

ПОБУДОВА ЗОВНІШНЬОГО КОНТУРУ СОПЛА ФРАНКЛЯ З ВИКОРИСТАННЯМ S-ПОДІБНИХ КРИВИХ ІЗ КВАДРАТИЧНИМ ЗАКОНОМ РОЗПОДІЛУ КРИВИНИ¹

Анотація. Розроблено математичну модель, алгоритм та програмне забезпечення для задачі побудови S-подібної кривої, яка проходить через дві задані точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної в точці із заданою абсцисою. Для керування точкою перегину S-подібної кривої з квадратичним законом розподілу кривини в натуральній параметризації використовується кут нахилу дотичної в точці із заданою абсцисою. Алгоритм ґрунтується на модифікації методу з розтягом простору в напрямі різниці двох послідовних узагальнених градієнтів. Обчислювальні експерименти показали ефективність розробленого алгоритму для проектування зовнішнього контуру сопла Франкля.

Ключові слова: зовнішній контур сопла, S-подібна крива, натуральна параметризація, квадратична кривина, негладка оптимізація, r -алгоритм.

ВСТУП

Одним з основних елементів будь-якого реактивного двигуна є сопло, яке необхідне для отримання максимально можливої швидкості витікання газового потоку — створення реактивної сили [1, 2]. Для одержання надзвукових швидкостей витікання газового потоку Г. Лавалем, Т. Стентоном і Ф.І. Франклем [3] були розроблені надзвукові сопла, в яких відбувається прискорення газового потоку до швидкостей, більших за швидкість звуку. Сопла (Лавала, Стентона, Франкля) відрізняються, зокрема, формою зовнішнього контуру (рис. 1).

Надзвукове реактивне сопло складається з трьох основних частин: частини сопла, що звужується (дозвукової), ділянки критичного перерізу і частини сопла, що розширюється (надзвукової) [4]. Профілювання сопла та побудова зовнішнього контуру кожної з його частин є важливими елементами проектування авіаційних і ракетних двигунів. При цьому необхідно поєднувати задачі конструювання та обчислення за параметрами газодинаміки, тепломасообміну і міцності сопла. Це потребує

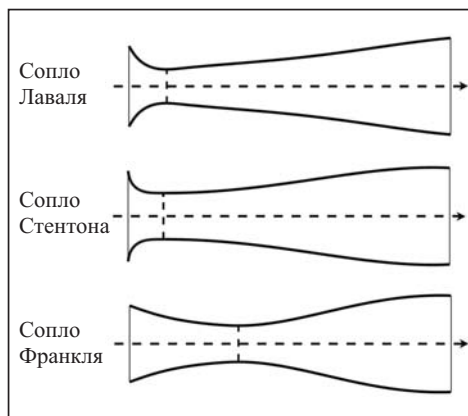


Рис. 1. Відомі форми зовнішніх контурів сопел

розв'язання різних типів складних задач газодинаміки для кожної з трьох частин сопла, під час якого визначають тягові та енергетичні характеристики з необхідною точністю і враховують обмеження на габарити та масу сопла [4]. Методи розв'язання цих задач газодинаміки потребують великих витрат за часом.

У проектних роботах часто потрібні швидкі наближені методи побудови контуру сопла з високими тяговими характеристиками. Це накладає додаткові обмеження на геометричні властивості контуру, які можна забезпечувати методами прикладної геометрії, зокрема ме-

¹Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проект № 0120U002085).

тодами геометричного моделювання плоских кривих [5]. У цих методах використовують алгоритми натуральної параметризації [6, 7] та графіки кривин для забезпечення геометричних властивостей контурів, які мають задовольняти необхідні газодинамічні вимоги. Криві в натуральній параметризації активно застосовуються в роботах миколаївської школи прикладної геометрії (Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського, ДП «Науково-виробничий комплекс газотурбобудування «Зоря-Машпроект») [8–10]. Використання графіків кривин є ефективним під час проектування газодинамічних профілів пера лопаток [9]. Зауважимо, що для кривих в натуральній параметризації, за рахунок використання лінійного або квадратичного законів розподілу кривини, можна уникнути «хвилястості» кривини, яка може виникати у випадку побудови плоских кривих за допомогою відомого методу Безьє–Бернштейна [11].

Метою роботи є розроблення методу, алгоритму та його програмної реалізації для побудови зовнішнього контуру сопла Франкля за допомогою дволанкових S-подібних кривих, отриманих з використанням алгоритмів натуральної параметризації та квадратичного закону розподілу кривини. Зовнішній контур сопла Франкля складається з двох S-подібних кривих: перша крива — для дозвукової частини (де сопло звужується) та друга крива — для надзвукової частини (де сопло розширюється). Керування точками перегину цих кривих дає можливість вибирати необхідні форми для фрагментів зовнішнього контуру дозвукової та надзвукової частин сопла.

Стаття складається з п'яти розділів. У розд. 1 наведено геометричну постановку задачі побудови S-подібної кривої, яка проходить через дві точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної в точці із заданою абсцисою. У розд. 2 розглянуто відповідну систему нелінійних інтегральних рівнянь (СНІР) та обговорено її властивості, пов'язані з існуванням багатьох розв'язків та із сингулярністю системи для погано масштабованих задач. У розд. 3 представлено оптимізаційну задачу для знаходження розв'язку СНІР для S-подібної кривої та метод її розв'язання з використанням модифікації r -алгоритму Шора. У розд. 4 та 5 наведено результати обчислювальних експериментів для знаходження розв'язків добре та погано масштабованих задач побудови дволанкових S-подібних кривих, які показують ефективність розробленого алгоритму для моделювання фрагментів зовнішнього контуру у дозвуковій та надзвуковій частинах сопла Франкля.

1. ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Вихідними даними для побудови контуру у вигляді плоскої S-подібної кривої є координати точок (x_1, y_1) , (x_2, y_2) та кути нахилу дотичних у них (φ_1, φ_2) , а також кут φ_p — кут нахилу дотичної в точці (x_p, y_p) та її абсциса x_p , які будуть використовуватися для керування точкою перегину S-подібної кривої. Для надзвукового фрагмента контуру сопла Франкля, вигляд якого наведено на рис. 1, задані точки та кути нахилу в них представлено на рис. 2.

Постановка задачі. Потрібно так з'єднати точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) кривою лінією в натуральній параметризації, де кривина $k(s) = as^2 + bs + c$ є квадратичною функцією від s — довжини кривої, щоб забезпечити в точках (x_1, y_1) та

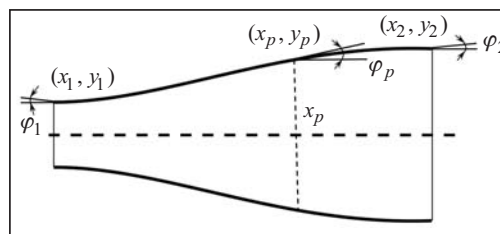


Рис. 2. Вихідні дані для побудови зовнішнього контуру сопла Франкля у надзвуковій частині

(x_2, y_2) задані значення кутів нахилу дотичних φ_1 та φ_2 , а в точці з абсцисою x_p , для якої $x_1 < x_p < x_2$, забезпечити кут, що дорівнює φ_p . Кут φ_1 , φ_2 та φ_p вимірюються в радіанах.

Якщо контур представлено у вигляді S-подібної кривої, то квадратична кривина $k(s) = as^2 + bs + c$ забезпечує єдиність розв'язку задачі. Задаючи значення абсциси x_p та кут нахилу дотичної φ_p , отримуємо можливість керувати точкою перегину отриманої S-подібної кривої, що надає змогу автономно моделювати той чи інший вигляд фрагментів зовнішнього контуру сопла Франкля у дозвуковій та надзвуковій його частинах. Для дозвукової частини сопла фрагмент зовнішнього контуру має вигляд, який є «дзеркальним» відображенням фрагмента зовнішнього контуру у надзвуковій частині. Для надзвукової частини сопла абсциса x_p буде розміщуватися ближче до її закінчення, а для дозвукової частини сопла — ближче до її початку.

Для кривої $x(s), y(s), s > 0$, в натуральній параметризації кут нахилу дотичної $\varphi(s)$ в точці $(x(s), y(s))$ визначається за формулою

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds = \varphi(0) + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs, \quad (1)$$

а координати $x(s)$ та $y(s)$ — за формулами

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds, \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds. \quad (2)$$

Тут кривина $k(s) = as^2 + bs + c$ задається квадратичною функцією від s — довжини кривої, де a, b, c — задані коефіцієнти.

2. СИСТЕМА НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай S — довжина кривої від точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) , а s_p — довжина кривої від точки (x_1, y_1) до точки (x_p, y_p) . Знаходженню параметрів кривини a, b, c та довжин S, s_p відповідає система з п'яти нелінійних рівнянь [12]:

$$x_2 = x_1 + \int_0^S \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (3)$$

$$y_2 = y_1 + \int_0^S \sin \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (4)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS, \quad (5)$$

$$x_p = x_1 + \int_0^{s_p} \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (6)$$

$$\varphi_p = \varphi_1 + \frac{as_p^3}{3} + \frac{bs_p^2}{2} + cs_p. \quad (7)$$

Система (3)–(7) має п'ять невідомих: a, b, c — три коефіцієнти квадратичної функції, S — загальна довжина кривої, s_p — довжина ділянки кривої до точки з відомою абсцисою. Система включає п'ять нелінійних рівнянь, серед яких рівняння (3), (4) та (6) є інтегральними та залежать від невідомих параметрів підінтегральних функцій та невідомих верхніх границь для визначеного інтеграла. Інтегральні рівняння (3) та (4) зв'язують між собою точки (x_1, y_1) та

(x_2, y_2) за формулами (2). Нелінійне рівняння (5) за формулою (1) забезпечує потрібний кут φ_2 в точці (x_2, y_2) , який визначається за заданим кутом φ_1 в точці (x_1, y_1) . Інтегральне рівняння (6) зв'язує між собою координати x_1 та x_p за першою формулою із (2), а нелінійне рівняння (7) забезпечує кут, що дорівнює φ_p , в точці з абсцисою x_p за формулою (1).

Кут нахилу дотичної φ_p в точці з відомою абсцисою x_p будемо використовувати для керування точкою перегину S-подібної кривої, в якій кривина є рівною нулю. Зауважимо, що ордината y_p не використовується як невідома змінна. Її значення обчислюється за формулою $y_p = y_1 + \int_0^{s_p} \sin \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds$, де s_p —

знайдена довжина ділянки кривої до точки з відомою абсцисою.

Виділимо дві властивості системи (3)–(7), які потрібно враховувати під час знаходження її розв'язків, пов'язаних з проектуванням зовнішнього контуру сопла Франкля у вигляді дволанкових S-подібних кривих.

