УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

БЫСТРЫЙ РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА $n = 3^q$ $(q > 1)$

Аннотация. Предложен новый быстрый рекурсивный алгоритм умножения матриц порядка $n = 3^q$ $(q > 1)$, построенный на основе гибридного алгоритма умножения матриц нечетного порядка $n = 3\mu$ $(\mu = 2q - 1, q > 1)$, который используется в качестве базового алгоритма при $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. По сравнению с известным блочно-рекурсивным алгоритмом Лейдермана представленный алгоритм позволяет минимизировать на 10.4% мультипликативную сложность, равную $W_{\text{м}} \approx 0.896 n^{2.854}$ операций умножения на глубине рекурсии $d = \log_3 n - 3$, и сократить вектор вычислений на три рекурсивных шага. Дана оценка мультипликативной сложности базового и рекурсивного алгоритмов.

Ключевые слова: линейная алгебра, блочно-рекурсивный алгоритм Лейдермана, семейство быстрых гибридных алгоритмов умножения матриц, алгоритм Винограда для скалярного произведения.

Новый подход к построению рекурсивных алгоритмов умножения матриц [1], основой которого является применение быстрых гибридных алгоритмов умножения матриц [2–4] в качестве базовых, открывает новые возможности для оптимизации вычислительной сложности известных, широко применяемых на практике блочно-рекурсивных алгоритмов умножения матриц [5–7]. Представленный в [1] новый рекурсивный алгоритм умножения матриц порядка 2^q $(q > 1)$, использующий в качестве базового быстрый гибридный алгоритм умножения матриц порядка $n = 4\mu$ при $\mu = 2^{q-1}$ $(q > 0)$, позволяет получить минимизированную на 7% по сравнению с блочно-рекурсивными алгоритмами Штрассена [5] и Винограда–Штрассена [6] мультипликативную сложность, равную $O(0.932 n^{2.807})$ операций умножения, сокращая вектор вычислений на три рекурсивных шага.

Настоящая статья является продолжением исследований в направлении оптимизации мультипликативной сложности известных рекурсивных алгоритмов умножения матриц как четного, так и нечетного порядка. Рассмотрен новый быстрый рекурсивный алгоритм умножения матриц порядка 3^q $(q > 1)$, в котором в качестве базового применяется гибридный алгоритм умножения матриц нечетного порядка $n = 3\mu$ $(\mu = 2q - 1,\ q > 1)$, построенный на основе известного быстрого гибридного алгоритма умножения матриц порядка $n = 3\mu$ $(\mu > 1)$ [4], основное вычислительное ядро которого преобразовано согласно методу Винограда [8] с учетом нечетности порядка оперируемых матриц. Полученный в результате преобразования новый быстрый гибридный алгоритм используется в качестве базового при $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. По сравнению с блочно-рекурсивным алгоритмом Лейдермана [7] для умножения матриц порядка $n = 3^q$ $(q > 0)$, мультипликативная сложность которого составляет $O(n^{\log_3 23}) \sim O(n^{2.854})$ операций умножения, предложенный рекурсивный алгоритм характеризуется минимизированной на 10.4% мультипликативной сложностью, равной $O(0.896 n^{2.854})$ операций умножения на глубине рекурсии $d = \log_3 n - 3$, сокращая при этом вектор вычислений на три рекурсивных шага. Дана оценка мультипликативной сложности базового и рекурсивного алгоритмов.

Новый быстрый рекурсивный алгоритм умножения матриц порядка $n = 3^q$ $(q > 1)$. При построении базового алгоритма для данного рекурсивного алгоритма умножения двух квадратных матриц: $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка $n = 3^q$ $(q > 1)$, применяется быстрый гибридный алгоритм умножения матриц порядка $n = 3\mu$ $(\mu > 1)$ [4], в котором для минимизации его мультипликативной сложности основное вычислительное ядро, содержащее 23 произведения матриц порядка $n/3$, трансформируется согласно методу Винограда [8]. Отметим, что при использовании данного метода для умножения двух квадратных матриц: $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ нечетного порядка $n = 2\mu - 1$ $(\mu > 1)$, элементы результирующей матрицы $C = (c_{ij})$ вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (a_{i,2k-1} + b_{2k,j})(b_{2k-1,j} + a_{i,2k}) + a_{in} \cdot b_{nj} - \\ - \sum_{k=1}^{(n-1)/2} a_{i,2k-1} a_{i,2k} - \sum_{k=1}^{(n-1)/2} b_{2k-1,j} b_{2k,j}, \tag{1}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$.

Мультипликативная сложность алгоритма (1) равна $W_{\text{м}}^{\text{Вин}} = 0.5n^3 + 1.5n^2 - n$ операций умножения. Отметим, что при умножении матриц четного порядка мультипликативная сложность алгоритма Винограда составляет $W_{\text{м}}^{\text{Вин}} = 0.5n^3 + n^2$ операций умножения.

