}. \quad (16)$$

Если включение и неравенства в фигурных скобках соотношения (16) не выполняются ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^2\in\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^2 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^2(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u,B(\mathrm{P}_*^2,\tau)\upsilon)-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau)\in\alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)[M_2-\xi(\mathrm{P}_*^2)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)$ компактнозначное отображение $U_*^2(\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [12] при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U_*^2(\tau,\upsilon)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*^2(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $u_*^2(\tau)=u_*^2(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$. Принимая во внимание формулу (1), получаем

$$\pi z(\mathrm{P}_*^2)=-\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^2}\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^2,u_*^2(\tau),\upsilon(\tau))d\tau+$$

$$+\xi(\mathrm{P}_*^2)+\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^2}(\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u_*^2(\tau),B(\mathrm{P}_*^2,\tau)\upsilon(\tau))-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau))\,d\tau. \quad (17)$$

В силу условия 2 по определению момента P_*^2 имеем

$$0\in M_1,\ \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^2,u_*^2(\tau),\upsilon(\tau))\in\sup_{\upsilon\in V}\lambda_B(\mathrm{P}_*^2,\tau,\upsilon)M_1,$$

$$\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^2}\sup_{\upsilon\in V}\lambda_B(\mathrm{P}_*^2,\tau,\upsilon)\,d\tau\le 1.$$

Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^2,u_*^2(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau \in M_1,$$

поэтому имеем

$$-\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*^2,u_*^2(\tau),\upsilon(\tau))d\tau \in M_1.$$

Вследствие выбора управления и по определению момента P_*^2 имеем

$$0 \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2),$$

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(B(\mathrm{P}_*^2,\tau)u_*^2(\tau),\upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2)],$$

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \sup_{\upsilon\in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)\,d\tau \le 1.$$

Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(B(\mathrm{P}_*^2,\tau)u_*^2(\tau),\upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau))d\tau \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2).$$

Таким образом, с учетом соотношения (17) получаем

$$\pi z(\mathrm{P}_*^2) \in M_1 + \xi(\mathrm{P}_*^2) + M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2) = M_1 + M_2 \subset M$$

и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*^2) \in M^*$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 5. Если для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функций $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 1, то $0 \in \mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau \in [0,t]$. Тогда выполнены условия 3, 5 и справедливо равенство

$$\sup_{\upsilon\in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon) = \alpha_*(t,\tau) = 0, \ \ \tau \in [0,t].$$

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t),\gamma(\cdot,\cdot)) =$$
$$= \left\{ t \ge 0\colon \int_0^t \sup_{\upsilon\in V} \lambda_B(t,\tau,\upsilon)\,d\tau \le 1, \int_0^t \alpha^*(t,\tau)\,d\tau \ge 1, \int_0^t \alpha_*(t,\tau)\,d\tau < 1 \right\}. \qquad (18)$$

Если при некотором $t>0$ $\alpha^*(t,\tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0,t]$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (18) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливы другие неравенства в фигурных скобках этого соотношения. В случае, когда неравенства соотношения (18) не выполняются при всех $t>0$, положим $\Theta(g(t),\gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \Theta]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим вначале случай $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot,\cdot) \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\Theta, \tau) d\tau - \int_t^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau) d\tau, \ t \in [0, \Theta].$$

По определению Θ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau > 0, \ h(\Theta) = 1 - \int_0^\Theta \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau \le 0.$$

Вследствие непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, \Theta]$ назовем «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$\widetilde{U}_2^*(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, B(\Theta, \tau)\upsilon) - \gamma(\Theta, \tau) \in \alpha^*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\},$$
$$\tau \in [0, t_*), \tag{19}$$

$$\widetilde{U}_*^2(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, B(\Theta, \tau)\upsilon) - \gamma(\Theta, \tau) \in \alpha_*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\},$$
$$\tau \in [t_*, \Theta]. \tag{20}$$