Перша властивість: у загальному випадку система (3)–(7) має багато розв'язків. Так, наприклад, у табл. 1 наведено чотири розв'язки для таких вихідних даних:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 = 2.46, \quad \varphi_1 = 0; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2.75, \quad \varphi_2 = 0; \\ x_p = 0.7, \quad \varphi_p = 0.209440 = 12^\circ. \end{aligned} \quad (8)$$

Графіки кривих для цих розв'язків наведено на рис. 3 (криві для розв'язків 1 і 2) та на рис. 4 (криві для розв'язків 3 і 4).

Із рис. 3 та рис. 4 видно, що тільки для розв'язку 1 крива є S-подібною. Вона характеризується наявністю однієї точки перегину, де кривина змінює знак. Її ко-

Таблиця 1. Чотири розв'язки системи (3)–(7) для вихідних даних (8)

№ розв'язку	a^*	b^*	c^*	S^*	s_p^*
1	7.92822	-11.4065	3.07557	1.05562	0.753992
2	-7.03716	16.4890	-6.19900	2.42487	1.15072
3	8.16618	-28.3207	18.3901	2.69815	2.39725
4	-6.67708	23.8707	-15.9001	2.89409	2.58685

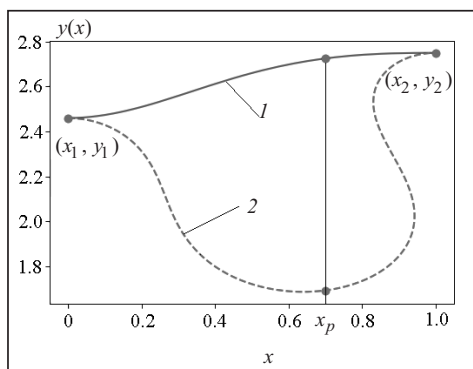


Рис. 3. Графіки кривих для розв'язку 1 (крива 1) та розв'язку 2 (крива 2) із табл. 1

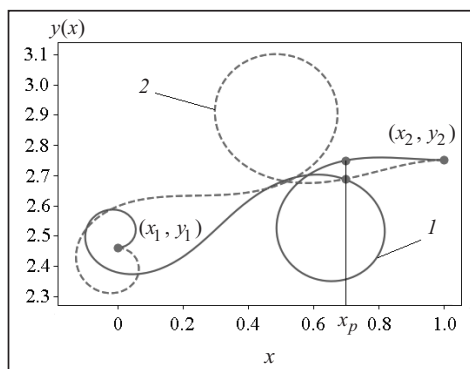


Рис. 4. Графіки кривих для розв'язку 3 (крива 1) та розв'язку 4 (крива 2) із табл. 1

ординати $x(s_1)$, $y(s_1)$ визначаються першим розв'язком квадратного рівняння $a^* s^2 + b^* s + c^* = 0$, $s_{1,2} = \frac{-b^* \pm \sqrt{(b^*)^2 - 4a^* c^*}}{2a^*}$, $s_1 = 0.35943 \in [0, S^*]$. Для трьох

інших розв'язків це не так. Крива для розв'язку 2 містить дві ділянки, кожна з яких є S-подібною кривою, та характеризується довжиною $S^* = 2.42487$, яка є значно більшою за довжину $S^* = 1.05562$ для розв'язку 1. Зауважимо, що для розв'язку 2 існує ділянка кривої $y(x)$, де ординати визначені неоднозначно. Для кривих, які відповідають розв'язкам 3 та 4, існують по дві ділянки, де ординати кривих $y(x)$ визначаються неоднозначно, причому ділянки кривих, які є ближчими до точки (x_2, y_2) , мають циклічний характер.

Тому першою умовою для пошуку розв'язку системи (3)–(7) є відсікання тих зайвих розв'язків, яким не відповідають S-подібні криві. Це легко зробити за допомогою обмеження зверху на довжину кривої. Так, наприклад, якщо до системи рівнянь (3)–(7) додати нерівність $S \leq 2$, то відсікатимуться розв'язки 2, 3 та 4 із табл. 1.

Друга властивість: система (3)–(7) може бути погано масштабованою (сингулярною). Нехай довжина кривої $S^* = 1000$. Для того, щоб у точці (x_2, y_2) гарантувати близький до нуля кут φ_2 , потрібно, щоб для малого ε виконувалася така нерівність:

$$-\varepsilon \leq \frac{a(1000)^3}{3} + \frac{b(1000)^2}{2} + 1000c \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Нерівність (9) означає, що компоненти розв'язку системи (3)–(7) будуть величинами дуже різних порядків: a^* буде мати порядок 10^{-9} , b^* — порядок 10^{-6} , а c^* — порядок 10^{-3} . Це висуває додаткові вимоги для методу розв'язання системи нелінійних рівнянь.

У цьому випадку може допомогти лема 1 з [12], яка встановлює зв'язок розв'язків вихідної системи (3)–(7) та масштабованої системи, в якій координати точок домножуються на одну й ту саму величину $\mu > 0$.

Лема 1 ($\mu > 0$) [12]. Якщо a^* , b^* , c^* , S^* та s_p^* є розв'язком системи (3)–(7), то

$$a^{**} = a^* / \mu^3, \quad b^{**} = b^* / \mu^2, \quad c^{**} = c^* / \mu, \quad S^{**} = \mu S^*, \quad s_p^{**} = \mu s_p^* \quad (10)$$

є розв'язком такої системи рівнянь:

$$\mu x_2 = \mu x_1 + \int_0^S \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (11)$$

$$\mu y_2 = \mu y_1 + \int_0^S \sin \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (12)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS, \quad (13)$$

$$\mu x_p = \mu x_1 + \int_0^{s_p} \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (14)$$

$$\varphi_p = \varphi_1 + \frac{as_p^3}{3} + \frac{bs_p^2}{2} + cs_p. \quad (15)$$

За допомогою леми 1 можна, використовуючи отриманий розв'язок для добре масштабованої системи (де усі компоненти розв'язку мають один порядок),

легко знаходити відповідний йому розв'язок для погано масштабованої (сингулярної) системи. Для цього достатньо знайти розв'язок добре масштабованої системи (3)–(7) та перерахувати розв'язок для погано масштабованої системи (11)–(15) за формулою (10).