В результате преобразования по формуле (1) каждой из 23 формул вычисления произведения матриц порядка $n/3$ указанного гибридного алгоритма [4] получаем новый быстрый гибридный алгоритм умножения матриц нечетного порядка $n = 3\mu$ $(\mu = 2q - 1,\ q > 1)$, который применяется в качестве базового при $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. Согласно базовому алгоритму на первом шаге рекурсии вычисляются 28 матриц порядка $n/3$, элементами которых являются коэффициенты $\alpha_{ik}^1, \ldots, \alpha_{ik}^{14}$ и $\beta_{kj}^1, \ldots, \beta_{kj}^{14}$, определяемые по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ik}^1 &= a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-2} - a_{3i-1,3k-1} - a_{3i,3k-1} - a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^2 &= a_{3i-2,3k-2} - a_{3i-1,3k-2}, \\
\alpha_{ik}^3 &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^4 &= a_{3i-1,3k-2} + a_{3i-1,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^5 &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^6 &= -a_{3i-2,3k-2} + a_{3i,3k-2}, \\
\alpha_{ik}^7 &= a_{3i,3k-2} + a_{3i,3k-1}, \qquad\qquad (2) \\
\alpha_{ik}^8 &= a_{3i-2,3k-2} + a_{3i-2,3k-1} + a_{3i-2,3k} - a_{3i-1,3k-1} - a_{3i-1,3k} - a_{3i,3k-2} - a_{3i,3k-1}, \\
\alpha_{ik}^9 &= -a_{3i-2,3k} + a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{10} &= a_{3i-2,3k} - a_{3i,3k}, \\
\alpha_{ik}^{11} &= a_{3i,3k-1} + a_{3i,3k},
\end{aligned}$$

$\alpha_{ik}^{12} = -a_{3i-2,\,3k} + a_{3i-1,\,3k-1} + a_{3i-1,\,3k}$,

$\alpha_{ik}^{13} = a_{3i-2,\,3k} - a_{3i-1,\,3k}$,

$\alpha_{ik}^{14} = a_{3i-1,\,3k-1} + a_{3i-1,\,3k}$,

где $i, k = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$;

$\beta_{kj}^{1} = -b_{3k-2,\,3j-1} + b_{3k-1,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{2} = -b_{3k-2,\,3j-2} + b_{3k-2,\,3j-1} + b_{3k-1,\,3j-2} - b_{3k-1,\,3j-1} - b_{3k-1,\,3j} - b_{3k,\,3j-2} + b_{3k,\,3j}$,

$\beta_{kj}^{3} = b_{3k-2,\,3j-2} - b_{3k-2,\,3j-1} + b_{3k-1,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{4} = -b_{3k-2,\,3j-2} + b_{3k-2,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{5} = b_{3k-2,\,3j-2} - b_{3k-2,\,3j} + b_{3k-1,\,3j}$,

$\beta_{kj}^{6} = b_{3k-2,\,3j} - b_{3k-1,\,3j}$,

$\beta_{kj}^{7} = -b_{3k-2,\,3j-2} + b_{3k-2,\,3j}$, (3)

$\beta_{kj}^{8} = -b_{3k-2,\,3j-2} + b_{3k-2,\,3j} + b_{3k-1,\,3j-2} - b_{3k-1,\,3j-1} - b_{3k-1,\,3j} - b_{3k,\,3j-2} + b_{3k,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{9} = b_{3k-1,\,3j-1} + b_{3k,\,3j-2} - b_{3k,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{10} = b_{3k-1,\,3j-1} - b_{3k,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{11} = -b_{3k,\,3j-2} + b_{3k,\,3j-1}$,

$\beta_{kj}^{12} = b_{3k-1,\,3j} + b_{3k,\,3j-2} - b_{3k,\,3j}$,

$\beta_{kj}^{13} = b_{3k-1,\,3j} - b_{3k,\,3j}$,

$\beta_{kj}^{14} = -b_{3k,\,3j-2} + b_{3k,\,3j}$,

где $j, k = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$.

Затем вычисляются 23 произведения $S^1 = (s_{ij}^1), \ldots, S^{23} = (s_{ij}^{23})$ двух матриц порядка $n/3$:

$$\begin{aligned}
&s_{ij}^1 = \varphi_{ij}^1 - h_i^1 - g_j^1, \quad s_{ij}^5 = \varphi_{ij}^5 - h_i^5 - g_j^5,\\
&s_{ij}^2 = \varphi_{ij}^2 - h_i^2 - g_j^2, \quad s_{ij}^6 = \varphi_{ij}^6 - h_i^6 - g_j^6,\\
&s_{ij}^3 = \varphi_{ij}^3 - h_i^3 - g_j^3, \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\\
&s_{ij}^4 = \varphi_{ij}^4 - h_i^4 - g_j^4, \quad s_{ij}^{23} = \varphi_{ij}^{23} - h_i^{23} - g_j^{23},\ i, j = 1, 2, \ldots m;\ m = n/3,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\varphi_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (\alpha_{i,\,2k-1}^1 + b_{6k-1,\,3j-1})(b_{6k-4,\,3j-1} + \alpha_{i,\,2k}^1) + \alpha_{im}^1 \cdot b_{3m-1,\,3j-1},$$

