

**ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СЛАУ С НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

**Аннотация.** Рассмотрены и исследованы методы решения переопределенных СЛАУ, у которых основная матрица известна точно, а правая часть содержит погрешность. Предполагается, что покомпонентная погрешность является случайной величиной, принадлежащей малому ограниченному интервалу. При точных значениях правой части система имеет однозначное решение. В основу развиваемого подхода положено гарантированное оценивание интервалов принадлежности точного решения, по которым можно судить о качестве получаемых приближенных оценок решений. Эти гарантированные оценки используются при сравнении методов и оценивании их эффективности. По результатам численного моделирования сделан сравнительный анализ методов и даны рекомендации по их практическому применению.

**Ключевые слова:** переопределенные СЛАУ, оценивание, гарантированный интервал, сингулярное разложение, ограниченная погрешность, МНК, обусловленность.

**ВВЕДЕНИЕ**

При математической интерпретации получаемых при проведении экспериментов неточных данных, т.е. содержащих погрешности, часто приходится решать переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Неопределенность описания таких систем может включать неточно заданную правую часть, а также в некоторых случаях известную приближенно основную матрицу СЛАУ. Эта проблема не является новой. Она была сформулирована ранее, но и в настоящее время представляет интерес для специалистов по численным методам и исследователей, которые на практике решают подобные задачи. В монографии [1] обобщены и представлены полученные методы и результаты исследований.

В этом же направлении работали известные отечественные ученые, которые внесли большой вклад в развитие теории и методов решения СЛАУ, содержащих возмущения [2–5]. Например, в работах [2, 3] рассмотрен и исследован важный вопрос о влиянии возмущений, содержащихся в основной матрице, на получаемое в результате нормальное псевдорешение (обычное и взвешенное) для достаточно общего класса СЛАУ с неточно заданными матрицей и правой частью.

В настоящей статье для оценки качества получаемого приближенного решения в отличие от многих известных методов используется гарантированный подход, в котором решение оценивается по интервалам принадлежности точного решения, получаемым при наихудшей реализации погрешности. Такой подход используется, например, при решении задач оценивания и управления в условиях неопределенности [6].

В данной работе рассматриваемая матрица системы задана точно, а неточной является правая часть СЛАУ. При этом предполагается, что для точных данных система совместна. Именно в этом случае считается, что с увеличением переопределенности приближенное решение (а именно только такое решение может быть найдено) должно асимптотически приближаться к точному. Данное свойство ассоциируется с известным методом решения переопределенных СЛАУ — методом наименьших

квадратов (МНК), а также с его модификациями [7]. Широкое применение эти методы получили в статистике, идентификации систем, регрессионном анализе и т.д. Решение переопределенных СЛАУ с помощью МНК при некоторых статистических свойствах аддитивной погрешности задания правых частей системы согласно сформулированному утверждению с вероятностью почти единица стремится к точному, когда число уравнений стремится к бесконечности, т.е. математическое ожидание оценки есть точное решение.

В настоящей работе для более общей трактовки погрешности в виде принадлежности ее ограниченному множеству на основе гарантированного оценивания исследуются свойства приближенных решений, получаемых различными способами, в том числе и МНК.

Первые исследования рассматриваемой проблемы проведены в работе [8], а их дальнейшее развитие сделано в настоящей статье. Полученные результаты позволяют при решении практических задач использовать способ, который более приемлем для реализуемых в каждом конкретном случае погрешностей.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеем переопределенную СЛАУ

$$Ax = b, \quad (1)$$

где  $A$  — матрица размера  $m \times n$  ( $m > n$ ), а векторы  $x$  и  $b$  имеют размерности  $n$  и  $m$  соответственно. Рассмотрим случай, когда при точных  $A$  и  $b$  система совместна. Пусть теперь вместо точной правой части имеем ее приближенное значение

$$b = b_T + \xi, \quad (2)$$

где  $\xi$  — аддитивная погрешность задания  $b$ . Компоненты вектора  $\xi$  — случайные числа, о которых известно только, что они ограничены неравенством

$$|\xi_i| \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \varepsilon_i \geq 0. \quad (3)$$

Считаем  $\varepsilon_i$  априори известными. Кроме ограничений (3), никаких других вероятностных свойств случайных реализаций  $\xi_i$  неизвестно. Поэтому при исследованиях будем использовать интервальный анализ и гарантированные оценки множеств принадлежности точных решений системы (1). При этом целесообразно перейти от ограничений (3) к более простому их представлению. Пусть  $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$ , а  $\gamma_k = \varepsilon_k / \varepsilon$  ( $k = \overline{1, m}$  и  $\gamma_k = 1$ , при этом индекс  $k$  совпадает с минимальным  $\varepsilon_i$ ). Если умножить каждое уравнение системы (1) на соответствующее ему значение  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), то получим новую СЛАУ

$$A_\gamma x = b_\gamma, \quad (4)$$

где элементы  $k$ -й строки матрицы  $A_\gamma$  равны  $a_{\gamma ki} = \gamma_k a_{ki}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а компоненты вектора  $b_{\gamma k}$  записываются как

$$b_{\gamma k} = \gamma_k b_k + \xi_{\gamma k}, \quad \xi_{\gamma k} = \gamma_k \xi_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

В результате для системы (4) вместо ограничений (3) имеем

$$|\xi_{\gamma k}| \leq \varepsilon, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

а решение (4) при ограничениях (5) и его гарантированные оценки сохраняются неизменными, т.е. совпадающими с задачей (1)–(3).

## МЕТОДЫ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим методы, которые позволяют находить приближенное решение системы (4), а значит и системы (1), а также вычислять интервалы, в которых гарантированно содержится точное решение. Начнем с известного стандартного МНК и метода, в котором используется сингулярное разложение (SVD) матрицы  $A_\gamma$ .

**МНК и SVD-методы.** Решение (1) с помощью МНК сводится к решению квадратной системы уравнений

$$A_\gamma^T A_\gamma x = A_\gamma^T b, \quad (6)$$

где  $A_\gamma^T$  — транспонированная матрица  $A_\gamma$ . Решение (6) существует, если  $\det(A_\gamma^T A_\gamma) \neq 0$ . В противном случае поставленная задача является вырожденной и соответственно некорректно поставленной. При неточно заданной правой части, когда матрица  $A_\gamma^T A_\gamma$  является плохо обусловленной, задача также будет некорректной. А это приводит к большой чувствительности решения к имеющимся погрешностям. В таких случаях для решения (6) необходимо использовать методы регуляризации [9].