Зауважимо, що в трохі зміненому вигляді систему (3)–(7) розглянуто у статті [10], де невідому довжину s_p замінено її невідомою часткою p у загальній довжині S , тобто $s_p = pS, 0 < p < 1$. Для знаходження розв'язку системи спочатку з рівнянь (5) та (7) виражають невідомі коефіцієнти a і c через невідомий коефіцієнт b та невідомі довжини S, s_p . Підставляючи їх у рівняння (3), (4) та (6), отримуємо систему трьох інтегральних рівнянь з трьома невідомими b, S, s_p . Використання ітераційних методів для пошуку розв'язку системи трьох рівнянь утруднюється тим, що вирази для підінтегральних функцій є складними.

Нижче розглянемо метод, який не має вказаного недоліку. У його основу покладено модифікацію r -алгоритму [13] для розв'язання спеціальної задачі мінімізації негладкої функції (сума модулів нев'язок системи (3)–(7)) з контролем обмежень на довжини S, s_p для гарантування їхніх додатних допустимих значень.

3. ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА ТА АЛГОРИТМ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо умовну задачу мінімізації суми модулів функцій нев'язок для рівнянь (3)–(7), яка має такий вигляд: знайти

$$f^* = f(a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*) = \min_{a, b, c, S, s_p} \left\{ f(a, b, c, S, s_p) = \sum_{i=1}^3 |f_i(a, b, c, S)| + \sum_{i=4}^5 |f_i(a, b, c, s_p)| \right\} \quad (16)$$

за обмежень

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max}, \quad (17)$$

$$|x_p - x_1| \leq s_p \leq S, \quad (18)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 + a \frac{i^3 S^3}{3N^3} + b \frac{i^2 S^2}{2N^2} + c \frac{iS}{N} \leq \frac{\pi}{2}, \quad i=1, \dots, N, \quad (19)$$

де нев'язки для рівнянь (3)–(7) задано такими функціями:

$$f_1(a, b, c, S) = x_2 - x_1 - \int_0^S \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (20)$$

$$f_2(a, b, c, S) = y_2 - y_1 - \int_0^S \sin \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (21)$$

$$f_3(a, b, c, S) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{aS^3}{3} - \frac{bS^2}{2} - cS, \quad (22)$$

$$f_4(a, b, c, s_p) = x_p - x_1 - \int_0^{s_p} \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (23)$$

$$f_5(a, b, c, s_p) = \varphi_p - \varphi_1 - \frac{as_p^3}{3} - \frac{bs_p^2}{2} - cs_p, \quad (24)$$

N — кількість точок дискретизації функції $\varphi(s) = \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs$ на інтервалі $s \in [0, S]$.

Тут цільова функція (16) є негладкою та означає мінімізацію суми модулів функцій (20)–(24) — функцій нев'язок для рівнянь (3)–(7). Обмеження (17) та (18) гарантують додатні значення для довжин S та s_p , які є верхніми границями для визначених інтегралів у функціях нев'язок (20), (21) та (23). Тут $S_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — мінімальна відстань між точками (x_1, y_1) та (x_2, y_2) , $S_{\max} > S_{\min}$ — параметри для керування нижньою та верхньою межами довжини S . Чим ближчим до S_{\min} є значення верхньої межі S_{\max} , тим легше для системи (3)–(7) уникнути «циклічних» розв'язків (розв'язки 3 і 4 на рис. 4), а отже, легше знайти розв'язок, який визначає S -подібну криву (розв'язок 1 на рис. 3).

Обмеження (19) забезпечує існування єдиного глобального мінімуму для задачі (16)–(19). Воно використовує доповнення задачі (16)–(18) дискретним аналогом неперервного обмеження

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi(s) = \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \leq \frac{\pi}{2}, \quad s \in S. \quad (25)$$

Обмеження (25) означає, що кути нахилу дотичних у довільній точці кривої не виходять за межі заданого діапазону $\varphi(s) \in [-\pi/2, \pi/2]$, тобто функція $y(x)$ на інтервалі $[x_1, x_2]$ є однозначно визначеною. Це відсікає розв'язки системи (3)–(7), для яких існують такі $\bar{x} \in [x_1, x_2]$, що ордината $y(\bar{x})$ визначається неоднозначно (крива 2 із рис. 3, обидві криві із рис. 4).

Якщо в оптимізаційній задачі опустити обмеження (19), то отримаємо задачу (16)–(18), розглянуту в статті [12]. Для великих значень верхньої межі S_{\max} задача (16)–(18) є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування. Кількість її глобальних мінімумів визначається значенням S_{\max} . Так, наприклад, якщо $S_{\max} = 2.0$, то для вихідних даних (8) задача (16)–(18) має єдину точку глобального мінімуму, дві точки глобального мінімуму — якщо $S_{\max} = 2.5$, три — якщо $S_{\max} = 2.7$, чотири — якщо $S_{\max} = 3.0$. Задача (16)–(19) має всього одну точку глобального мінімуму, яка збігається з розв'язком системи (3)–(7) з найменшою загальною довжиною кривої.