$$\varphi_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (\alpha_{i,\,2k-1}^2 + \beta_{2k,\,j}^1)(\beta_{2k-1,\,j}^1 + \alpha_{i,\,2k}^2) + \alpha_{im}^2 \cdot \beta_{mj}^1,$$

$$\varphi_{ij}^3 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (a_{3i-1,\,6k-4} + \beta_{2k,\,j}^2)(\beta_{2k-1,\,j}^2 + a_{3i-1,\,6k-1}) + a_{3i-1,\,3m-1} \cdot \beta_{mj}^2,$$

$$\varphi_{ij}^4 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (\alpha_{i,\,2k-1}^3 + \beta_{2k,\,j}^3)(\beta_{2k-1,\,j}^3 + \alpha_{i,\,2k}^3) + \alpha_{im}^3 \cdot \beta_{mj}^3,$$

$$\varphi_{ij}^{5}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{4}+\beta_{2k,j}^{4})(\beta_{2k-1,j}^{4}+\alpha_{i,2k}^{4})+\alpha_{im}^{4}\cdot\beta_{mj}^{4},$$

$$\varphi_{ij}^{6}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i-2,6k-5}+b_{6k-2,3j-2})(b_{6k-5,3j-2}+a_{3i-2,6k-2})+$$

$$+a_{3i-2,3m-2}\cdot b_{3m-2,3j-2}, \tag{5}$$

$$\varphi_{ij}^{7}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{5}+\beta_{2k,j}^{5})(\beta_{2k-1,j}^{5}+\alpha_{i,2k}^{5})+\alpha_{im}^{5}\cdot\beta_{mj}^{5},$$

$$\varphi_{ij}^{8}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{6}+\beta_{2k,j}^{6})(\beta_{2k-1,j}^{6}+\alpha_{i,2k}^{6})+\alpha_{im}^{6}\cdot\beta_{mj}^{6},$$

$$\varphi_{ij}^{9}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{7}+\beta_{2k,j}^{7})(\beta_{2k-1,j}^{7}+\alpha_{i,2k}^{7})+\alpha_{im}^{7}\cdot\beta_{mj}^{7},$$

$$\varphi_{ij}^{10}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{8}+b_{6k-1,3j})(b_{6k-4,3j}+\alpha_{i,2k}^{8})+\alpha_{im}^{8}\cdot b_{3m-1,3j},$$

$$\varphi_{ij}^{11}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i,6k-4}+\beta_{2k,j}^{8})(\beta_{2k-1,j}^{8}+a_{3i,6k-1})+a_{3i,3m-1}\cdot\beta_{mj}^{8},$$

$$\varphi_{ij}^{12}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{9}+\beta_{2k,j}^{9})(\beta_{2k-1,j}^{9}+\alpha_{i,2k}^{9})+\alpha_{im}^{9}\cdot\beta_{mj}^{9},$$

$$\varphi_{ij}^{13}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{10}+\beta_{2k,j}^{10})(\beta_{2k-1,j}^{10}+\alpha_{i,2k}^{10})+\alpha_{im}^{10}\cdot\beta_{mj}^{10},$$

$$\varphi_{ij}^{14}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i-2,6k-3}+b_{6k,3j-2})(b_{6k-3,3j-2}+a_{3i-2,6k})+a_{3i-2,3m}\cdot b_{3m,3j-2},$$

$$\varphi_{ij}^{15}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{11}+\beta_{2k,j}^{11})(\beta_{2k-1,j}^{11}+\alpha_{i,2k}^{11})+\alpha_{im}^{11}\cdot\beta_{mj}^{11},$$

$$\varphi_{ij}^{16}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{12}+\beta_{2k,j}^{12})(\beta_{2k-1,j}^{12}+\alpha_{i,2k}^{12})+\alpha_{im}^{12}\cdot\beta_{mj}^{12},$$

$$\varphi_{ij}^{17}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{13}+\beta_{2k,j}^{13})(\beta_{2k-1,j}^{13}+\alpha_{i,2k}^{13})+\alpha_{im}^{13}\cdot\beta_{mj}^{13},$$

$$\varphi_{ij}^{18}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(\alpha_{i,2k-1}^{14}+\beta_{2k,j}^{14})(\beta_{2k-1,j}^{14}+\alpha_{i,2k}^{14})+\alpha_{im}^{14}\cdot\beta_{mj}^{14},$$

$$\varphi_{ij}^{19}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i-2,6k-4}+b_{6k-1,3j-2})(b_{6k-4,3j-2}+a_{3i-2,6k-1})+a_{3i-2,3m-1}\cdot b_{3m-1,3j-2},$$

$$\varphi_{ij}^{20}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i-1,6k-3}+b_{6k,3j-1})(b_{6k-3,3j-1}+a_{3i-1,6k})+a_{3i-1,3m}\cdot b_{3m,3j-1},$$

$$\varphi_{ij}^{21}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i-1,6k-5}+b_{6k-2,3j})(b_{6k-5,3j}+a_{3i-1,6k-2})+a_{3i-1,3m-2}\cdot b_{3m-2,3j},$$

$$\varphi_{ij}^{22}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i,6k-5}+b_{6k-2,3j-1})(b_{6k-5,3j-1}+a_{3i,6k-2})+a_{3i,3m-2}\cdot b_{3m-2,3j-1},$$

