УДК 517.988

**Я.И. ВЕДЕЛЬ, Г.В. САНДРАКОВ, В.В. СЕМЕНОВ**

# АДАПТИВНЫЙ ДВУХЭТАПНЫЙ ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АДАМАРА[1]

**Аннотация.** Рассмотрены задачи о равновесии в метрических пространствах Адамара. Для приближенного решения задач предложен и изучен новый адаптивный двухэтапный проксимальный алгоритм. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага в предлагаемом алгоритме не проводятся вычисления значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания информации о величине липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

**Ключевые слова:** пространство Адамара, задача о равновесии, псевдомонотонность, двухэтапный проксимальный алгоритм, адаптивность, сходимость.

## ВВЕДЕНИЕ

Известным направлением современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии. В ряде публикаций для решения задач о равновесии в гильбертовом пространстве был предложен двухэтапный проксимальный алгоритм. В настоящее время появился интерес к задачам о равновесии в метрических пространствах Адамара, в частности изучен аналог двухэтапного проксимального алгоритма.

В данной статье предлагается новый адаптивный двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в метрических пространствах Адамара. В отличие от применяемого ранее алгоритма в рассматриваемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знаний липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

## ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Одним из направлений современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) следующего вида [1–13]:

$$\text{найти } x \in C: \ F(x, y) \ge 0 \ \ \forall y \in C, \tag{1}$$

где $C$ — непустое подмножество гильбертова пространства $H$; $F: C \times C \to \mathbb{R}$ — функция такая, что $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$ (называемая бифункцией). В виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и различные игровые задачи. Приведем две типичные формулировки [1, 2].

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер госрегистрации 0219U008403) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв’язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», номер госрегистрации 0119U101608).

1. Если $F(x, y) = (Ax, y-x)$, где $A\colon C \to H$, то задача (1) сводится к классическому вариационному неравенству:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y-x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C.$$

2. Для каждого $i \in I$, где $I$ — конечное множество индексов, заданы множество $C_i$ и функция $\varphi_i\colon C \to \mathbb{R}$, где $C = \prod_{i\in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i\in I} \in C$ обозначим $x^i = (x_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$. Точку $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i\in I} \in C$ называют равновесием Нэша, если для всех $i \in I$ выполняются неравенства $\varphi_i(\bar{x}) \leq \varphi_i(\bar{x}_i, y_i)$ $\forall y_i \in C_i$. Определим функцию $F\colon C \times C \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(x, y) = \sum_{i\in I} (\varphi_i(x^i, y_i) - \varphi_i(x)).$$

Точка $\bar{x} \in C$ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда она является решением задачи (1).

Исследование алгоритмов решения равновесных и близких задач освещается во многих публикациях. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства [14, 15]. Для их решения в работе [16] предложен экстраградиентный метод. Эффективным современным вариантом экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод Немировского [17], который можно проинтерпретировать как вариант экстраградиентного метода с проектированием относительно расхождения Брэгмана. В статьях [18–20] предложены адаптивные модификации проксимального зеркального метода, не требующие знания констант Липшица операторов для определения величины шага. Аналогам экстраградиентного метода для задач о равновесии и близким вопросам посвящены работы [3, 5, 7, 8, 21–25]. Одним из таких методов является экстрапроксимальный алгоритм вида

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\,\cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\,\cdot)} x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in (0, +\infty)$, $\operatorname{prox}_\varphi$ — проксимальный оператор функции $\varphi$ [3, 5].

Л.Д. Попов в работе [26] предложил для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, интересную модификацию метода Эрроу–Гурвица. В статье [9] для решения задач о равновесии в гильбертовом пространстве был предложен двухэтапный проксимальный алгоритм вида

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\,\cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\,\cdot)} x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in (0, +\infty)$, являющийся адаптацией метода Л.Д. Попова к общим задачам равновесного программирования (см. также [10, 27, 28]).