Якщо в результаті пошуку локального мінімуму для задачі (16)–(19) отримуємо $f^* = 0$, то це означає, що знайдено точку глобального мінімуму $(a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*)^T$, яка є розв'язком системи (3)–(7). Якщо отримуємо $f^* > 0$, то точка $(a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*)^T$ не є розв'язком системи (3)–(7). Це може бути як у разі відсутності розв'язку у системи (3)–(7) за обмежень (17), (18), так і тоді, коли алгоритм зупиниться в «неоптимальній» точці, враховуючи, що для великих значень параметра S_{\max} задача (16)–(18) є багатоекстремальною.

Задача (16)–(19) є задачею мінімізації негладкої функції, яка визначена не для всіх значень S та s_p , а тільки для тих, які є додатними та надають змогу обчислювати визначені інтеграли для функцій $f_1(a, b, c, S)$, $f_2(a, b, c, S)$ та $f_4(a, b, c, s_p)$. Для знаходження точки локального мінімуму у задачі (16)–(18) можна скористатися модифікацією r -алгоритму [13, 14], яка враховує вказану особливість задачі. У точці, де узагальнений градієнт цільової функції є невизначеним, модифікація r -алгоритму використовує узагальнений градієнт до одного із порушених обмежень (17), (18) і (19).

Алгоритм розв'язання задачі (16)–(19) реалізований за допомогою методу мультистарти та octave-функції **ralgb5a** [15, 16] і знаходить найкращий локальний мінімум цільової негладкої функції за допомогою запуску модифікації r -алгоритму із заданої кількості стартових точок. Алгоритм використовує аналітич-

ний спосіб обчислення узагальнених градієнтів цільової функції (16) та метод трапецій для обчислення інтегралів як у формулах (20), (21) та (23), так і у формулах для узагальнених градієнтів.

Наведемо формули для обчислення узагальненого градієнта цільової функції (16). Нехай вектор $g_f = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}, \frac{\partial f}{\partial S}, \frac{\partial f}{\partial s_p} \right)^T$ є узагальненим градієнтом

цільової функції $f(a, b, c, S, s_p) = \sum_{i=1}^3 |f_i(a, b, c, S)| + \sum_{i=4}^5 |f_i(a, b, c, s_p)|$. Перші три

компоненти узагальненого градієнта обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^5 \text{sign}(f_i) \frac{\partial f_i}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^5 \text{sign}(f_i) \frac{\partial f_i}{\partial b}, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = \sum_{i=1}^5 \text{sign}(f_i) \frac{\partial f_i}{\partial c}, \quad (26)$$

де

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = -\int_0^S \frac{s^3}{3} \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_2}{\partial a} = -\int_0^S \frac{s^3}{3} \cos\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad (27)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial a} = -\frac{S^3}{3}, \quad \frac{\partial f_4}{\partial a} = -\int_0^{s_p} \frac{s^3}{3} \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_5}{\partial a} = -\frac{s_p^3}{3};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial b} = -\int_0^S \frac{s^2}{2} \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_2}{\partial b} = -\int_0^S \frac{s^2}{2} \cos\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad (28)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial b} = -\frac{S^2}{2}, \quad \frac{\partial f_4}{\partial b} = -\int_0^{s_p} \frac{s^2}{2} \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_5}{\partial b} = -\frac{s_p^2}{2};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial c} = -\int_0^S s \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_2}{\partial c} = -\int_0^S s \cos\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad (29)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial c} = -S, \quad \frac{\partial f_4}{\partial c} = -\int_0^{s_p} s \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right) ds, \quad \frac{\partial f_5}{\partial c} = -s_p.$$

Дві останні компоненти узагальненого градієнта обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \sum_{i=1}^3 \text{sign}(f_i) \frac{\partial f_i}{\partial S}, \quad \frac{\partial f}{\partial s_p} = \sum_{i=4}^5 \text{sign}(f_i) \frac{\partial f_i}{\partial s_p}, \quad (30)$$

де

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = -\cos\left(\varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS\right), \quad \frac{\partial f_2}{\partial S} = -\sin\left(\varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS\right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = -aS^2 - bS - c, \quad \frac{\partial f_4}{\partial s_p} = \cos\left(\varphi_1 + \frac{as_p^3}{3} + \frac{bs_p^2}{2} + cs_p\right), \quad \frac{\partial f_5}{\partial s_p} = -as_p^2 - bs_p - c. \quad (32)$$

У точці, де узагальнений градієнт цільової функції є невизначеним, для модифікації г-алгоритму він замінюється на узагальнений градієнт до одного із порушених двобічних обмежень (17), (18) або (19). Для цього використовуємо шість порушених обмежень $g_i(\bullet) \leq 0, i=1, \dots, 6$, які вибираємо у такий спосіб: $g_1(S) = S_{\min} - S$, $g_2(S) = S - S_{\max}$ — для двобічних обмежень (17), $g_3(s_p) = |x_p - x_1| - s_p$, $g_4(S, s_p) = s_p - S$ — для обмежень (18), $g_5(a, b, c, S) =$

$$= \max_{i=1, \dots, N} \left\{ -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - a \frac{i^3 S^3}{3N^3} - b \frac{i^2 S^2}{2N^2} - c \frac{iS}{N} \right\}, \quad g_6(a, b, c, S) = \max_{i=1, \dots, N} \left\{ \varphi_1 + a \frac{i^3 S^3}{3N^3} + b \frac{i^2 S^2}{2N^2} + c \frac{iS}{N} - \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{— для двобічних обмежень (19).}$$

Якщо всі шість обмежень виконуються, тоді використовується узагальнений градієнт цільової функції (16), який обчислюємо за формулами (26)–(32).