В корректных случаях возникает естественный вопрос, как взаимосвязаны получаемое из (6) приближенное решение и погрешность задания правой части. В случае (3) находят покомпонентную гарантированную оценку погрешности найденного с помощью МНК решения (1). Для каждой искомой компоненты  $x_i$  с учетом имеющейся погрешности в виде (5) можно найти только приближенное значение  $\hat{x}_i = x_{iT} + \delta x_i$ , где  $\delta x_i$  — погрешность получаемого решения. Ввиду линейности (6) имеем

$$A_\gamma^T A_\gamma \delta x = A_\gamma^T \xi_\gamma, \quad (7)$$

поскольку  $A_\gamma x_T = b_{\gamma T}$ . Для погрешности  $\xi_\gamma$ , ограниченной условием (5), можно найти гарантированный интервал принадлежности точного значения  $x_{iT}$ , т.е. для каждого  $i$  установить интервал

$$[\hat{x}_i - \Delta_i, \hat{x}_i + \Delta_i], \quad (8)$$

которому принадлежит  $x_{iT}$  при наиболее неблагоприятной реализации  $\xi_\gamma$ , удовлетворяющей (5). Решение (7) запишем в виде

$$\delta x_i = \frac{1}{\det A^*} \sum_{j=1}^n A_{ji}^* \sum_{q=1}^m A_{\gamma j q}^T \cdot \xi_q = \sum_{q=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \frac{A_{ji}^*}{\det A^*} A_{\gamma j q}^T \right) \cdot \xi_{\gamma q} = \sum_{q=1}^m \bar{a}_{iq} \cdot \xi_{\gamma q}, \quad (9)$$

где  $A^* = A_\gamma^T A_\gamma$ ,  $A_{ji}^*$  — алгебраические дополнения матрицы  $A^*$ ,  $(A_\gamma^T \xi_\gamma)_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $A_\gamma^T \xi_\gamma$ ,  $\bar{a}_{iq} = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ji}^*}{\det A^*} \cdot A_{\gamma j q}^T$ . Тогда гарантированный интервал (8), которому принадлежит точное решение, определяется выражением

$$\Delta_i = \varepsilon \sum_{q=1}^m |\bar{a}_{iq}|. \quad (10)$$

Из (10) получаем относительную оценку ширины гарантированного интервала в виде

$$\bar{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{\varepsilon} = \sum_{q=1}^m |\bar{a}_{iq}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Как видно из (11), относительная погрешность решения при наихудшей реализации шумов в исходных данных полностью определяется свойствами матрицы  $A$  и, в первую очередь, ее числом обусловленности.

Решение переопределенной системы (4) с использованием SVD-разложения матрицы  $A_\gamma$  можно получить, если выполнить следующие преобразования. Матрицу  $A_\gamma$  согласно SVD [7] представим в виде

$$A_\gamma = U \Sigma V^T, \quad (12)$$

где  $U$  — ортогональная матрица размера  $m \times m$ ;  $V$  — ортогональная матрица размера  $n \times n$ ;  $\Sigma$  — матрица  $m \times n$  сингулярных чисел  $\sigma_i$ , расположенных на диагонали в невозрастающем порядке. Квадратные матрицы  $U$  и  $V$  невырождены и обладают свойствами

$$UU^T = U^T U = E, \quad VV^T = V^T V = E, \quad U^T = U^{-1}, \quad V^T = V^{-1}.$$

При сингулярном разложении имеем важную информацию о структуре матрицы  $A$ . Если  $m > n$ , то, представив матрицы  $U$  и  $\Sigma$  в блочном виде,

$$U = [U_n \quad U_{m-n}], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $\Sigma_0$  — квадратная диагональная матрица, получим

$$A_\gamma = U_n \Sigma_0 V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^T, \quad (13)$$

где  $u_i$  и  $v_i$  — вектор-столбцы матриц  $U_n$  и  $V$ .

Разложение (13) позволяет по количеству ненулевых сингулярных чисел определять ранг матрицы  $A_\gamma$  и строить различные приближения  $A_{\gamma k} = \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^T$  ( $k < n$ ), для которых справедливы оценки  $\|A_\gamma - A_{\gamma k}\|_2 = \sigma_{k+1}$ . Это позволяет эффективно работать с плохо обусловленными матрицами, рассматривая для очень малых  $\sigma_{k+1}$  вместо  $A_\gamma$  их приближенные матрицы неполного ранга. С помощью (13) система (4) приводится к виду

$$\Sigma_0 V^T x = U_n^T b_\gamma. \quad (14)$$

При этом условие  $U_{m-n}^T b_\gamma = 0$  определяет разрешимость переопределенной системы (4) (принадлежность  $b_\gamma$  ортогональному подпространству); по условию рассматриваемой задачи оно выполняется для  $b = b_T$ . При неточно заданной правой части имеем  $U_{m-n}^T \cdot \xi = \eta$ , где  $\eta$  определяет невязку выполнения (4) для значения  $\hat{x}$ , получаемого из равенства (14), которое при полноранговости матрицы  $\Sigma_0$  запишем как

$$\hat{x} = V \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot U_n^T b_\gamma. \quad (15)$$

Обозначим  $W = V \cdot \Sigma_0 \cdot U_n^T$  и представим эту матрицу в виде  $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$ , где  $w_k$  —

вектор-строки матрицы  $W$  порядка  $m$ . Тогда из (15) следует

$$\hat{x}_k = w_k \cdot b_\gamma, \quad k = \overline{1, n}, \quad (16)$$

т.е. получено приближенное решение системы (6), найденное SVD-методом.