В настоящее время возникла потребность в построении теории и алгоритмов решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара [29] ($CAT(0)$-пространствах). Это обусловлено проблемами математической биологии и машинного обучения. Сильной мотивацией для изучения данных задач является также возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде геодезически выпуклых в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [11, 29]. Также появился интерес к задачам о равновесии в метрических пространствах Адамара [11–13]. В статье [11] получены теоремы существования решения для задач о равновесии на многообразиях Адамара, рассмотрены приложения к вариационным неравенствам и обоснован резольвентный метод для аппроксимации решений задач о равновесии и вариационных неравенствах. В работе [12] для более общих задач о равновесии с псевдомонотонными бифункциями в пространствах Адамара получены теоремы существования для задач о равновесии, предложен проксимальный алгоритм и доказана его сходимость. Более конструктивному подходу посвящена работа [13], авторы которой, исходя из результатов статьи [5], предложили и обосновали для псевдомонотонных задач о равновесии в пространствах Адамара аналог экстрапроксимального метода. А в более поздней работе [30] изучен аналог двухэтапного проксимального алгоритма [9].

В настоящей статье, которая является продолжением работ [18, 30], предложен новый адаптивный двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в метрических пространствах Адамара. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага [9, 10, 27, 28, 30] в предлагаемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании модифицированной оценки из работы [30]. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

## ПРОСТРАНСТВА АДАМАРА

Изложим несколько понятий и фактов относительно пространств Адамара (более детально изложено в [29, 31, 32]).

Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство и $x$, $y \in X$. Геодезическим путем, соединяющим точки $x$ и $y$, называют изометрию $\gamma\colon [0, d(x, y)] \to X$ такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множество $\gamma([0, d(x, y)]) \subseteq X$ обозначают $[x, y]$ и называют геодезическим сегментом (или геодезической) с концами $x$ и $y$. Метрическое пространство $(X, d)$ называют геодезическим пространством, если любые две точки $X$ можно соединить геодезической, и однозначно геодезическим пространством, если для любых двух точек $X$ существует в точности одна геодезическая, их соединяющая.

Геодезическое пространство $(X, d)$ называют $CAT(0)$-пространством, если для любой тройки точек $y_0$, $y_1$, $y_2 \in X$ таких, что $d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2)$, выполняется неравенство

$$d^2(x, y_0) \le \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_2) \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Неравенство (2) иногда называют $CN$-неравенством [31] (заметим, что в евклидовом пространстве неравенство (2) преобразуется в тождество), а точку $y_0$ — серединой между точками $y_1$ и $y_2$, которая всегда существует в геодезическом пространстве.

Известно, что $CAT(0)$-пространство является однозначно геодезическим [29].

Для точек $x$ и $y$ $CAT(0)$-пространства $(X, d)$ и $t \in [0, 1]$ обозначим $tx \oplus (1-t)y$ такую единственную точку $z$ сегмента $[x, y]$, что $d(z, x) = (1-t)d(x, y)$ и $d(z, y) = td(x, y)$. Множество $C \subseteq X$ называется выпуклым (геодезически выпуклым), если для всех $x$, $y \in C$ и $t \in [0, 1]$ выполняется условие $tx \oplus (1-t)y \in C$.

Полезным инструментом для работы в $CAT(0)$-пространстве $(X, d)$ является неравенство

$$d^2(tx \oplus (1-t)y, z) \le td^2(x, z) + (1-t)d^2(y, z) - t(1-t)d^2(x, y),$$
$$\{x, y, z\} \in X, \ t \in [0,1]. \tag{3}$$

**Замечание 1.** Важными примерами $CAT(0)$-пространств являются евклидовы пространства, $\mathbb{R}$-деревья, многообразия Адамара (полные связные римановы многообразия неположительной кривизны) и гильбертов шар с гиперболической метрикой [29, 31, 32].