$$\varphi_{ij}^{23}=\sum_{k=1}^{(m-1)/2}(a_{3i,6k-3}+b_{6k,3j})(b_{6k-3,3j}+a_{3i,6k})+a_{3i,3m}\cdot b_{3m,3j},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$; $k = 1, 2, \ldots, (m-1)/2$;

$$
\begin{array}{ll}
h_i^1 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^1 \alpha_{i,2k}^1, & g_j^1 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-1,3j-1} b_{6k-4,3j-1}, \\
h_i^2 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^2 \alpha_{i,2k}^2, & g_j^2 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^1 \beta_{2k-1,j}^1, \\
h_i^3 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-1,6k-4} a_{3i-1,6k-1}, & g_j^3 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^2 \beta_{2k-1,j}^2, \\
h_i^4 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^3 \alpha_{i,2k}^3, & g_j^4 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^3 \beta_{2k-1,j}^3, \\
h_i^5 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^4 \alpha_{i,2k}^4, & g_j^5 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^4 \beta_{2k-1,j}^4, \\
h_i^6 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-2,6k-5} a_{3i-2,6k-2}, & g_j^6 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-2,3j-2} b_{6k-5,3j-2}, \\
h_i^7 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^5 \alpha_{i,2k}^5, & g_j^7 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^5 \beta_{2k-1,j}^5, \\
h_i^8 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^6 \alpha_{i,2k}^6, & g_j^8 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^6 \beta_{2k-1,j}^6, \\
h_i^9 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^7 \alpha_{i,2k}^7, & g_j^9 = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^7 \beta_{2k-1,j}^7, \\
h_i^{10} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^8 \alpha_{i,2k}^8, & g_j^{10} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-1,3j} b_{6k-4,3j}, \\
h_i^{11} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i,6k-4} a_{3i,6k-1}, & g_j^{11} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^8 \beta_{2k-1,j}^8, \\
h_i^{12} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^9 \alpha_{i,2k}^9, & g_j^{12} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^9 \beta_{2k-1,j}^9, \\
h_i^{13} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^{10} \alpha_{i,2k}^{10}, & g_j^{13} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^{10} \beta_{2k-1,j}^{10}, \\
h_i^{14} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-2,6k-3} a_{3i-2,6k}, & g_j^{14} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k,3j-2} b_{6k-3,3j-2}, \\
h_i^{15} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^{11} \alpha_{i,2k}^{11}, & g_j^{15} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^{11} \beta_{2k-1,j}^{11}, \\
h_i^{16} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^{12} \alpha_{i,2k}^{12}, & g_j^{16} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^{12} \beta_{2k-1,j}^{12}, \\
h_i^{17} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^{13} \alpha_{i,2k}^{13}, & g_j^{17} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^{13} \beta_{2k-1,j}^{13}, \\
h_i^{18} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^{14} \alpha_{i,2k}^{14}, & g_j^{18} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} \beta_{2k,j}^{14} \beta_{2k-1,j}^{14}, \\
h_i^{19} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-2,6k-4} a_{3i-2,6k-1}, & g_j^{19} = \sum\limits_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-1,3j-2} b_{6k-4,3j-2},
\end{array}
\tag{6}
$$

$$h_i^{20} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-1,\,6k-3} a_{3i-1,\,6k}, \qquad g_j^{20} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k,\,3j-1} b_{6k-3,\,3j-1},$$

$$h_i^{21} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i-1,\,6k-5} a_{3i-1,\,6k-2}, \qquad g_j^{21} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-2,\,3j} b_{6k-5,\,3j},$$

$$h_i^{22} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i,\,6k-5} a_{3i,\,6k-2}, \qquad g_j^{22} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-2,\,3j-1} b_{6k-5,\,3j-1},$$

$$h_i^{23} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} a_{3i,\,6k-3} a_{3i,\,6k}, \qquad g_j^{23} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k,\,3j} b_{6k-3,\,3j},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $m = n/3$; $k = 1, 2, \ldots, (m-1)/2$.