Описаний алгоритм розв'язання оптимізаційної задачі (16)–(19) реалізовано мовою octave. За його допомогою можна знаходити розв'язки системи (3)–(7), яким відповідають S-подібні криві. Якщо у задачі (16)–(19) опустити обмеження (19), а це рівносильно ігноруванню порушених обмежень $g_5(\cdot)$ та $g_6(\cdot)$, тоді алгоритм для великих значень параметра S_{\max} надає змогу знаходити і «циклічні» розв'язки. Так, саме за допомогою такого алгоритму було знайдено всі чотири розв'язки, наведені у табл. 1.

4. ТРИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Наведемо результати обчислювальних експериментів, які характеризують роботу алгоритму для тестового прикладу (8) та його масштабованого варіанта ($\mu = 100$)

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad y_1 = 246, \quad \varphi_1 = 0^\circ; \quad x_2 = 100, \quad y_2 = 275, \quad \varphi_2 = 0^\circ; \\ x_p = 70, \quad \varphi_p = 0.209440 = 12^\circ. \end{aligned} \quad (33)$$

Для вихідних даних (8) глобальним мінімумом задачі (16)–(19) є єдина точка, для якої компоненти $a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*$ збігаються з розв'язком 1 системи (3)–(7) із табл. 1. Для вихідних даних (33) глобальним мінімумом є точка з компонентами $\bar{a}^* = a^* \times 10^{-6}$, $\bar{b}^* = b^* \times 10^{-4}$, $\bar{c}^* = c^* \times 10^{-2}$, $\bar{S}^* = S^* \times 100$, $\bar{s}_p^* = s_p^* \times 100$.

Перший експеримент пов'язаний з дослідженням збіжності алгоритму залежно від вибору стартової точки та верхньої межі $S_{\max} = qS_{\min}$, де $q \in \{1.2, 1.5, 2.0, 3.0\}$. Компоненти стартової точки для коефіцієнтів квадратичної функції кривини a_0, b_0, c_0 генерувалися за допомогою octave-датчика випадкових чисел `rand("seed", 2020)`, а для довжин S та s_p вибиралися рівними їхнім нижнім межах $S_0 = S_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $(s_p)_0 = |x_p - x_1|$. Критерієм успішного розв'язання задачі (16)–(19) була вибрана умова, що значення функції, яка мінімізується, є меншим ніж 10^{-6} . Найбільш значимі параметри r -алгоритму вибиралися відповідно до рекомендованих в [16] для мінімізації негладких функцій — коефіцієнт розтягу простору $\alpha = 1.5$, величина початкового кроку $h_0 = 1.0$, коефіцієнт зменшення кроку $q_0 = 1.0$, точність зупинки за аргументом $\varepsilon_x = 10^{-6}$, максимальна кількість ітерацій `maxitn` = 500.

У табл. 2 наведено результати першого обчислювального експерименту для розв'язання задачі (16)–(19) для 100 стартових точок, де компоненти a_0, b_0, c_0 належали чотирьом діапазорам $[-5, 5]^3$, $[-25, 25]^3$, $[-50, 50]^3$, $[-100, 100]^3$. Розглянуто три різних сценарії. За першим сценарієм задачу розв'язували для вихідних даних (8), за другим та третім сценаріями — для вихідних даних (33). У першому та другому сценаріях стартові точки вибирали одними й тими самими, а для третього сценарію перші три компоненти стартових точок домножували на коефіцієнти $\{10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}\}$, які узгоджуються з коефіцієнтом масштабу $\mu = 100$ для вихідних даних (33).

Таблиця 2. Кількість успішних стартових точок для трьох сценаріїв (перший експеримент, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$, $\varphi_p = 0.209440 = 12^\circ$)

Діапазон	$q = 1.2$	$q = 1.5$	$q = 2.0$	$q = 3.0$
$x_1 = 0, y_1 = 2.46, x_2 = 1, y_2 = 2.75, x_p = 0.7$				
$[-5, 5]^3$	100/100	100/100	100/100	99/100
$[-25, 25]^3$	100/100	100/100	88/100	80/100
$[-50, 50]^3$	93/100	84/100	74/100	71/100
$[-100, 100]^3$	81/100	70/100	65/100	67/100
$x_1 = 0, y_1 = 246, x_2 = 100, y_2 = 275, x_p = 70$				
$[-5, 5]^3$	95/100	95/100	95/100	95/100
$[-25, 25]^3$	87/100	88/100	85/100	81/100
$[-50, 50]^3$	86/100	70/100	70/100	73/100
$[-100, 100]^3$	78/100	64/100	60/100	62/100
$x_1 = 0, y_1 = 246, x_2 = 100, y_2 = 275, x_p = 70, D = \text{diag} \{10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}\}$				
$[-5, 5]^3 \times D$	98/100	98/100	98/100	98/100
$[-25, 25]^3 \times D$	95/100	95/100	95/100	95/100
$[-50, 50]^3 \times D$	92/100	92/100	92/100	92/100
$[-100, 100]^3 \times D$	95/100	95/100	95/100	95/100