Полное $CAT(0)$-пространство называют пространством Адамара.

Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство и $(x_n)$ — ограниченная последовательность элементов $X$. Пусть также $r(x,(x_n)) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(x, x_n)$. Число $r((x_n)) = \inf_{x\in X} r(x,(x_n))$ называют асимптотическим радиусом $(x_n)$, а множество $A((x_n)) = \{x \in X : r(x,(x_n)) = r((x_n))\}$ — асимптотическим центром $(x_n)$. Известно, что в пространстве Адамара множество $A((x_n))$ состоит из одной точки [29].

Последовательность $(x_n)$ элементов пространства Адамара $(X, d)$ слабо сходится ($\Delta$-сходится [31]) к элементу $x \in X$, если $A((x_{n_k})) = \{x\}$ для любой подпоследовательности $(x_{n_k})$. Известно, что произвольная последовательность элементов ограниченного, замкнутого и выпуклого подмножества $K$ пространства Адамара имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из $K$ [29, 31].

При доказательстве слабой сходимости последовательностей элементов метрического пространства Адамара целесообразно использовать известный аналог леммы Опяла [29, p. 60].

**Лемма 1.** Пусть последовательность $(x_n)$ элементов пространства Адамара $(X, d)$ слабо сходится к элементу $x \in X$. Тогда для всех $y \in X \setminus \{x\}$ имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, d(x_n, x) < \underline{\lim_{n\to\infty}}\, d(x_n, y).$$

Пусть $(X, d)$ — пространство Адамара. Функция $\varphi$: $X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется выпуклой (геодезически выпуклой), если для всех $x$, $y \in X$ и $t \in [0,1]$ выполняется условие

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Например, в пространстве Адамара функции $y \mapsto d(y, x)$ выпуклы. Если существует такая константа $\mu > 0$, что для всех $x$, $y \in X$ и $t \in [0,1]$ выполняется условие

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t)d^2(x, y),$$

то функция $\varphi$ называется сильно выпуклой. Известно, что для выпуклых функций полунепрерывность снизу и слабая полунепрерывность снизу эквивалентны [29, p. 64], а сильно выпуклая полунепрерывная снизу функция достигает минимума в единственной точке.

**Замечание 2.** Многие важные для приложений конструкции в пространствах Адамара связаны с точками минимума выпуклых функций [29, 32]. Например, для набора точек $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ метрического пространства $(X, d)$ с положительными весами $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$ барицентром (центром масс, средним Фреше) называется точка

$$z \in \arg\min_{y\in X} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i).$$

В пространстве Адамара функции $y \mapsto d^2(y, x_i)$ сильно выпуклы (см. неравенство (3)), поэтому функция $y \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i)$ также сильно выпукла. Отсюда следует, что барицентр существует и единственен.

Для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальный оператор определяется следующим образом [29]:

$$\operatorname{prox}_{\varphi} x = \arg\min_{y \in X} (\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x)) .$$

Поскольку функции $\varphi + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$ сильно выпуклы, то определение проксимального оператора корректно, т.е. для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $\operatorname{prox}_{\varphi} x \in X$.

Перейдем к формулировке задачи о равновесии в пространстве Адамара.

### ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ АДАМАРА

Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство Адамара. Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq X$ и бифункции $F: C \times C \to \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии (или задачу равновесного программирования [2, 3, 9]):

$$\text{найти } x \in C: \ F(x, y) \geq 0 \ \ \forall y \in C. \tag{4}$$

Предположим, что выполнены условия:

1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

2) функции $F(x, \cdot): C \to \mathbb{R}$ выпуклы и полунепрерывны снизу для всех $x \in C$;

3) функции $F(\cdot, y): C \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывны сверху для всех $y \in C$;