Далее найдем гарантированный интервал принадлежности точного решения  $x_T$ , который с учетом (16) и (4) запишем в виде

$$x_{Tk} \in [\hat{x}_k - \Delta_k, \hat{x}_k + \Delta_k], \quad \Delta_k = \varepsilon \sum_{j=1}^m |w_{kj}|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Из (17) находим относительную ширину гарантированного интервала

$$\bar{\Delta}_k = \frac{\Delta_k}{\varepsilon} \sum_{j=1}^m |w_{kj}|. \quad (18)$$

Представление (18) свидетельствует о том, что  $\bar{\Delta}$  зависит только от матрицы  $A$ , а точнее от матриц SVD-разложения.

**Регуляризованное решение в некорректном случае.** Если матрица  $A^*$  вырождена или плохо обусловлена, т.е. среди сингулярных чисел матрицы  $\Sigma_0$  имеются нулевые или очень малые числа, то задача оценивания считается некорректно поставленной. В этом случае необходимо воспользоваться методом регуляризации [9], позволяющим найти регуляризованное решение. При решении на основе МНК вместо системы (6) рассмотрим вариационную задачу, в которой находится элемент, минимизирующий сглаживающую функцию

$$\|A_\gamma^T A_\gamma x - A^T b_\gamma\|_2^2 + \alpha \|x\|_2^2, \quad (19)$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации. При этом параметр  $\alpha$  выбирается согласно принципу невязки или находится его квазиоптимальное значение [9].

Регуляризованное решение на основе SVD-разложения можно получить, если представление (13) для матрицы  $A_\gamma$  записать с учетом особенности  $\Sigma_0$  в следующем виде:

$$A_\gamma = U_n \Sigma_0 V = [U_r \ U_{n-r}] \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & \Sigma_{n-r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = U_r \Sigma_r V_r^T + U_{n-r} \Sigma_{n-r} V_{n-r}^T,$$

где  $\Sigma_r$  содержит все существенные сингулярные числа, а на диагонали матрицы  $\Sigma_{n-r}$  расположены нули и все очень малые сингулярные числа матрицы  $\Sigma_0$ . Индексы у остальных матриц означают число столбцов при их блочном разбиении. Такое представление позволяет с учетом особенности матрицы  $\Sigma_{n-r}$  находить регуляризованную оценку решения из системы уравнений

$$\begin{aligned} U_r \Sigma_r V_r^T x &= b_\gamma, \\ U_{n-r} \Sigma_{n-r} V_{n-r}^T x &= 0. \end{aligned}$$

Данная система уравнений эквивалентна следующей системе:

$$Vx = \bar{b}, \quad \text{где } \bar{b} = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} U_r^T b_\gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить регуляризованное решение в виде

$$\hat{x}^r = V^T \bar{b}. \quad (20)$$

Полученные таким образом регуляризированные решения как из (19), так и в явном виде (20) имеют свойство сходимости к нормальному решению, когда погрешности стремятся к нулю, т.е. при точной правой части.

**Оптимально-взвешенный МНК (ОВМНК).** При ОВМНК решения (4) оценки  $\hat{x}$  получают нахождением минимизирующего элемента следующей функции:

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \alpha_s (\langle a^s, x \rangle - b_{\gamma_s})^2, \quad \alpha_s \geq 0, \quad (21)$$

где  $\alpha_s$  — весовые коэффициенты, подлежащие выбору;  $a^s$  ( $s = \overline{1, m}$ ) — вектор-строки матрицы  $A_\gamma$ .

При необходимом условии экстремума (21) имеем квадратную линейную систему  $n$ -го порядка

$$\overline{A}x = \overline{b}, \quad (22)$$

где  $\overline{A}$  состоит из элементов  $\overline{a}_{ij} = \sum_{s=1}^m \alpha_s a_i^s a_j^s$ , а вектор  $\overline{b}$  размерности  $n$  имеет

$$\text{компоненты } \overline{b}_i = \sum_{s=1}^m \alpha_s a_i^s b_{\gamma_s}.$$

Решение системы (22) при невырожденной матрице  $\overline{A}$  запишем в виде

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n \overline{A}_{ji} \sum_{s=1}^m \alpha_s a_i^s b_s = \sum_{s=1}^m \alpha_s \left( \sum_{j=1}^n \overline{A}_{ji} a_i^s \right) b_s = \sum_{s=1}^m \alpha_s \overline{a}_i^s b_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где  $\overline{A}_{ji}$  — алгебраические дополнения к элементам матрицы  $\overline{A}$ ;  $\overline{a}_i^s = \sum_{j=1}^n \frac{\overline{A}_{ji}}{\det A} a_i^s$ ;  $a_i^s$  —  $i$ -я компонента вектора  $a^s$ .

Каждый элемент  $\overline{a}_i^s$  в (23) является дробно-рациональной функцией  $\alpha_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ), причем как в числителе, так и в знаменателе фигурируют однородные функции. В случае неточно заданной правой части система (23) дает приближенную оценку значения  $\hat{x}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Для фиксированного набора  $\alpha_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ) и ограниченных условием (5) помех можно, используя (23), вычислить гарантированные интервалы принадлежности точных значений, определяемых (8), в которых

$$\Delta_i = \varepsilon \sum_{s=1}^m \alpha_s |\overline{a}_i^s| \quad \text{или} \quad \overline{\Delta}_i = \frac{\Delta_i}{\varepsilon} = \alpha_s \sum_{s=1}^m |\overline{a}_i^s|. \quad (24)$$

Из (24) следует, что  $\overline{\Delta}_i = \Delta_i(\alpha)$ , где  $\alpha$  — вектор с компонентами  $\alpha_s$ . На практике часто выбирают  $\alpha_s$  обратно пропорционально ограничению на компоненты погрешности. В случае (5) такой выбор соответствует обычному МНК, т.е. с учетом в (4) с помощью  $\gamma_k$ . Однако, приняв во внимание дробно-рациональную зависимость  $\overline{a}_i$  от  $\alpha$ , можно предполагать лучшую оценку, если минимизировать (24) как функцию от  $\alpha$ , т.е. находить  $\alpha_s$  из следующей задачи:

$$\sum_{s=1}^m \alpha_s |\overline{a}_i| \rightarrow \min \quad (25)$$

на множестве  $\alpha_s \in [0, 1]$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Такая задача с учетом нелинейности этой функции от  $\alpha$ , приводящей к необходимости находить глобальный минимум,

становится достаточно сложной особенно при больших  $m$ . Однако, имея аналитическое представление этой функции и учитывая ее гладкость, при современных вычислительных возможностях можно в определенных случаях находить ее решение. При этом могут применяться методы многомерной стохастической оптимизации с использованием только значений целевой функции в конечном количестве точек без нахождения значений ее производных. Следует также заметить, что задача (25) решается отдельно для каждого  $i$  независимо от других компонент. Это означает, что минимальная ширина гарантированного интервала для каждой компоненты определяется своим набором весовых коэффициентов. При этом сохраняется принадлежность гарантированному интервалу точного значения соответствующей компоненты. Если вектор  $\bar{b}$  принимает точное значение, то получаем точное значение вектора  $x$  при любом  $\alpha$ .