Элементы результирующей матрицы $C = (c_{ij})$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&c_{3i-2,\,3j-2} = s_{ij}^6 + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{19},\\
&c_{3i-2,\,3j-1} = s_{ij}^1 + s_{ij}^4 + s_{ij}^5 + s_{ij}^6 + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15},\\
&c_{3i-2,\,3j} = s_{ij}^6 + s_{ij}^7 + s_{ij}^9 + s_{ij}^{10} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{18},\\
&c_{3i-1,\,3j-2} = s_{ij}^2 + s_{ij}^3 + s_{ij}^4 + s_{ij}^6 + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17},\\
&c_{3i-1,\,3j-1} = s_{ij}^2 + s_{ij}^4 + s_{ij}^5 + s_{ij}^6 + s_{ij}^{20},\\
&c_{3i-1,\,3j} = s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17} + s_{ij}^{18} + s_{ij}^{21},\\
&c_{3i,\,3j-2} = s_{ij}^6 + s_{ij}^7 + s_{ij}^8 + s_{ij}^{11} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14},\\
&c_{3i,\,3j-1} = s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15} + s_{ij}^{22},\\
&c_{3i,\,3j} = s_{ij}^6 + s_{ij}^7 + s_{ij}^8 + s_{ij}^9 + s_{ij}^{23}, \; i, j = 1, 2, \ldots m; \; m = n/3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим реализацию базового алгоритма (2)–(7) в рекурсивном режиме, где на первом шаге рекурсии формируются 23 пары матриц порядка $m = \frac{n}{3}$, предназначенные для выполнения операции произведения матриц для каждой из этих пар. При этом вычисляются матрицы коэффициентов по формулам (2), (3) и формируются матрицы, содержащие элементы исходных матриц A и B. Индексы, согласно которым формируются данные матрицы, эквивалентны индексам при элементах соответствующих матриц известного гибридного алгоритма умножения матриц порядка $n = 3\mu$ [4], на основе которого построен базовый алгоритм (2)–(7). Сформированные на первом рекурсивном шаге 23 пары матриц порядка m являются промежуточными и рассматриваются как исходные матрицы для следующего рекурсивного шага, где для каждой из этих пар формируются новые 23 пары матриц порядка $\frac{m}{3}$ аналогично первому рекурсивному шагу. На каждом последующем шаге рекурсии порядок оперируемых матриц уменьшается втрое. На последнем шаге рекурсии алгоритм оперирует (9×9)-матрицами, окончательно формируя для каждой пары промежуточных матриц данного порядка новые 23 пары (3×3)-матриц, выполняя далее вычисления по формулам (4)–(7). При реализации полного рекурсивного вычислительного процесса алгоритм требует $\log_3 n - 1$ рекурсивных шагов. Детальнее процесс вычисления произведения матриц в рекурсивном режиме описан далее.

Оценка мультипликативной сложности базового и рекурсивного алгоритмов. Поскольку мультипликативная сложность алгоритма Винограда (1) составляет $W_{\text{м}}^{\text{Вин}} = 0.5n^3 + 1.5n^2 - n$ операций умножения, базовый алгоритм (2)–(7), преобразованный по формуле (1), имеет мультипликативную сложность, равную

$$W_{\text{м}}^{\text{баз}} = 23 \cdot W_{\text{м}}^{\text{Вин}} = 23(0.5m^3 + 1.5m^2 - m) = 23\left(\frac{n^3}{54} + \frac{3n^2}{18} - \frac{n}{3}\right) \approx 0.4259n^3 +$$

$$+3.833n^2 - 7.666n \text{ операций умножения.}$$

Оценим мультипликативную сложность рассмотренного рекурсивного алгоритма с учетом глубины рекурсии d, которая является важнейшей характеристикой, влияющей на оптимизацию вычислительной сложности алгоритма.

Построенный на основе базового алгоритма (2)–(7) новый рекурсивный алгоритм имеет мультипликативную сложность, определяемую по следующей формуле:

$$W_{\text{м}}^{\text{рек}} = 23^{(\log_3 n - \omega)} \cdot [0.4259(3^{\omega})^3 + 3.833(3^{\omega})^2 - 7.666(3^{\omega})] =$$

$$= 23^{\log_3 n} \cdot \left[\frac{0.4259(3^{\omega})^3 + 3.833(3^{\omega})^2 - 7.666(3^{\omega})}{23^{\omega}}\right] =$$

$$= \beta \cdot n^{\log_3 23} \sim \beta \cdot n^{2.854} \text{ операций умножения,} \tag{8}$$

где $\beta = \dfrac{0.4259(3^{\omega})^3 + 3.833(3^{\omega})^2 - 7.666(3^{\omega})}{23^{\omega}}$ — коэффициент при $n^{2.854}$; $\omega = 2, 3, \ldots, \log_3 n$.

При этом глубина рекурсии составляет $d = (\log_3 n - \omega - 1)$ рекурсивных шагов.

Используя формулу (8), определяем максимальный процент минимизации мультипликативной сложности нового алгоритма, который достигается при $\omega = 4$ на глубине рекурсии $d = \log_3 n - 3$:

$$W_{\text{м}}^{\text{рек}} = \beta \cdot n^{2.854} = \frac{0.4259(3^4)^3 + 3.833(3^4)^2 - 7.666(3^4)}{23^4} n^{2.854} =$$

$$= \frac{250868}{279841} \cdot n^{2.854} \approx 0.896n^{2.854} \text{ операций умножения.}$$

Следовательно, представленный рекурсивный алгоритм имеет наименьшую мультипликативную сложность $O(0.896n^{2.854})$ по сравнению с блочно-рекурсивным алгоритмом Лейдермана, мультипликативная сложность которого равна $O(n^{2.854})$ операций умножения.

В табл. 1 приведены характеристики данного рекурсивного алгоритма при $\omega = 2, 3, 4, 5, 6$.

Из табл. 1 следует, что рассмотренный алгоритм обеспечивает максимальный процент минимизации (10.4%) мультипликативной сложности на глубине рекурсии $d = \log_3 n$, сокращая вектор вычислений на три рекурсивных шага.