4) бифункция $F: C \times C \to \mathbb{R}$ псевдомонотонна, т.е. для всех $x, y \in C$ из $F(x, y) \geq 0$ следует

$$F(y, x) \leq 0 ;$$

5) бифункция $F: C \times C \to \mathbb{R}$ липшицевого типа, т.е. существуют две константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a d^2(x, z) + b d^2(z, y) \ \ \forall x, y, z \in C. \tag{5}$$

**Замечание 3.** Условие 5) липшицевого типа в евклидовом пространстве введено G. Mastroeni [4].

Рассмотрим дуальную задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C: \ F(y, x) \leq 0 \ \ \forall y \in C. \tag{6}$$

Множества решений задач (4) и (6) обозначим $S$ и $S^*$. При выполнении условий 1) – 4) имеем $S = S^*$ [12]. Кроме того, множество $S^*$ выпукло и замкнуто.

Далее будем предполагать, что $S \neq \varnothing$.

### АДАПТИВНЫЙ ДВУХЭТАПНЫЙ ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

В статье [30] для решения задачи (4) был предложен алгоритм

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} (F(y_{n-1}, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} (F(y_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)). \end{cases} \tag{7}$$

Величины $\lambda_n > 0$ задавались, исходя из требования $\{\inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n\} \subseteq \subseteq \left(0, \dfrac{1}{2(2a+b)}\right)$, т.е. использовалась информация о константах условия типа липшицевости бифункции $F$.

**Замечание 4.** Алгоритм (7) для задач в гильбертовом пространстве предложен в работе [9] (см. также [10, 27, 28]). Частный случай алгоритма (7) для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, предложен Л.Д. Поповым [26]. Заметим, что в настоящее время вариант алгоритма (7) для вариационных неравенств стал уже известен специалистами по машинному обучению под названием «Extrapolation from the Past» [33].

На основании итерационной схемы (7) и работы [18] построим двухэтапный проксимальный алгоритм с адаптивным выбором величины $\lambda_n$.

**Алгоритм 1**

**Инициализация.** Выбираем элемент $x_1$, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Полагаем $n = 1$.

**Шаг 1.** Вычислить

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right).$$

**Шаг 2.** Вычислить

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right).$$

Если $x_{n+1} = x_n = y_n$, то остановить и $x_n \in S$. Иначе перейти на шаг 3.

**Шаг 3.** Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))}\right\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

**Замечание 5.** На каждом шаге алгоритма 1 следует решить две выпуклые задачи с сильно выпуклыми функциями. Будем предполагать возможность их эффективного решения.

В предлагаемом алгоритме параметр $\lambda_{n+1}$ зависит от расположения точек $y_{n-1}$, $y_n$, $x_{n+1}$, значений $F(y_{n-1}, x_{n+1})$, $F(y_{n-1}, y_n)$ и $F(y_n, x_{n+1})$. Никакая информация о константах $a$ и $b$ из неравенства (5) не используется в алгоритме. Очевидно, что последовательность $(\lambda_n)$ является неубывающей и ограниченной снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \dfrac{\tau}{2\max\{a, b\}}\right\}$. Действительно, имеем

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le$$
$$\le a d^2(y_{n-1}, y_n) + b d^2(y_n, x_{n+1}) \le \max\{a, b\}(d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1})).$$

**Замечание 6.** Обоснование правила остановки в алгоритме 1 приведено ниже (см. (12)).

Перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

### СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА

Вначале сформулируем важное неравенство.

**Лемма 2.** Для $x$, $z \in C$ и $x^+ = \operatorname{prox}_{\lambda F(z, \cdot)} x$, где $\lambda > 0$, имеет место неравенство

$$F(z, x^+) - F(z, y) \le \frac{1}{2\lambda} (d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y)) \quad \forall y \in C. \tag{8}$$

**Доказательство.** Из определения $x^+ = \arg\min_{y\in C}\left(F(z, y)+\frac{1}{2\lambda}d^2(y, x)\right)$ следует

$$F(z, x^+)+\frac{1}{2\lambda}d^2(x^+, x)\le F(z, p)+\frac{1}{2\lambda}d^2(p, x)\ \ \forall p\in C. \quad (9)$$