Многозначные отображения $\widetilde{U}_2^*(\tau, \upsilon)$ и $\widetilde{U}_*^2(\tau, \upsilon)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\alpha^*(\Theta, \tau)$ и $\alpha_*(\Theta, \tau)$ компактнозначные отображения $\widetilde{U}_2^*(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, t_*)$, и $\widetilde{U}_*^2(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [t_*, \Theta]$, при $\upsilon \in V$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримому селектору $\widetilde{u}_2^*(\tau, \upsilon)$ и $\widetilde{u}_*^2(\tau, \upsilon)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $\widetilde{u}_2^*(\tau) = \widetilde{u}_2^*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $\widetilde{u}_*^2(\tau) = \widetilde{u}_*^2(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, \Theta]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(\Theta) = -\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_2^*(\tau), \upsilon(\tau))d\tau + \int_{t_*}^\Theta \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_*^2(\tau), \upsilon(\tau))d\tau\right] +$$
$$+ \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2^*(\tau), B(\Theta, \tau)\upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau))d\tau +$$
$$+ \int_{t_*}^\Theta (\pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*^2(\tau), B(\Theta, \tau)\upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau))d\tau. \tag{21}$$

В силу условия 2 по определению момента Θ имеем

$$0 \in M_1, \ \int_0^{\Theta} \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\Theta, \tau, \upsilon)\, d\tau \le 1,$$

$$\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_2^*(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\Theta,\tau,\upsilon) M_1, \ \tau \in [0, t_*),$$

$$\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \lambda_B(\Theta,\tau,\upsilon) M_1, \ \tau \in [t_*, \Theta].$$

Тогда с учетом леммы 1 получим

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_2^*(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau \in M_1$$

и по предположению имеем

$$-\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_2^*(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi_B(\Theta, \widetilde{u}_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau\right] \in M_1.$$

С учетом последнего включения, используя соотношения (19)–(21), получаем

$$\pi z(\Theta) \in M_1 + \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta,\tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\, d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta,\tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\, d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta,\tau)\, d\tau [M_2 - \xi(\Theta)] + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta,\tau) d\tau [M_2 - \xi(\Theta)] =$$

$$= M_1 + \xi(\Theta)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta,\tau) d\tau - \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta,\tau) d\tau\right] + \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta,\tau) d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta,\tau) d\tau\right] M_2 =$$

$$= M_1 + M_2 \subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$, включение $M_1 + M_2 \subset M$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M_2 можно подтвердить применением аппарата опорных функций [10].

Для случая $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot,\cdot)) \in M_2$ достаточно использовать теорему 5.

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Лемма 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 выполнено условие 5, причем $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \notin M_2$. Тогда имеют место неравенства

$$\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon) \le \alpha_*(t,\tau), \ (t,\tau) \in \Delta, \quad (22)$$

$$\inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t,\tau,\upsilon) \ge \alpha^*(t,\tau), \ (t,\tau) \in \Delta. \quad (23)$$

Если к тому же выполнено условие 3, то неравенство (22) превращается в равенство. Если справедливо условие 4, то в равенство преобразуется неравенство (23). При этом если многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, то справедливы условия 3, 4 и в соотношениях (22), (23) имеет место равенство.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 выполнено условие 5. Тогда имеют место включения

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)).$$

Если к тому же выполнены условия 3 и 4 или если многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, то справедливы равенства

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)),\ \mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)).$$

Доказательства леммы 3 и теоремы 7 непосредственно следуют из конструкций соответствующих определений, замечаний и теорем.

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, для некоторых матрицы $B(t,\tau)$, допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ принимает выпуклые значения для всех (τ,υ), $\tau\in[0,T]$, $\upsilon\in V$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство автоматически вытекает из леммы 3 и теорем 6, 7.

ПРИМЕР («МАЛЬЧИК И КРОКОДИЛ»)

Динамика преследователя и убегающего задается соответственно уравнениями

$$\ddot{x}=u,\ x\in R^s,\ s\ge 2,\ \|u\|\le\rho,\ \rho>0,$$

$$\dot{y}=\upsilon,\ y\in R^s,\ s\ge 2,\ \|\upsilon\|\le\sigma,\ \sigma>0. \tag{24}$$

Преследование считается завершенным, если $\|x-y\|\le l$.