**Комбинаторный способ решения.** Представим исходную систему (4) в виде

$$\langle a_s, x \rangle = b_{\gamma_s}, \quad s = \overline{1, m}, \quad (26)$$

где  $a_s$  является  $s$ -й вектор-строкой матрицы  $A_\gamma$ . Из (26) образуем совокупность квадратных систем выбором индексов  $s$ , равных  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , из их допустимых значений на множестве  $I = \{i : 1 \leq i \leq m\}$ . Количество таких квадратных систем равно  $C_m^n$ . Среди них оставляем только невырожденные системы, число которых будет меньше или равно  $C_m^n$ . Множество таких систем запишем в виде

$$A^j x = b^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad M \leq C_m^n. \quad (27)$$

Детерминант каждой системы в (27) не равен нулю и для каждой этой системы запишем решение

$$x_i^j = \sum_{s=1}^n a_s^j b_s^j, \quad (28)$$

где  $a_s^j = \frac{A_{si}^j}{\det A^j}$ ,  $A_{si}^j$  — алгебраические дополнения к соответствующим элементам матриц  $A^j$ .

Каждая компонента  $b_s^j$  в (28) содержит ошибку, удовлетворяющую (5). В результате вместо точной оценки получим оценку  $\hat{x}_i^j$ , которая позволяет вычислить согласно (8) гарантированный интервал принадлежности точного решения, где

$$\Delta_i^j = \varepsilon \sum_{s=1}^n |a_s^j| \quad \text{или} \quad \bar{\Delta}_i^j = \frac{\Delta_i^j}{\varepsilon} = \sum_{s=1}^n |a_s^j|. \quad (29)$$

Таким образом, для каждой системы  $j$  имеем покомпонентную оценку решения и свой гарантированный интервал, в котором содержится точное решение. Полученные оценки соответствуют наиболее неблагоприятным реализациям погрешности  $\xi_{\gamma k}$ . Однако в реальности вероятность реализации такой погрешности очень мала и следует предвидеть более благоприятные реализации, задействуя следующие процедуры. Найдем пересечение интервальных множеств (8) с учетом (29) при одинаковых  $i$ , но разных  $j$ . Получим

$$\bigcap_{j=1}^M [\hat{x}_i^j - \Delta_i^j, \hat{x}_i^j + \Delta_i^j], \quad i = \overline{1, n}.$$

Результатом такого пересечения является некоторый интервал  $[x_{i \min}, x_{i \max}]$ , где  $x_{i \min} = \max_j (\hat{x}_i^j - \Delta_i^j)$ ,  $x_{i \max} = \min_j (\hat{x}_i^j + \Delta_i^j)$ . Тогда зададим оценку

$$\hat{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i \min} + x_{i \max}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (30)$$

а гарантированный интервал принадлежности точного значения определим его полушириной

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(x_{i \max} - x_{i \min}).$$

В результате для каждой компоненты  $x_i$  устанавливается приближенное решение с указанием минимального гарантированного интервала, зависящего от случайно реализуемой погрешности.

#### РЕШЕНИЕ ПРИ АПРИОРИ НЕИЗВЕСТНОМ $\varepsilon$

Рассмотренные ранее методы определения гарантированных оценок решений предполагают, что априори известны параметры  $\varepsilon_i$ , ограничивающие аддитив-