Положив в (9) $p=tx^+\oplus(1-t)y$, $y\in C$, $t\in(0,1)$, получим

$$F(z, x^+)+\frac{1}{2\lambda}d^2(x^+, x)\le F(z, tx^+\oplus(1-t)y)+\frac{1}{2\lambda}d^2(tx^+\oplus(1-t)y, x)\le$$

$$\le tF(z, x^+)+(1-t)F(z, y)+\frac{1}{2\lambda}(td^2(x^+, x)+(1-t)d^2(y, x)-t(1-t)d^2(x^+, y)).$$

Таким образом,

$$(1-t)F(z, x^+)-(1-t)F(z, y)\le$$
$$\le\frac{1}{2\lambda}(-(1-t)d^2(x^+, x)+(1-t)d^2(y, x)-t(1-t)d^2(x^+, y)). \quad (10)$$

Сократив в (10) $1-t$ и совершив предельный переход при $t\to 1$, получим (8). ■

Из леммы 2 следует, что для последовательностей $(x_n)$, $(y_n)$, порожденных алгоритмом 1, имеют место неравенства

$$F(y_{n-1}, y_n)-F(y_{n-1}, y)\le$$
$$\le\frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n)-d^2(x_n, y_n)-d^2(y_n, y))\ \ \forall y\in C, \quad (11)$$

$$F(y_n, x_{n+1})-F(y_n, y)\le$$
$$\le\frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n)-d^2(x_n, x_{n+1})-d^2(x_{n+1}, y))\ \ \forall y\in C. \quad (12)$$

Из неравенства (12) следует обоснование правила остановки алгоритма 1. Действительно, при $x_{n+1}=x_n=y_n$ из (12) вытекает $-F(y_n, y)\le 0\ \ \forall y\in C$, т.е. $x_n=y_n\in S$.

**Замечание 7.** Для остановки алгоритма 1 можно использовать правило $x_n=y_n=y_{n-1}$, гарантирующее $x_n\in S$.

Докажем основную оценку, связывающую расстояния между порожденными алгоритмом 1 точками и произвольным элементом множества решений $S$.

**Лемма 3.** Для последовательностей $(x_n)$, $(y_n)$, порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$d^2(x_{n+1}, z)\le d^2(x_n, z)-\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(x_{n+1}, y_n)-$$
$$-\left(1-2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(y_n, x_n)+2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}d^2(x_n, y_{n-1}), \quad (13)$$

где $z\in S$.

**Доказательство.** Пусть $z\in S$. Из псевдомонотонности бифункции $F$ следует

$$F(y_n, z)\le 0. \quad (14)$$

Из (14) и (12) следует

$$2\lambda_n F(y_n, x_{n+1})\le d^2(z, x_n)-d^2(x_n, x_{n+1})-d^2(x_{n+1}, z). \quad (15)$$

Суммируя неравенство (15) и неравенство

$$2\lambda_n(F(y_{n-1}, y_n)-F(y_{n-1}, x_{n+1}))\le d^2(x_{n+1}, x_n)-d^2(x_n, y_n)-d^2(y_n, x_{n+1}),$$

которое вытекает из (11), получаем

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_n (F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})) \le \\
&\le d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, z) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n) .
\end{aligned} \tag{16}
$$

Из правила вычисления $\lambda_{n+1}$ следует неравенство

$$
\begin{aligned}
&F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le \\
&\le \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) .
\end{aligned} \tag{17}
$$

Для оценки выражения $F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1})$ в (17) воспользуемся (16). Получим

$$
d^2(x_{n+1}, z) \le d^2(z, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n) +
$$

$$
+\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) .
$$

Поскольку $d^2(y_{n-1}, y_n) \le 2d^2(y_{n-1}, x_n) + 2d^2(x_n, y_n)$, то

$$
d^2(x_{n+1}, z) \le d^2(z, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n) +
$$

$$
+2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(y_{n-1}, x_n) + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_{n+1}, y_n) ,
$$

что и требовалось доказать. ■

Для доказательства сходимости алгоритма 1 используем элементарную лемму о числовых последовательностях.