Обоснование нового алгоритма. Для обоснования правильности нового алгоритма рассмотрим конкретный пример рекурсивного алгоритма умножения матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка $n = 3^q$ $(q = 3)$, который гарантирует точность решения задачи вычисления произведения двух матриц в рекурсивном режиме. Как следует из табл. 1, при $n = 27$ данный алгоритм обеспечивает минимизацию мультипликативной сложности на 9.9%, сокращая вектор вычислений на два рекурсивных шага по сравнению с блочно-рекурсивным алгоритмом Лейдермана.

Таблица 1

Порядок матриц	Характеристики нового рекурсивного алгоритма		
	Глубина рекурсии	Коэффициент при $n^{2.854}$	Минимизация мультипликативной сложности
3^q	d	β	%
$3^2=9$	$\log_3 n-1$	1.043	–
$3^3=27$	$\log_3 n-2$	0.901	9.9
$3^4=81$	$\log_3 n-3$	0.896	10.4
$3^5=243$	$\log_3 n-4$	0.984	1.6
$3^6=729$	$\log_3 n-5$	1.128	–

Рассмотрим первый шаг рекурсии данного алгоритма, который при реализации полного рекурсивного вычислительного процесса требует два рекурсивных шага ($\log_3 27-1=2$). Вначале вычисляем матрицы коэффициентов $K^1=(\alpha_{ij}^1),\ldots,$ $K^{14}=(\alpha_{ij}^{14})$ и $L^1=(\beta_{ij}^1),\ldots,L^{14}=(\beta_{ij}^{14})$ по формулам (2) и (3) при $i,j,k=1,2,\ldots,9$, а также формируем матрицы, которые включают элементы исходных матриц A и B согласно указанным при них индексам ($i,j=1,2,\ldots,9$), а именно:

$$A^3=(a_{3i-1,3j-1}),\ A^6=(a_{3i-2,3j-2}),\ A^{11}=(a_{3i,3j-1}),\ A^{14}=(a_{3i-2,3j}),$$
$$A^{19}=(a_{3i-2,3j-1}),\ A^{20}=(a_{3i-1,3j}),\ A^{21}=(a_{3i-1,3j-2}),\ A^{22}=(a_{3i,3j-2}),$$
$$A^{23}=(a_{3i,3j}),\ B^1=(b_{3i-1,3j-1}),\ B^6=(b_{3i-2,3j-2}),\ B^{10}=(b_{3i-1,3j}),$$
$$B^{14}=(b_{3i,3j-2}),\ B^{19}=(b_{3i-1,3j-2}),\ B^{20}=(b_{3i,3j-1}),\ B^{21}=(b_{3i-2,3j}), \quad (8)$$
$$B^{22}=(b_{3i-2,3j-1}),\ B^{23}=(b_{3i,3j}).$$

Указанные индексы при элементах перечисленных матриц (8) эквивалентны индексам при элементах соответствующих матриц известного гибридного алгоритма умножения матриц порядка $n=3\mu$ [4], на основе которого построен базовый алгоритм (2)–(7). Отметим, что в алгоритме [4] операция произведения матриц для каждой из 23 пар выполняется традиционным методом, а в новом алгоритме — методом Винограда (1), обеспечивающим минимизацию мультипликативной сложности в рекурсивном режиме.

Далее формируем 23 пары матриц порядка $m=\dfrac{n}{3}=9$ для вычисления произведений $S^1,S^2,\ldots,S^{23}$:

$$K^1B^1=S^1,\ K^2L^1=S^2,\ A^3L^2=S^3,\ K^3L^3=S^4,\ K^4L^4=S^5,$$
$$A^6B^6=S^6,\ K^5L^5=S^7,\ K^6L^6=S^8,\ K^7L^7=S^9,\ K^8B^{10}=S^{10},$$
$$A^{11}L^8=S^{11},\ K^9L^9=S^{12},\ K^{10}L^{10}=S^{13},\ A^{14}B^{14}=S^{14},$$
$$K^{11}L^{11}=S^{15},\ K^{12}L^{12}=S^{16},\ K^{13}L^{13}=S^{17},\ K^{14}L^{14}=S^{18},\ A^{19}B^{19}=S^{19},$$
$$A^{20}B^{20}=S^{20},\ A^{21}B^{21}=S^{21},\ A^{22}B^{22}=S^{22},\ A^{23}B^{23}=S^{23}.$$

Сформированные на первом рекурсивном шаге 23 пары матриц порядка $m=9$ являются промежуточными и рассматриваются как исходные матрицы для следующего рекурсивного шага, где для каждой из этих пар формируются новые 23 пары матриц порядка $\dfrac{m}{3}=3$ аналогично первому рекурсивному шагу. Но поскольку второй рекурсивный шаг не приводит к минимизации мультипликативной сложности, так как $\beta = 1.043$ (см. табл. 1), этот шаг сокращается. Учитывая, что данный пример состоит из одного рекурсивного шага, далее реализуем операцию произведения матриц для каждой из сформированных 23 пар согласно формулам (4)–(6).