Исходную задачу (25) можно свести к конфликтно-управляемому процессу следующим образом. Введем новые переменные $(z_1,z_2)=z$,

$$z_1=x-y,\ \dot{z}_2=\dot{x}. \tag{25}$$

Продифференцируем по времени соотношения (25). С учетом исходных уравнений (24) получим

$$\dot{z}_1=z_2-\upsilon,\qquad \dot{z}_2=u. \tag{26}$$

Терминальное множество имеет вид $M^*=\{z:\|z_1\|\le l\}$, $M_0=\{z: z_1=0\}$, $M=\{z: \|z_1\|\le l,\ z_2=0\}$. Обозначим

$$M_1=l_1S,\ M_2=l_2S=M\,\overset{*}{-}\,M_1=lS\,\overset{*}{-}\,l_1S=(l-l_1)S,\ l_2=l-l_1,\ l>l_1.$$

Тогда

$$L=\{z: z_2=0\},\quad \pi=\begin{pmatrix}E&0\\0&0\end{pmatrix},\ \pi z=z_1,\ A=\begin{pmatrix}0&E\\0&0\end{pmatrix}.$$

Области управлений имеют вид

$$U=\left\{\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix}:\|u\|\le\rho\right\},\ V=\left\{\begin{pmatrix}\upsilon\\0\end{pmatrix}:\|\upsilon\|\le\sigma\right\}.$$

Фундаментальная матрица однородной системы (26) имеет вид $e^{At}=\begin{pmatrix}E&tE\\0&0\end{pmatrix}$.

Тогда получим $\pi e^{At}U=\rho tS$, $\pi e^{At}V=\sigma S$, $M=lS$, где S — единичный шар подпространства L с центром в нуле.

Условие Понтрягина не выполнено на интервале $[0, \sigma / \rho)$:

$$\pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} V = \rho t S \overset{*}{-} \sigma S = (\rho t - \sigma) S = \varnothing, \ t \in [0, \sigma / \rho).$$

Выберем функцию сдвига $\gamma(t) \equiv 0$ и положим

$$B(t) = \begin{cases} (\rho / \sigma) t E, & 0 \le t \le \sigma / \rho, \\ E, & t > \sigma / \rho. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W_B(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] = \pi e^{At} U \overset{*}{-} \pi e^{At} B(t) V = \begin{cases} \{0\}, \ t \in [0, \sigma / \rho], \\ (\rho t - \sigma) S, \ t > \sigma / \rho. \end{cases}$$

С помощью простых вычислений получаем

$$\Lambda_B(t, \tau, v) = \begin{cases} [\lambda \ge 0 \colon (1 - (\rho / \sigma) t) v \subset \lambda l_1 S], \ 0 \le t \le \sigma / \rho, \\ \{0\}, \quad t > \sigma / \rho, \end{cases}$$

$$\lambda(t, v) = \begin{cases} \dfrac{(1 - (\rho / \sigma) t) \| v \|}{l_1}, \ t \in [0, \sigma / \rho], \\ 0, \quad t > \sigma / \rho, \end{cases} \qquad \max_{v \in \sigma S} \lambda(t, v) = \begin{cases} \dfrac{\sigma - \rho t}{l_1}, \ t \in [0, \sigma / \rho], \\ 0, \quad t > \sigma / \rho. \end{cases}$$

Поскольку

$$\varphi_B(t, U, V) = \pi e^{At} (E - B(t)) V = \begin{cases} (\sigma - \rho t) S, \quad t \in [0, \sigma / \rho], \\ \{0\}, \quad t > \sigma / \rho, \end{cases}$$

имеем $\varphi_B(t, U, V) = \max\limits_{v \in \sigma S} \lambda(t, v) l_1 S$ и условие 1 выполнено.