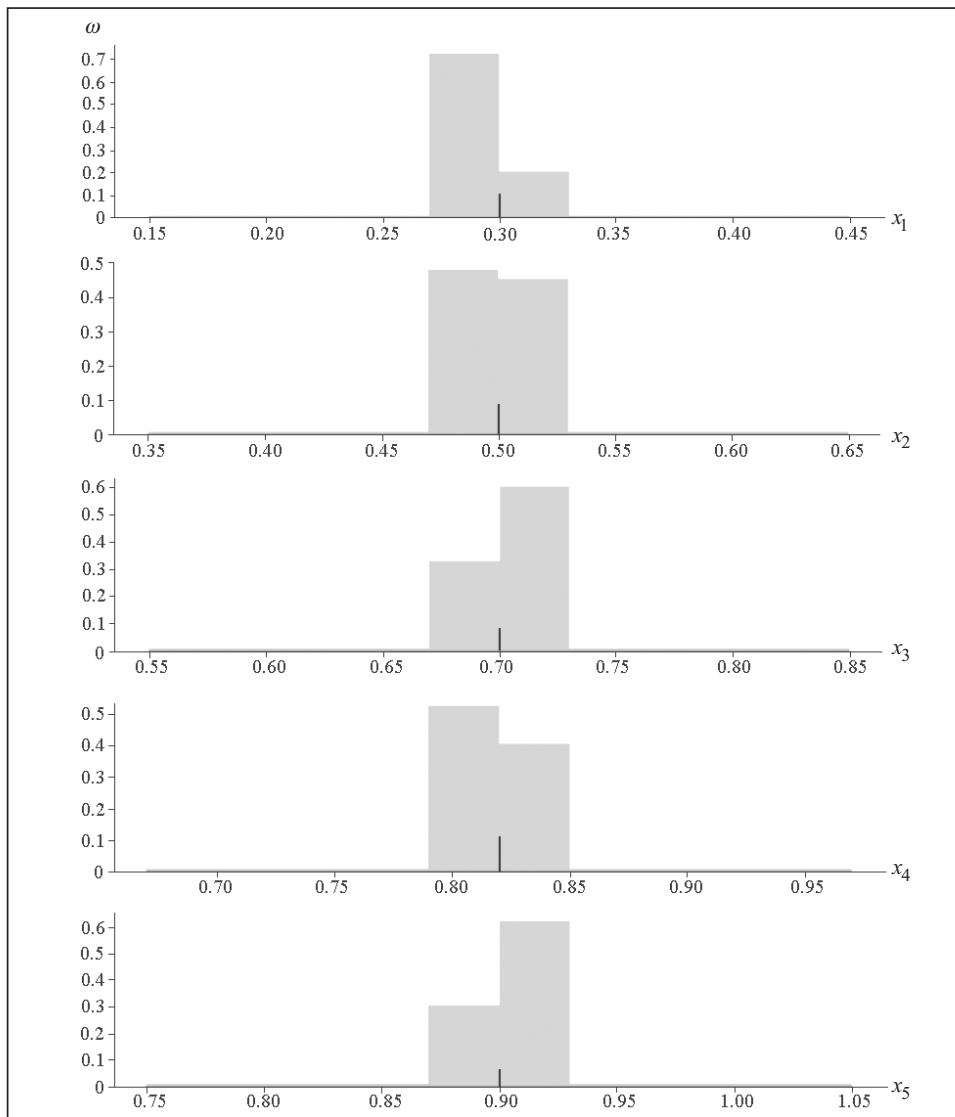


Рис. 1. Распределение оценок  $\hat{x}_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) для СЛАУ при  $n = 5$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $m = 24$  для нормально распределенной погрешности  $\xi_i$



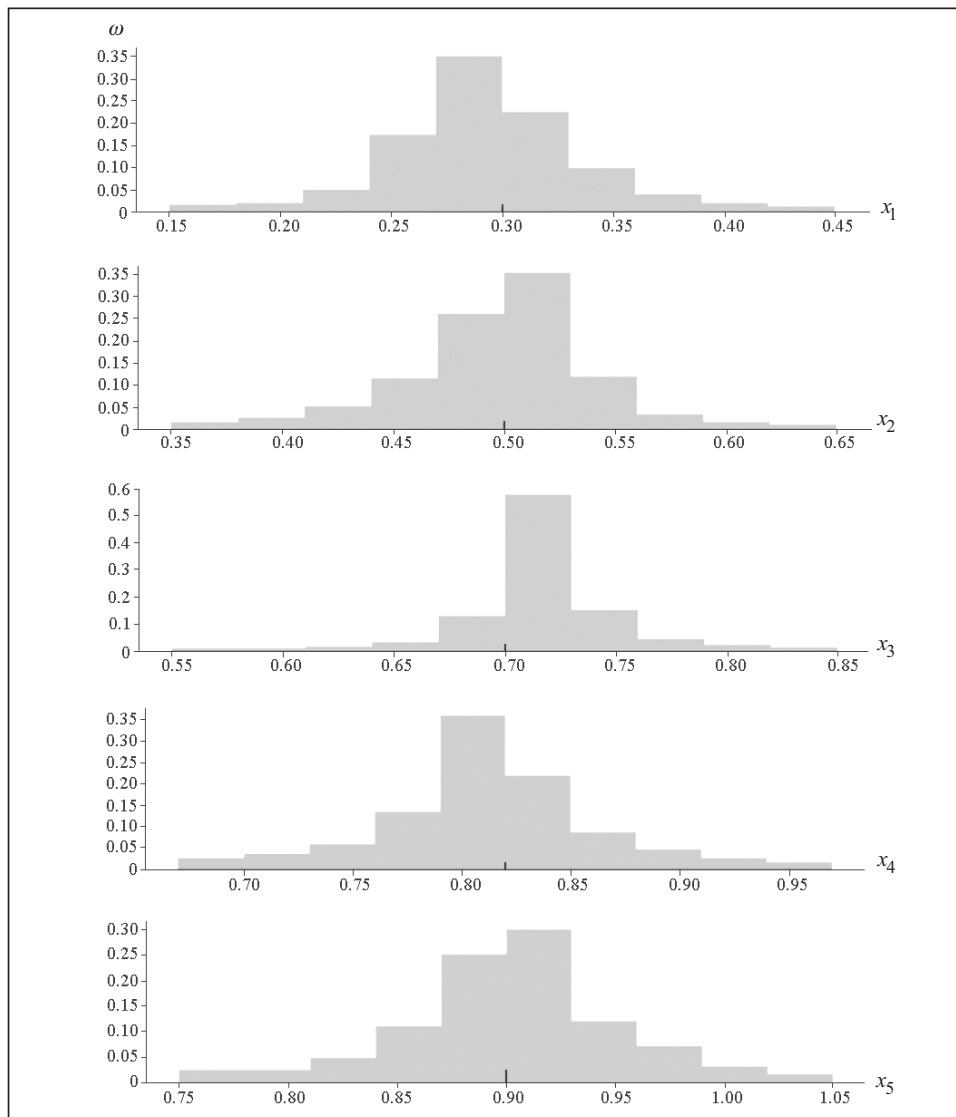


Рис. 2. Распределение оценок  $\hat{x}_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) для СЛАУ при  $n = 5$ ,  $m = 24$ ,  $\varepsilon = 0.01$  для равномерно распределенной погрешности  $\xi_i$

ные погрешности задания правой части СЛАУ. При использовании МНК, SVD-метода, ОБМНК оценка ширины гарантированных интервалов полностью определялась конкретными значениями элементов матрицы  $A$  и параметрами  $\varepsilon_i$ , ограничивающими область принадлежности допустимых реализаций погрешности. При этом несущественно, какая погрешность реализовывалась. От реализуемой погрешности зависела только оценка вектора  $x$ . Абсолютная оценка устанавливает ширину интервала, в котором гарантированно содержится точное значение, а относительная оценка определяет, насколько хуже или лучше получаемая оценка вектора  $x$  по отношению к ограничению (3). Тогда при одинаковых  $\varepsilon_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , по относительной оценке можно судить о качестве получаемого решения разными методами, кроме комбинаторного. Этого достаточно для выбора применительно к рассматриваемой СЛАУ наиболее подходящего метода его решения независимо от реализуемой погрешности, когда ограничение (3) выполняется, но значение  $\varepsilon$  априори неизвестно. При этом не требуется знать