Із табл. 2 видно, що для добре масштабованих даних із 100 запусків алгоритм завжди збігається до точки глобального мінімуму задачі (16)–(19), якщо перші три компоненти стартової точки належать діапазонам $[-5, 5]^3$ та $[-25, 25]^3$. Якщо перші три компоненти належать діапазонам $[-50, 50]^3$ та $[-100, 100]^3$, то алгоритм не завжди збігається до точки глобального мінімуму. Наприклад, для $S_{\max} = 2 \times S_{\min}$ та діапазону $[-100, 100]^3$ алгоритм знайшов розв'язок у шістдесяти п'яти випадках із ста, а в тридцяти п'яти випадках алгоритм не зміг знайти розв'язку та зупинився в точках, де значення цільової функції (16) є більшим нуля. Це зумовлено тим, що глобальний мінімум у задачі (16)–(19) єдиний і йому відповідає довжина $S^* = 1.05562$, а стартова точка знаходиться далеко від точки мінімуму, завдяки чому градієнтний процес прямує до іншого розв'язку системи, якому відповідає суттєво більша довжина кривої. Такі розв'язки можна знайти, якщо вибрати значно завищеною верхню межу S_{\max} та розв'язувати задачу (16)–(18), тобто не враховувати обмеження (19). Але цим розв'язкам відповідають «циклічні» криві (див. рис. 4), які не задовольняють умови моделювання зовнішнього контуру сопла типу Франкля.

Для другого та третього сценаріїв, коли вихідні дані (33) погано масштабовані, немає жодного випадку, щоб алгоритму вдалося успішно розв'язати задачу (16)–(18) у всіх випадках із ста. При цьому результати для третього сценарію є кращими за результати для другого. Це пояснюється тим, що для третього сценарію стартова точка є ближчою до точки глобального мінімуму, ніж для другого сценарію. З результатів першого експерименту випливає, що краще розв'язувати задачу з добре масштабованими даними, ніж з погано масштабованими даними, а стартову точку слід вибирати такою, щоб її перших три компоненти були якомога ближчими до нуля. Це підтверджують результати другого та третього обчислювальних експериментів, наведені у табл. 3 та 4.

Таблиця 3. Прискорення модифікації r -алгоритму (другий експеримент)

ε_x	$q=1.2$	$q=1.5$	$q=2.0$	$q=3.0$
$\alpha = 1.5, h_0 = 1.0, q_1 = 1.0$				
10^{-4}	133/152/20	142/162/17	142/162/17	142/162/17
10^{-6}	198/243/20	197/232/17	197/232/17	197/232/17
10^{-8}	256/307/20	253/312/17	253/312/17	253/312/17
10^{-10}	302/366/20	303/372/17	314/385/17	289/355/17
10^{-12}	371/457/20	372/465/17	365/450/17	370/457/17
$\alpha = 2.0, h_0 = 1.0, q_1 = 0.95$				
10^{-4}	79/130/19	70/116/11	70/116/11	70/116/11
10^{-6}	113/179/19	103/154/11	103/154/11	103/154/11
10^{-8}	133/208/19	127/182/11	127/182/11	127/182/11
10^{-10}	165/258/19	146/205/11	146/205/11	146/205/11
10^{-12}	190/292/19	180/250/11	178/247/11	178/247/11

У табл. 3 наведено витрати r -алгоритму (кількість ітерацій / кількість обчислень узагальненого градієнта цільової функції / кількість обчислень узагальненого градієнта до порушених обмежень) залежно від вибору параметрів α, h_0, q_1 для знаходження S -подібної кривої для вихідних даних (8) з п'ятьма різними критеріями зупинки за аргументом $\varepsilon_x = \{10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}\}$. Алгоритм в обох випадках стартував з однієї й тієї самої точки з компонентами $a_0 = b_0 = c_0 = 0, S_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, (s_p)_0 = |x_p - x_1|$. З таблиці видно, що завдяки вибору параметрів $\alpha = 2.0, h_0 = 1.0, q_1 = 0.95$ можна досягнути прискорення r -алгоритму майже в два рази порівняно з випадком вибору параметрів $\alpha = 1.5, h_0 = 1.0, q_1 = 1.0$. Зауважимо, що хоча $q_1 = 0.95$ не рекомендується вибирати для мінімізації негладких функцій, у цьому випадку його можна використовувати, оскільки кількість невідомих є невеликою.

У табл. 4 наведено порівняння витрат r -алгоритму (за кількістю ітерацій — itn , за кількістю обчислень узагальненого градієнта цільової функції — nfg , за кількістю обчислень узагальненого градієнта до порушених обмежень — ng) для знаходження S -подібної кривої для добре масштабованих даних (8) та погано масштабованих даних (33). Витрати (для (8) / для (33)) наведено для п'ятиох критеріїв зупинки за аргументом $\varepsilon_x = \{10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}\}$. У табл. 4 також наведено абсолютні відхилення між компонентами розв'язків для добре масштабованих та погано масштабованих даних. Вони обчислювалися за формулами $\Delta a = |a^* - \bar{a}^* \times 10^6| / |a^*|, \Delta b = |b^* - \bar{b}^* \times 10^6| / |b^*|, \Delta c = |c^* - \bar{c}^* \times 10^6| / |c^*|, \Delta S = |S^* - \bar{S}^* \times 10^6| / |S^*|, \Delta s_p = |s_p^* - \bar{s}_p^* \times 10^6| / |s_p^*|$. З табл. 4 видно, що для розв'язання задачі з добре масштабованими даними потрібно майже у два рази менше ітерацій та майже в чотири рази менше обчислень узагальненого градієнта, ніж для розв'язання задачі з погано масштабованими даними.