Если $l_1 \ge \sigma^2 / 2\rho$, то при всех $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$(\rho t^2 / 2) - \sigma t + l_1 \ge 0. \tag{27}$$

Поэтому для $l_1 \ge \sigma^2 / 2\rho$ при всех $t \ge 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \max_{v \in \sigma S} \lambda(\tau, v) \, d\tau \le \frac{\sigma t - (\rho t^2 / 2)}{l_1} \le 1.$$

Положим $\xi(t) = \pi e^{At} z = z_1 + t z_2$. Так как выполнено условие 1, справедливы условия 2, 3 и $\alpha_*(t, \tau, v) = \sup\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$. Если $\xi(t) \in l_2 S$, то в силу теоремы 1 или теоремы 2 игра может быть закончена в момент t с использованием управления вида (4). При этом с учетом неравенства (27) наименьший такой момент времени удовлетворяет уравнению

$$\| z_1 + t z_2 \| = (\rho t^2 / 2) - \sigma t + l, \ t \le \sigma / \rho.$$

Пусть $\xi(t) \notin l_2 S$. Тогда при $t - \tau \le \sigma / \rho$ верхняя разрешающая функция $\alpha^*(t, \tau, v)$ определяется из соотношения $\| \rho(t - \tau) v - \alpha \xi(t) \| = \alpha l_2 + \rho(t - \tau)$, $v \in S$, и функция $\alpha^*(t, \tau, v)$ является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|\xi(t)\|^2-(l_2)^2)\alpha^2-2[(v,\xi(t))+\rho(t-\tau)l_2]\alpha-[\rho^2(t-\tau)^2(1-\|v\|^2)]=0$$

относительно α, если $\xi(t)\notin l_2 S$, $v\in S$.

После вычислений получим

$$\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)=0,\ t-\tau\le\sigma/\rho, \tag{28}$$

причем минимум достигается на векторе $v=-(\xi(t)/\|\xi(t)\|)$.

Пусть $\xi(t)\notin l_2S$ и $t-\tau>\sigma/\rho$. Тогда верхняя разрешающая функция $\alpha^*(t,\tau,v)$ определяется из соотношения $\|\sigma v-\alpha\xi(t)\|=\alpha l_2+\rho(t-\tau)$, $v\in S$, и функция $\alpha^*(t,\tau,v)$ является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|\xi(t)\|^2-(l_2)^2)\alpha^2-2[\sigma(v,\xi(t))+\rho(t-\tau)l_2]\alpha-[\rho^2(t-\tau)^2-\sigma^2\|v\|^2]=0$$

относительно α, если $\xi(t)\notin l_2S$, $v\in S$.

После вычислений получим

$$\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)=\frac{\rho(t-\tau)-\sigma}{\|\xi(t)\|-l_2},\qquad t-\tau>\sigma/\rho. \tag{29}$$

Определим момент окончания игры для $t>\sigma/\rho$. Для этого с учетом равенств (28), (29) запишем

$$\int_0^t\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau=\int_0^{t-(\sigma/\rho)}\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau+\int_{t-(\sigma/\rho)}^{t}\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau=$$

$$=\int_0^{t-(\sigma/\rho)}\frac{\rho(t-\tau)-\sigma}{\|\xi(t)\|-l_2}\,d\tau=1.$$

Из последнего равенства получим уравнение

$$\|z_1+tz_2\|=(\rho t^2/2)-\sigma t+l-l_1. \tag{30}$$

Наименьший положительный корень уравнения (30) является моментом окончания игры в силу теоремы 3 с использованием управления вида (3). Легко проверить, что справедливо условие 4 и наименьший положительный корень уравнения (30) является моментом окончания игры в силу теоремы 4 с использованием управления вида (4).

При $t=0$ левая часть уравнения (30) равна $\|z_1\|$ и с ростом t растет линейно, а правая — равна $l-l_1$ и растет квадратично. Так как $\|z_1\|>l-l_1$, для любых z_1 и z_2 момент окончания игры конечен.