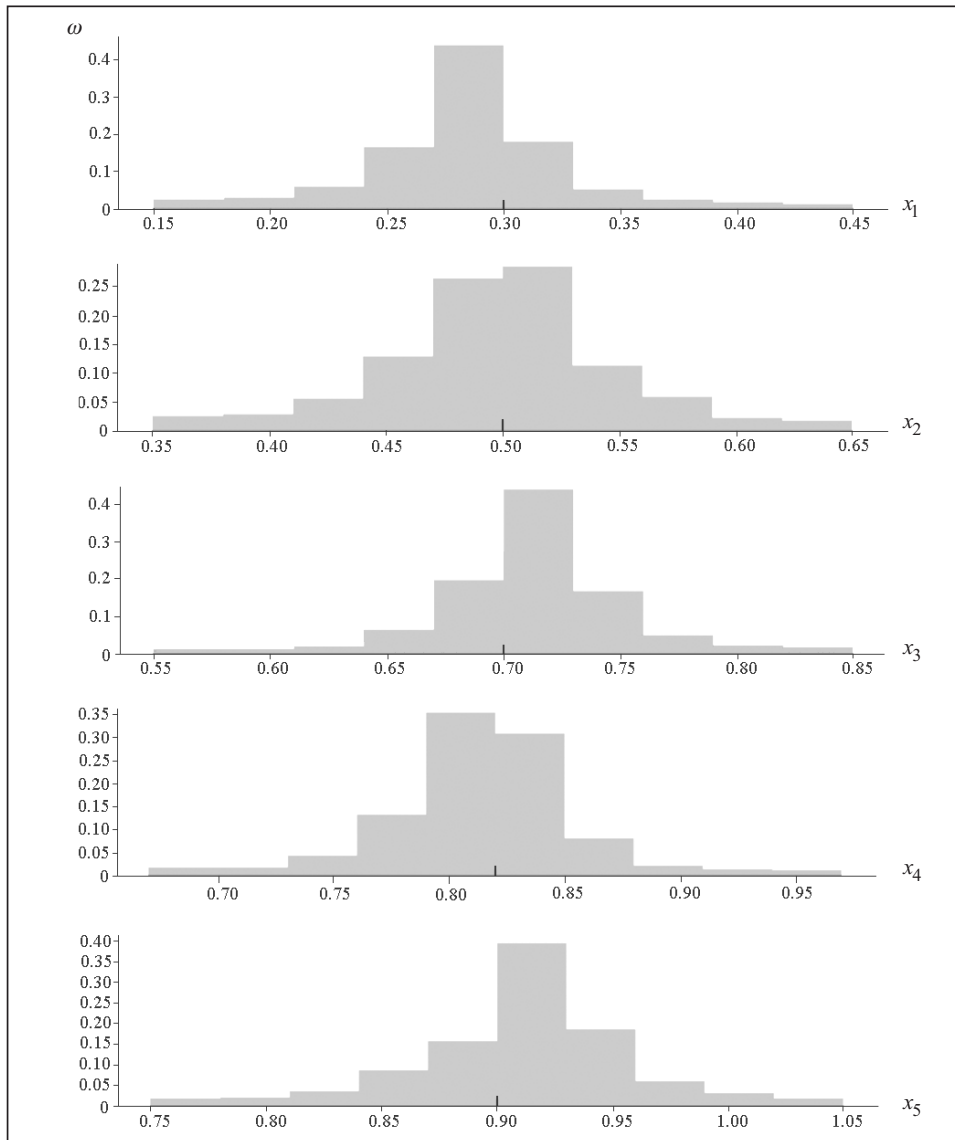


Рис. 3. Распределение оценок  $\hat{x}_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) для СЛАУ при  $n = 5$ ,  $m = 24$ ,  $\varepsilon = 0.01$  для распределения  $\xi_i$  типа «boundary visiting»

вероятностные свойства реализуемой погрешности. Такой же выбор можно сделать и в случае, если значения  $\varepsilon_i$  априори неизвестны, но известна оценка их отношений при разных  $m$ .

Совершенно иная ситуация возникает, когда поставленная задача решается комбинаторным методом. В этом случае ширина гарантированного интервала определяется как параметрами, указанными для предыдущих случаев, так и конкретными значениями реализуемой погрешности. Поэтому результат оценивания зависит от последовательности  $\xi_k$ . При благоприятном исходе получим лучшую, а при неблагоприятном исходе — худшую оценку. На основе этого метода можно устанавливать некоторые апостериорные свойства реализованной погрешности для каждой компоненты вектора  $x$ . По вычисленным значениям  $\hat{x}_i^j$  для  $j = \overline{1, M}$  с учетом того, что неравенство (3) выполняется, но  $\varepsilon_i$  неизвестны, можно давать оценку распределения плотности вероятности получаемых решений.

Так, на рис. 1 для СЛАУ с  $n = 5$  и  $m = 24$  представлены такие распределения  $\hat{x}_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ . При этом  $\varepsilon_i = 0,01$ ,  $i = \overline{1, 24}$ , а последовательность  $\xi_i$  соответствовала одной из реализаций с нормальным распределением на ограниченном интервале;  $\omega$  — частота повторений.

При тех же исходных данных, но с равномерным распределением  $\xi_i$  на том же интервале на рис. 2 показаны аналогичные распределения оценок  $\hat{x}_i$ . Распределению  $\xi_i$  типа «boundary visiting», т.е. с их реализациями, сосредоточенными в основном вблизи границ интервала (5), соответствуют результаты, показанные на рис. 3.

Точные значения компонент вектора  $x$  на всех графиках отмечены коротким отрезком. Рассмотренные реализации  $\xi_i$  во всех случаях были с нулевым средним.

Распределение  $\hat{x}_i$ , полученное комбинаторным методом, оказалось внутри интервалов, которые можно интерпретировать как интервалы достоверности, и точные значения вектора  $x$  оказались близкими к интервалу с максимальным значением  $\omega$ . Более того, можно свидетельствовать о выраженной корреляции между распределениями  $\xi_i$  и  $\hat{x}_i$ . Это позволяет по установленным распределениям делать максимально правдоподобную оценку решения либо по среднему значению достоверного интервала, как в случае с нулевым средним, либо по другим показателям, используемым при получении наиболее качественной оценки для более сложных распределений  $\xi_i$ .

#### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ

Сравнение методов выполнено по результатам численного моделирования. Рассматривались переопределенные СЛАУ при  $n = 5$  и варьируемом значении  $m$ , начиная с  $m = 6$ . Кроме того, рассматривались системы, имеющие разную обусловленность, начиная с хорошей (близкой к единице) и заканчивая плохой (с достаточно большим числом обусловленности). Хотя обусловленность зависит от нормы, но при больших ее вариациях (на порядки) в силу их эквивалентности достаточно рассмотреть одну из них. Для вычисления обусловленности выбрана евклидова норма, определяемая по отношению сингулярных чисел при SVD-разложении матрицы  $A$  [7]. Предпочтение было отдано этому способу, поскольку он наиболее подходящий для прямоугольных матриц и фактически является обобщением понятия обусловленности на общий случай матриц.

Оценки гарантированных интервалов, получаемых разными методами, проводились для одних и тех же СЛАУ и идентичных погрешностей, т.е. для одних и тех же  $A$ ,  $b$  и типов шумов.

На рис. 4 для шума с нормальным распределением показана зависимость от  $m$  относительных гарантированных интервалов для всех рассмотренных методов. Поскольку МНК и SVD-методы всегда дают совпадающие результаты, на рис. 4 показан только МНК. Для этого была выбрана обобщенная по всем компонентам  $i$  оценка  $\Delta = \max_i \bar{\Delta}_i$ . Аналогичные зависимости от  $m$  величины  $\Delta$  при равномерном шуме показаны на рис. 5, а при «boundary visiting» — на рис. 6. Комбинаторный метод становится наиболее эффективным с увеличением  $m$  при погрешности типа «boundary visiting».

При равномерном распределении методы дают близкий результат, а при нормальном распределении комбинаторный метод уступает МНК и тем более ОВМНК. Это очевидно, поскольку при нормальном шуме разброс оценки  $\hat{x}_i$  не является большим и пересечение гарантированных интервалов с увеличением  $m$  уменьшается медленнее. Тем не менее оценки  $\hat{x}$  компонент вектора, определяемые (30), дают и в таком случае неплохой результат. Это хорошо видно из рис. 7,

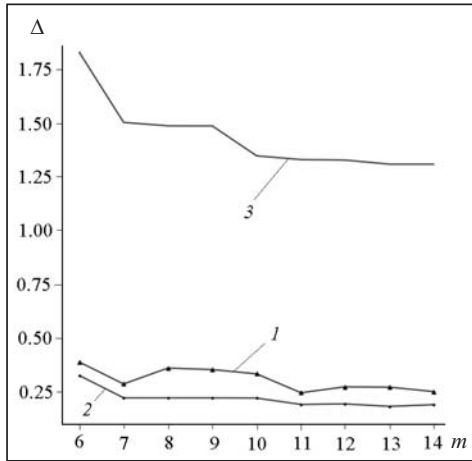


Рис. 4. График зависимости величины  $\Delta$  от  $m$  при нормальном распределении шума для МНК (1), ОВМНК (2) и комбинаторного метода (3)

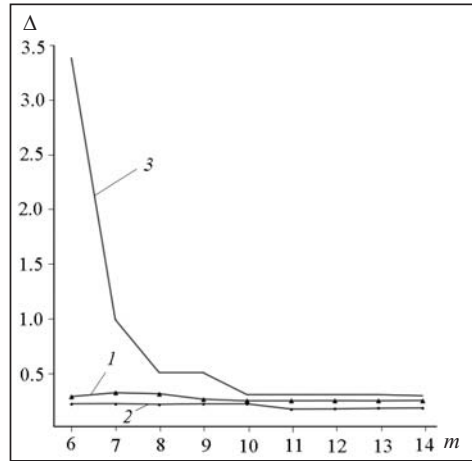


Рис. 5. График зависимости величины  $\Delta$  от  $m$  при равномерном распределении шума для МНК (1), ОВМНК (2) и комбинаторного метода (3)

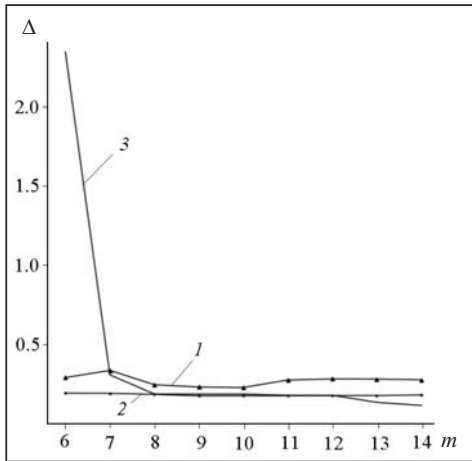


Рис. 6. График зависимости величины  $\Delta$  от  $m$  при погрешности типа «boundary visiting» для МНК (1), ОВМНК (2) и комбинаторного метода (3)

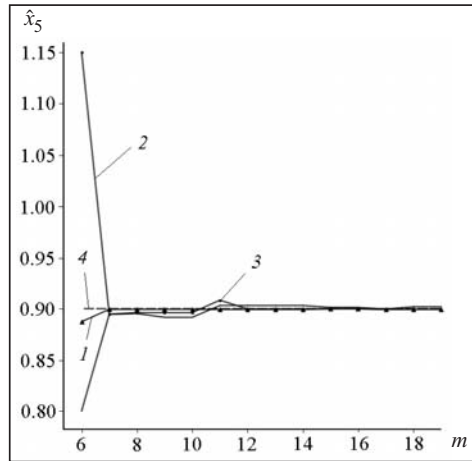


Рис. 7. График зависимости  $\hat{x}_5$  от  $m$  при нормальном распределении шума (1), равномерном распределении шума (2), «boundary visiting» (3) и точном значении (4)

на котором показана зависимость от  $m$  оценки  $\hat{x}_5$  пятой компоненты, найденная из (30) при разных распределениях шумов.

Аналогичный результат имеет место и для других компонент. Результат оценивания комбинаторным методом гарантированного интервала для компоненты  $\Delta$  при разных погрешностях с нулевым средним показан на рис. 8. Как видим, чем больше разброс погрешностей на множестве (5), тем меньше гарантированный интервал.