Для обоснования правильности нового алгоритма необходимо показать, что каждая из 23 формул (4)–(6) эквивалентна формуле (1). Для доказательства корректности алгоритма введем дополнительные обозначения для матриц, принадлежащих (8), а именно:

$$A^3 = (a_{3i-1,3j-1}) = (a_{ij}^3),\ A^6 = (a_{3i-2,3j-2}) = (a_{ij}^6),\ A^{11} = (a_{3i,3j-1}) = (a_{ij}^{11}),$$
$$A^{14} = (a_{3i-2,3j}) = (a_{ij}^{14}),\ A^{19} = (a_{3i-2,3j-1}) = (a_{ij}^{19}),\ A^{20} = (a_{3i-1,3j}) = (a_{ij}^{20}),$$
$$A^{21} = (a_{3i-1,3j-2}) = (a_{ij}^{21}),\ A^{22} = (a_{3i,3j-2}) = (a_{ij}^{22}),\ A^{23} = (a_{3i,3j}) = (a_{ij}^{23}),$$
$$B^1 = (b_{3i-1,3j-1}) = (b_{ij}^1),\ B^6 = (b_{3i-2,3j-2}) = (b_{ij}^6),\ B^{10} = (b_{3i-1,3j}) = (b_{ij}^{10}),$$
$$B^{14} = (b_{3i,3j-2}) = (b_{ij}^{14}),\ B^{19} = (b_{3i-1,3j-2}) = (b_{ij}^{19}),\ B^{20} = (b_{3i,3j-1}) = (b_{ij}^{20}),$$
$$B^{21} = (b_{3i-2,3j}) = (b_{ij}^{21}),\ B^{22} = (b_{3i-2,3j-1}) = (b_{ij}^{22}),\ B^{23} = (b_{3i,3j}) = (b_{ij}^{23}).$$

В этом случае эквивалентность указанных формул проверяем на примере вычисления значения первого элемента s_{11}^1 произведения $S^1 = (s_{ij}^1)$ первой пары матриц $K^1 = (\alpha_{ij}^1)$ и $B^1 = (b_{3i-1,3j-1})$ согласно первым формулам (4)–(6) и сравнения его со значением элемента s_{11}^1 произведения $S^1 = (s_{ij}^1)$ двух матриц: $K^1 = (\alpha_{ij}^1)$ и $B^1 = (b_{ij}^1)$, вычисленному по формуле (1) при $i, j = 1;\ k = \dfrac{m-1}{2} = 4;\ m = 9.$

Вначале определяем значение элемента s_{11}^1 согласно первым формулам (4)–(6):

$$s_{11}^1 = \varphi_{11}^1 - h_1^1 - g_1^1;$$

$$\varphi_{11}^1 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (\alpha_{i,2k-1}^1 + b_{6k-1,3j-1})(b_{6k-4,3j-1} + \alpha_{i,2k}^1) +$$
$$+ \alpha_{im}^1 \cdot b_{3m-1,3j-1} = (\alpha_{1,1}^1 + b_{5,2}) \cdot (b_{2,2} + \alpha_{1,2}^1) +$$
$$+ (\alpha_{1,3}^1 + b_{11,2}) \cdot (b_{8,2} + \alpha_{1,4}^1) + (\alpha_{1,5}^1 + b_{17,2}) \cdot (b_{14,2} + \alpha_{1,6}^1) +$$
$$+ (\alpha_{1,7}^1 + b_{23,2}) \cdot (b_{20,2} + \alpha_{1,8}^1) + \alpha_{1,9}^1 \cdot b_{26,26};$$

$$h_1^1 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^1 \alpha_{i,2k}^1 = \alpha_{1,1}^1 \alpha_{1,2}^1 + \alpha_{1,3}^1 \alpha_{1,4}^1 + \alpha_{1,5}^1 \alpha_{1,6}^1 + \alpha_{1,7}^1 \alpha_{1,8}^1,$$

$$g_1^1 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{6k-1,3j-1} b_{6k-4,3j-1} = b_{5,2} b_{2,2} + b_{11,2} b_{8,2} + b_{17,2} b_{14,2} + b_{23,2} b_{20,2}.$$

Далее вычисляем значение элемента s_{11}^1 по формуле (1):

$$s_{11}^1 = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (\alpha_{i,2k-1}^1 + b_{2k,j}^1)(b_{2k-1,j}^1 + \alpha_{i,2k}^1) + \alpha_{im}^1 \cdot b_{mj}^1 -$$

$$- \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \alpha_{i,2k-1}^1 \alpha_{i,2k}^1 - \sum_{k=1}^{(m-1)/2} b_{2k-1,j}^1 b_{2k,j}^1 =$$

$$= (\alpha_{1,1}^1 + b_{2,1}^1) \cdot (b_{1,1}^1 + \alpha_{1,2}^1) + (\alpha_{1,3}^1 + b_{4,1}^1) \cdot (b_{3,1}^1 + \alpha_{1,4}^1) +$$

$$+ (\alpha_{1,5}^1 + b_{6,1}^1) \cdot (b_{5,1}^1 + \alpha_{1,6}^1) + (\alpha_{1,7}^1 + b_{8,1}^1) \cdot (b_{7,1}^1 + \alpha_{1,8}^1) +$$

$$+ \alpha_{1,9}^1 \cdot b_{9,1}^1 - (\alpha_{1,1}^1 \alpha_{1,2}^1 + \alpha_{1,3}^1 \alpha_{1,4}^1 + \alpha_{1,5}^1 \alpha_{1,6}^1 + \alpha_{1,7}^1 \alpha_{1,8}^1) -$$

$$- (b_{1,1}^1 b_{2,1}^1 + b_{3,1}^1 b_{4,1}^1 + b_{5,1}^1 b_{6,1}^1 + b_{7,1}^1 b_{8,1}^1) .$$

Эквивалентность значений данных элементов, а также остальных элементов матриц $S^1 \sim S^{23}$ подтверждаем на совокупности тестовых примеров.