Равенство $z_1+tz_2=0$ может быть выполнено только после выполнения равенства (30), поэтому этот случай не рассматривается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема сближения управляемых объектов с различной инерционностью в игровых задачах динамики. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции специального типа. На их основе предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса в классе квазистратегий и контруправлений. Сравниваются гарантированные времена окончания игры для разных схем сближения управляемых объектов с различной инерционностью. Приведен иллюстративный пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
2. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 271. P. 69–85.
3. Chikrii A.A., Chikrii V. K. Image structure of multi valued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
4. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
6. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
13. Chikrii A.A., Matychyn I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives. *Trudy Instituta Mathematiki i Mechaniki URo RAN.* 2011. Vol. 17, N 2. P. 256–270.
14. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
15. Чикрий А.А., Дзюбенко К. Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. *Проблемы управления и информатики.* 1997. № 1. С. 92–107.
16. Eidelman S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2000. Vol. 52, N 11. P. 1787–1806.
17. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics.* 1987. Vol. 23, N 4. P. 437–445.
18. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика.* 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
19. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. of the Steklov Institute of Mathemaics.* 2010. Suppl. 1. P. s1–s17.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ.* 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Journal Computers and Mathematics with Applications.* New York: Pergamon, 2002. Vol. 44. P. 835–851.
22. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ.* 2000. № 3. С. 3–32.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.* 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
25. Rappoport I.S. On guaranteed result in game problems of controlled objects approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. Vol. 52, Iss. 3. P. 48–64. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i3.40.

26. Belousov A.A., Kuleshyn V.V., Vyshenskiy V.I. Real-time algorithm for calculation of the distance of the interrupted take-off. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, Iss. 4. P. 38–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i4.40.

27. Chikriy A.A., Chikrii G.Ts., Volyanskiy K.Yu. Quasilinear positional integral games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2001. Vol. 33, Iss. 10. P. 31–43. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v33.i10.40.

28. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, Iss. 5. P. 12–26. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.20.

Надійшла до редакції 31.07.2020

Й.С. Раппопорт

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

Анотація. Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів з різною інерційністю в ігрових завданнях динаміки на основі сучасної версії методу розв'язувальних функцій. Для таких об'єктів характерно, що на деякому інтервалі часу не виконується умова Понтрягіна, що істотно ускладнює застосування методу розв'язувальних функцій до цього класу ігрових задач динаміки. Запропоновано метод розв'язання таких задач, пов'язаний з побудовою деяких скалярних функцій (розв'язувальних), що якісно характеризують хід зближення керованих об'єктів з різною інерційністю та ефективність прийнятих рішень. Метод розв'язувальних функцій дає змогу ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень в обгрунтуваннях ігрових конструкцій і отриманні на їхній основі змістовних результатів. Порівнюються гарантовані часи закінчення гри для різних схем зближення керованих об'єктів. Наведено ілюстративний приклад.

Ключові слова: керовані об'єкти з різною інерційністю, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

I.S. Rappoport

RESOLVING FUNCTIONS METHOD FOR GAME PROBLEMS OF RELEASEOF CONTROLLED OBJECTS WITH DIFFERENT INERTIA

Abstract. The problem of convergence of controlled objects with different inertia in game dynamics problems is considered on the basis of the modern version of the method of resolving functions. For such objects, it is characteristic that the Pontryagin condition is not satisfied on a certain time interval, which significantly complicates the application of the method of resolving functions to this class of game dynamics problems. A method for solving such problems is proposed, which is associated with the construction of some scalar functions (resolving), which qualitatively characterize the course of con vergence of controlled objects with different inertia and the efficiency of the decisions made. The method of resolving functions is that it allows you to effectively use the modern technique of multivalued mappings in substantiating game constructions and obtaining meaningful results based on them. The guaranteed end times of the game are compared for different schemes of approaching controlled objects. An illustrative example is given.

Keywords: controlled objects with different inertia, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.