**Лемма 4.** Пусть $(a_n)$, $(b_n)$ — две последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \le a_n - b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $(b_n) \in \ell_1$.

Сформулируем один из основных результатов работы.

**Теорема 1.** Пусть $(X, d)$ — пространство Адамара, $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F: C \times C \to \mathbb{R}$ выполнены условия 1) – 5) и $S \ne \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности $(x_n)$, $(y_n)$ слабо сходятся к решению $z \in S$ задачи о равновесии (4), причем $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0$.

**Доказательство.** Пусть $z' \in S$. Положим

$$
a_n = d^2(x_n, z') + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}) ,
$$

$$
b_n = \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) .
$$

Неравенство (13) принимает вид

$$
a_{n+1} \le a_n - b_n .
$$

Поскольку существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$
1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 2\tau \in (0,1) \text{ и } 1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 3\tau \in (0,1) \text{ при } n \to \infty.
$$

Из леммы 4 заключаем, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(d^2(x_n, z')+2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}d^2(x_n, y_{n-1})\right)$$

и
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(y_n, x_n)+\left(1-2\tau\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}}-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(x_{n+1}, y_n)\right)<+\infty.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n)=0 \tag{18}$$

и сходимость числовых последовательностей $(d(x_n, z'))$, $(d(y_n, z'))$ для всех $z'\in S$. В частности, последовательности $(x_n)$, $(y_n)$ ограничены.

Рассмотрим подпоследовательность $(x_{n_k})$, слабо сходящуюся к некоторой точке $z\in C$. Тогда из (18) следует, что $(y_{n_k-1})$ слабо сходится к $z$. Покажем, что $z\in S$. Из (12) следует

$$F(y_{n_k-1}, y)\ge F(y_{n_k-1}, x_{n_k})+ \\ +\frac{1}{2\lambda_{n_k-1}}(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})+d^2(x_{n_k}, y)-d^2(x_{n_k-1}, y))\ \ \forall y\in C. \tag{19}$$

Воспользуемся неравенством (17) для оценки снизу члена $F(y_{n_k-1}, x_{n_k})$ в (19). Получим

$$F(y_{n_k-1}, y)\ge F(y_{n_k-2}, x_{n_k})-F(y_{n_k-2}, y_{n_k-1})+ \\ +\frac{1}{2\lambda_{n_k-1}}(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})+d^2(x_{n_k}, y)-d^2(x_{n_k-1}, y))- \\ -\frac{\tau}{2\lambda_{n_k}}(d^2(y_{n_k-2}, y_{n_k-1})+d^2(x_{n_k}, y_{n_k-1})). \tag{20}$$

Разность $F(y_{n_k-2}, x_{n_k})-F(y_{n_k-2}, y_{n_k-1})$ оценим снизу с помощью (11). Имеем

$$F(y_{n_k-2}, x_{n_k})-F(y_{n_k-2}, y_{n-1})\ge \\ \ge\frac{1}{2\lambda_{n_k-1}}(d^2(x_{n_k-1}, y_{n_k-1})-d^2(y_{n_k-1}, x_{n_k})-d^2(x_{n_k}, x_{n_k-1})). \tag{21}$$

Комбинируя (20) и (21), получаем

$$F(y_{n_k-1}, y)\ge\frac{1}{2\lambda_{n_k-1}}(d^2(x_{n_k-1}, y_{n_k-1})-d^2(y_{n_k-1}, x_{n_k})-d^2(x_{n_k}, x_{n_k-1}))+ \\ +\frac{1}{2\lambda_{n_k-1}}(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})+d^2(x_{n_k}, y)-d^2(x_{n_k-1}, y))- \\ -\frac{\tau}{2\lambda_{n_k}}(d^2(y_{n_k-2}, y_{n_k-1})+d^2(x_{n_k}, y_{n_k-1}))\ \ \forall y\in C. \tag{22}$$