Далее определяем по формулам (7) при $i, j = 1, 2, \ldots, 9$ значения элементов результирующей матрицы $C = (c_{ij})$, которая является решением задачи вычисления произведения матриц A и B порядка $n = 27$ в рекурсивном режиме. Правильность вычисления значений данных элементов также подтверждаем на тестовых примерах.

Отметим, что при больших значениях порядка n исходных матриц A и B нового рекурсивного алгоритма для достижения максимального процента минимизации мультипликативной сложности (10.4%) порядок промежуточных матриц, вычисляемых на каждом последующем шаге рекурсии, уменьшается втрое, пока не достигнет значения $n = 81$, при котором обеспечивается на данном шаге рекурсии минимальное значение коэффициента $\beta = 0.896$ (см. табл. 1) и сокращение трех рекурсивных шагов.

Таким образом, данный подход к построению рекурсивных алгоритмов, использующий быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц в качестве базовых, дает возможность получить новые рекурсивные алгоритмы умножения матриц как четного, так и нечетного порядка, имеющие минимизированную мультипликативную сложность и практическую ценность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елфимова Л.Д. Новый быстрый рекурсивный алгоритм умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т.55, № 4. С. 33–38.

2. Елфимова Л.Д. Капитонова Ю.В. Быстрый алгоритм для умножения матриц и его эффективная реализация на систолических массивах. *Кибернетика и системный анализ.* 2001. № 1. С. 135–150.

3. Елфимова Л.Д. Быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. Т. 46, № 4. С. 49–59.

4. Елфимова Л.Д. Новые быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 6. С. 59–67.

5. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik.* 1969. Vol. 13. P. 354–356.

6. Winograd S. On multiplication of 2×2 matrices. *Linear Algebra and Its Application.* 1971. Vol. 4. P. 381–388.

7. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3x3 matrices using 23 multiplications. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1976. Vol. 82, N 1. P. 126–128.

8. Winograd S.A. A new algorithm for inner product. *IEEE Transactions on Computers.* 1968. Vol. C-18. P. 693–694.

Надійшла до редакції 02.08.2019

Л.Д. Єлфімова

ШВИДКИЙ РЕКУРСИВНИЙ АЛГОРИТМ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ ПОРЯДКУ $n = 3^q$ $(q > 1)$

Анотація. Запропоновано новий швидкий рекурсивний алгоритм множення матриць порядку $n = 3^q$ $(q > 1)$, побудований на основі гібридного алгоритму множення матриць непарного порядку $n = 3\mu$ $(\mu = 2q - 1, q > 1)$, який застосовується як базовий алгоритм, коли $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. Порівняно з відомим блочно-рекурсивним алгоритмом Лейдермана наведений алгоритм дозволяє мінімізувати на 10.4% мультиплікативну складність, яка дорівнює $W_{\text{м}} = 0.896n^{2.854}$ операцій множення на глибині рекурсії $d = \log_3 n - 3$, та скоротити вектор обчислень на три рекурсивних кроки. Наведено оцінку мультипликативної складності базового та рекурсивного алгоритмів.

Ключові слова: лінійна алгебра, блочно-рекурсивний алгоритм Лейдермана, сім'я швидких гібридних алгоритмів множення матриць, алгоритм Винограда для скалярного добутку.

L.D. Jelfimova

A FAST RECURSIVE ALGORITHM FOR MULTIPLYING MATRICES OF ORDER $n = 3^q$ $(q > 1)$

Abstract. A new fast recursive algorithm is proposed for multiplying matrices of order $n = 3^q$ $(q > 1)$. This algorithm is based on hybrid algorithm for multiplying matrices of odd order $n = 3\mu$ $(\mu = 2q - 1, q > 1)$, which is used as basic algorithm for $\mu = 3^q$ $(q > 0)$. As compared with the well-known block-recursive Laderman's algorithm, the new algorithm minimizes by 10.4% the multiplicative complexity equal to $W_{\text{м}} = 0.896n^{2.854}$ multiplication operations at recursive level $d = \log_3 n - 3$ and reduces the computation vector by three recursive steps. The multiplicative complexity of the basic and recursive algorithms are estimated.

Keywords: linear algebra, Laderman's block-recursive matrix multiplication algorithm, family of fast hybrid matrix multiplication algorithms, Winograd's algorithm for inner product.

Елфимова Лариса Дмитриевна,
младший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев,
e-mail: larisaelf@gmail.com.