Важным показателем для всех рассмотренных методов является число обусловленности  $k(A)$  матрицы  $A$ . Его влияние на обобщенную оценку  $\Delta$  в зависимости от обусловленности для всех методов показано на рис. 9. Чтобы показать большие вариации числа обусловленности, при которых эта зависимость проявляется, была использована шкала с  $\ln k(A)$ . Как видим, наименее чувствительным методом к числу обусловленности является комбинаторный метод. В большом диапазоне значений числа обусловленности величина  $\Delta$  изменялась слабо — от единицы до двух.

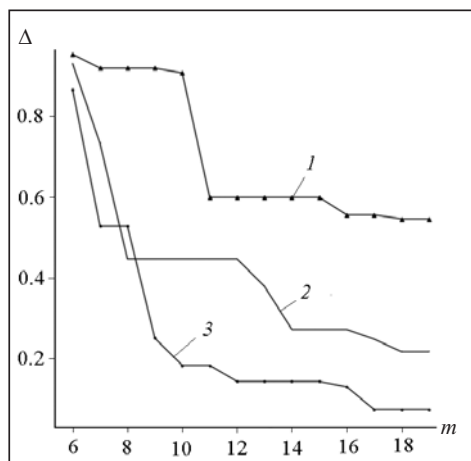


Рис. 8. График зависимости величины  $\Delta$  от  $m$  при нормальном распределении погрешности (1), равномерном распределении погрешности (2) и при погрешности типа «boundary visiting» (3)

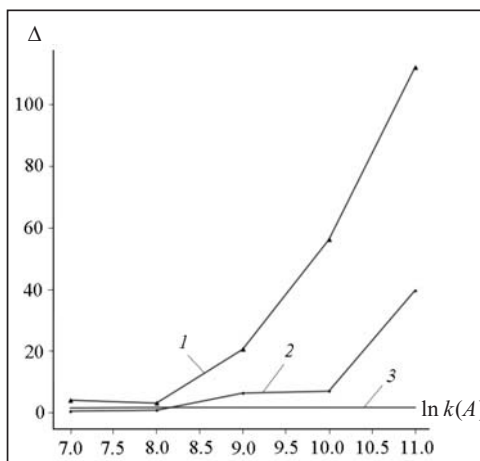


Рис. 9. График зависимости  $\Delta$  от  $\ln k(A)$  для МНК (1), ОБМНК (2) и комбинаторного метода (3)

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточно распространенным методом решения переопределенных СЛАУ является МНК или его обобщения. Его эффективность и асимптотическая сходимость к точному решению при увеличении  $m$  зависят от распределения случайной погрешности. Наиболее благоприятным является нормальное распределение с нулевым средним. При этом сохраняется сходимость, но приемлемый результат можно получить при больших значениях  $m$ . Причем чем больше число обусловленности, тем больше должно быть значение  $m$ , чтобы получить аналогичный результат. На практике его применяют и в других случаях, однако не всегда можно обосновать качество получаемых при этом оценок. Очевидно, что ОБМНК дает лучший результат, но затраты на его реализацию значимы особенно при больших размерностях. Комбинаторный метод практически во всех рассмотренных случаях дает неплохие результаты. При его применении открываются возможности повысить эффективность, используя информацию, с помощью которой можно оценить особенности случайных реализаций погрешности и исходя из этого выбрать подходящий алгоритм решения. Способ решения на основе SVD — это реализация МНК в иной форме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1977. 304 с.
2. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 3. С. 142–145.
3. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 3. С. 422–430.
4. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 2. С. 98–107.
5. Кудринский В.Ю., Трутьев В.Е. Согласование погрешностей при решении систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1982. № 1. С. 223–227.
6. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006. 264 с.
7. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999. 548 с.

8. Губарев В.Ф., Мельничук С.В. Алгоритмы гарантированного оценивания состояния линейных систем при наличии ограниченных помех. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 2. С. 26–34.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 285 с.

Надійшла до редакції 02.06.2020

**В.Ф. Губарев, Є.О. Шарапов**

**ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СЛАЕ З НЕТОЧНО ЗАДАНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ**

**Анотація.** Розглянуто та досліджено методи розв'язування перевизначених СЛАЕ, в яких основна матриця відома точно, а права частина містить похибку. Вважається, що покомпонентна похибка є випадковою величиною, яка належить малому обмеженому інтервалу. За точних значень правої частини система має однозначний розв'язок. В основу підходу, що розвивається, покладено гарантоване оцінювання інтервалів належності точного розв'язку, за якими можна робити висновок про якість одержуваних наближених оцінок розв'язків. Ці гарантовані оцінки використовуються для порівняння методів і оцінювання їхньої ефективності. За результатами чисельного моделювання зроблено порівняльний аналіз методів та наведено рекомендації щодо їхнього практичного застосування.

**Ключові слова:** перевизначені СЛАЕ, оцінювання, гарантований інтервал, сингулярний розклад, обмежена похибка, МНК, обумовленість.

**V.F. Gubarev, Y.A. Sharapov**

**SOLUTION ESTIMATION OF OVERDETERMINED SLAE WITH NONACCURATE RIGHT SIDE**

**Abstract.** Methods of overdetermined SLAE solving when main matrix is precise and right side contains errors are considered and studied in the paper. It is assumed that each error of right side component is random but being bounded small interval. Under precise right side system has unique solution. The base of the developed approach is guarantee estimation of interval membership of the precise solution which may be used for quality estimation of the approximate solution. These guarantee estimation are namely applied for comparison and solution quality estimation of the solving methods to be considered. Results of numerical simulation make it possible doing methods comparative analysis and formulation of the recommendations on its practical application.

**Keywords:** overdetermined SLAE, estimation, guarantee interval, SVD, bounded errors, LSM, conditionality.

**Губарев Вячеслав Федорович,**

чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, заведуючий відделом Інститута космічних досліджень НАН України и ГКА України, Київ, e-mail: v.f.gubarev@gmail.com.

**Шарапов Евгений Александрович,**

студент Інститута прикладного системного аналізу НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: vamdemonsteeve@gmail.com.