Совершив предельный переход в (22) с учетом (18) и слабой полунепрерывности сверху функции $F(\cdot, y): C\to\mathbb{R}$, получим

$$F(z, y)\ge\overline{\lim_{k\to\infty}}\,F(y_{n_k-1}, y)\ge 0\ \ \forall y\in C,$$

т.е. $z\in S$.

Применяя вариант леммы Опяла для метрических пространств Адамара (лемма 1), получаем слабую сходимость последовательности $(x_n)$ к точке $z \in S$. Рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность $(x_{m_k})$, слабо сходящаяся к некоторой точке $\bar{z} \in C$ и $\bar{z} \neq z$. Очевидно, что $\bar{z} \in S$. Далее, имеем

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z) < \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \bar{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \bar{z}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, \bar{z}) <$$

$$< \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z),$$

что невозможно. Следовательно, $(x_n)$ слабо сходится к $z \in S$. Из (18) следует, что и последовательность $(y_n)$ слабо сходится к $z \in S$. ■

### ВАРИАНТ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим частный случай задачи о равновесии: вариационное неравенство в гильбертовом пространстве $H$ [14]:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in C. \tag{23}$$

Предположим, что выполнены следующие условия: множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое; оператор $A: C \to H$ — псевдомонотонный, липшицевый и секвенциально слабо непрерывный; множество решений (23) не пусто. Пусть $P_C$ — оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество $C$, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества $C$ со свойством $\| P_C x - x \| = \min_{z \in C} \| z - x \|$.

Для вариационных неравенств (23) алгоритм 1 принимает следующий вид.

**Алгоритм 2**

**Инициализация.** Выбираем элемент $x_1, \ y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Полагаем $n = 1$.

**Шаг 1.** Вычислить

$$y_n = P_C (x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$

**Шаг 2.** Вычислить

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda_n A y_n).$$

Если $x_{n+1} = x_n = y_n$, то остановить и $x_n$ есть решение. Иначе перейти на шаг 3.

**Шаг 3.** Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\| y_{n-1} - y_n \|^2 + \| x_{n+1} - y_n \|^2}{(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)} \right\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, оператор $A: C \to H$ псевдомонотонный, липшицевый, секвенциально слабо непрерывный и существуют решения (23). Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности $(x_n)$, $(y_n)$ слабо сходятся к решению вариационного неравенства (23), причем $\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \| y_n - x_{n+1} \| = 0$.

**Замечание 8.** Если оператор $A$ монотонный, то результат теоремы 2 справедлив без предположения о секвенциальной слабой непрерывности оператора $A$.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье в продолжение работ [18, 30] рассмотрен новый адаптивный двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в метрических пространствах Адамара. Алгоритм имеет структуру

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left( F(y_{n-1}, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \arg\min_{y \in C} \left( F(y_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$ выбирается адаптивно. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага [9, 10, 27, 28, 30] в предлагаемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании модифицированной оценки из работы [30]. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

Авторы планируют рассмотреть более специальный вариант адаптивного двухэтапного проксимального алгоритма для вариационных неравенств и минимаксных задач на многообразиях Адамара (например, на многообразии симметричных положительно определенных матриц). Также представляет интерес построение рандомизированнных адаптивный версий алгоритмов.

В.В. Семенов выражает благодарность профессору Ю.В. Малицкому за замечания относительно подходов к построению адаптивных алгоритмов оптимизации первого порядка и руководителю компании ЛУН Андрею Миме за поддержку исследований на факультете компьютерных наук и кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium problems and applications. London: Academic Press, 2019. xx+419 p.
2. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal*. 2005. Vol. 6. P. 117–136.
3. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys*. 1997. Vol. 37. P. 1285–1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044.
4. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele P. et al. (Eds.). Equilibrium problems and variational models. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 289–298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1.
5. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*. 2008. Vol. 57. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876.
6. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, Iss. 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.
7. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich’s methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
8. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In: Zgurovsky M.Z. and Sadovnichiy V.A. (Eds.). *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*. Vol. 211. Springer International Publishing Switzerland, 2014. P. 131–146. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10.

9. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (Ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications*. Vol. 115. Cham: Springer, 2016. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
10. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (Eds.). Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 836. Cham: Springer, 2019. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.
11. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012. Vol. 388. P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001.
12. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041.
13. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. Vol. 20, N 1. P. 281–297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361.
14. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
15. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains. *Izvestiya Mathematics*. 2005. Vol. 69, Iss. 5. P. 1035–1059. http://dx.doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.
16. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.
17. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim*. 2004. Vol. 15, Iss. 1. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629.
18. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.
19. Stonyakin F.S. On the adaptive proximal method for a class of variational inequalities and related problems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2019. Vol. 25, N 2. P. 185–197. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-185-197.
20. Stonyakin F.S., Vorontsova E.A., Alkousa M.S. New version of mirror prox for variational inequalities with adaptation to inexactness. In: Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (Eds.). Optimization and Applications. OPTIMA 2019. *Communications in Computer and Information Science*. Vol 1145. Cham: Springer, 2020. P. 427–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38603-0_31.
21. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, Iss. 5. P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40.
22. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 5. P. 741–749. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y.
23. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
24. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
25. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
26. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. Vol, 28. Iss. 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.
27. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9.

28. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with Bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.
29. Bacak M. Convex analysis and optimization in Hadamard spaces. Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.
30. Ведель Я.И., Сандраков Г.В., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сходимость двухэтапного проксимального алгоритма для задачи о равновесии в пространствах Адамара. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 5. С. 115–125.
31. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5.
32. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A course in metric geometry. *Graduate Studies in Mathematics*. Vol. 33. Providence: AMS, 2001. xiv+415 p.
33. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. *arXiv preprint arXiv:1802.10551*. 2018.

*Надійшла до редакції 22.01.2020*

**Я.І. Ведель, Г.В. Сандраков, В.В. Семенов**

**АДАПТИВНИЙ ДВОЕТАПНИЙ ПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА**

**Анотація.** Розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для наближеного розв'язання задач запропоновано та досліджено новий ітераційний адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому алгоритмі не виконуються обчислення значень біфункції в додаткових точках, а також знання інформації про величину ліпшицевих констант біфункції не потрібно. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теорему про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Запропонований алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей у гільбертових просторах.

**Ключові слова:** простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, двоетапний проксимальний алгоритм, адаптивність, збіжність.

**Ya.I. Vedel, G.V. Sandrakov, V.V. Semenov**

**AN ADAPTIVE TWO-STAGE PROXIMAL ALGORITHM FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES**

**Abstract.** Equilibrium problems in Hadamard metric spaces are considered in the paper. For an approximate solution of problems, a new iterative adaptive two-stage proximal algorithm is proposed and analyzed. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithm does not calculate bifunction values at additional points and does not require knowledge of the value of bifunction's Lipschitz constants. For pseudo-monotone bifunctions of Lipschitz type, the theorem on weak convergence of the sequences generated by the algorithm is proved. It is shown that the proposed algorithm is applicable to pseudo-monotone variational inequalities in Hilbert spaces.

**Keywords:** Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, two-stage proximal algorithm, adaptivity, convergence.

**Ведель Яна Игоревна,**
аспирантка Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: yana.vedel@gmail.com.

**Сандраков Геннадий Викторович,**
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: gsandrako@gmail.com.

**Семенов Владимир Викторович,**
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.