Результати обчислювальних експериментів показують, що стартову точку можна вибирати рівною $(0, 0, 0, S_{\min}, |x_p - x_1|)^T$ незалежно від масштабу даних задачі (16)–(19). Щоб знайти розв'язок із заданою точністю за менший час, краще розв'язувати задачу з добре масштабованими даними, ніж з погано масштабованими даними. Масштабування може відігравати суттєву роль для вибору того

Таблиця 4. Витрати r -алгоритму на пошук розв'язків добре та погано масштабованих задач (третій експеримент)

ε_x	itm	nfg	ng	Δa	Δb	Δc	ΔS	Δs_p
10^{-5}	84/204	139/635	19/51	2.64e-06	7.82e-07	1.67e-07	2.26e-08	1.84e-07
10^{-6}	113/219	179/653	19/51	7.07e-07	5.73e-07	4.10e-07	1.07e-08	2.25e-08
10^{-7}	113/238	179/684	19/51	2.87e-08	2.19e-08	1.58e-08	5.70e-09	3.34e-09
10^{-8}	133/247	208/695	19/51	3.00e-09	2.09e-09	1.43e-09	1.37e-10	6.72e-11
10^{-9}	137/258	212/718	19/51	1.06e-09	8.54e-10	6.10e-10	6.23e-11	1.40e-10

чи іншого параметра у моделюванні профілів в ітераційному режимі з огляду на те, що масштаб достатньо встановити всього один раз, а задачу потрібно розв'язувати багато разів.

5. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОВНІШНЬОГО КОНТУРУ СОПЛА ФРАНКЛЯ

Наведемо результати обчислювальних експериментів щодо використання розробленого алгоритму для побудови фрагментів дозвукової та надзвукової частин зовнішнього контуру сопла Франкля. Вони пов'язані з проектуванням сопла з центральним тілом для трьох заданих реперних точок зовнішнього контуру, які визначають дозвукову та надзвукову частини сопла та їхнє стикування у точці критичного перерізу. В реперних точках похідні (кути нахилу дотичних) дорівнюють нулю. Для цього контуру задачі (16)–(19) визначаються вихідними даними, для яких виконується умова $|y_2 - y_1| / |x_2 - x_1| \ll 1$, тому відповідні фрагментам контурів S-подібні криві є витягнутими відносно горизонтальної осі.

Перший експеримент пов'язаний з дослідженням впливу кута φ_p на форму S-подібної кривої для тестового прикладу (8), для якого $|y_2 - y_1| / |x_2 - x_1| = 0.29$. У табл. 5 представлено точки глобальних мінімумів трьох задач для різних значень

Таблиця 5. Глобальні мінімуми трьох задач (16)–(19) для вихідних даних (8)

φ_p	a^*	b^*	c^*	S^*	s_p^*
16°	4.0903	-7.3628	2.3632	1.0511	0.74714
12°	7.9282	-11.4065	3.0756	1.0556	0.75399
8°	11.5304	-15.2523	3.7636	1.0630	0.76259

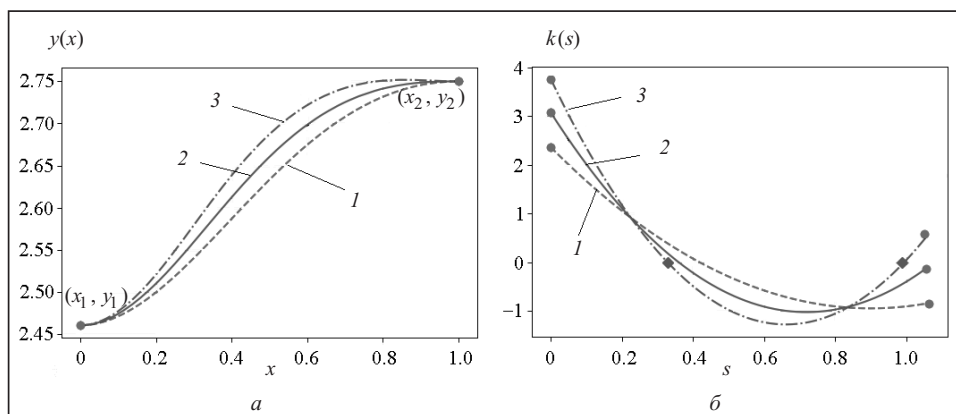


Рис. 5. Графіки кривих $y(x)$ (а) та кривин $k(s) = as^2 + bs + c$ (б) для трьох розв'язків з табл. 5 для значень $\varphi_p = 16^\circ$ (1), $\varphi_p = 12^\circ$ (2), $\varphi_p = 8^\circ$ (3)

Таблиця 6. Розв'язки для дозвукової ($x_1 = 0.00$, $y_1 = 2.95$, $x_2 = 2.16$, $y_2 = 2.46$, $x_p = 0.7$) та надзвукової ($x_1 = 2.16$, $y_1 = 2.46$, $x_2 = 6.38$, $y_2 = 2.75$, $x_p = 5.0$) частин сопла

φ_p	a^*	b^*	c^*	S^*	s_p^*
Дозвукова частина					
-12°	0.53981	-0.66700	-0.15169	2.2312	0.70440
-8°	0.97384	-1.65380	0.22102	2.2439	0.70109
Надзвукова частина					
4°	0.021423	-0.13663	0.16123	4.2327	2.8517
2°	0.057183	-0.28816	0.26827	4.2372	2.8571

кутів $\varphi_p \in \{16^\circ, 12^\circ, 8^\circ\}$. Використовуючи ці точки за формулами (10), легко знайти розв'язки системи (3)–(7) для масштабованих вихідних даних (33), де $\mu = 100$.

Розв'язки з табл. 5 проілюстровано на рис. 5 ($x_1 = 0.00$, $y_1 = 2.46$, $x_2 = 1.00$, $y_2 = 2.75$, $x_p = 0.7$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$), де ліворуч наведено графіки кривих (рис. 5, а), а праворуч — графіки відповідних кривин (рис. 5, б). З графіків кривин видно, що для дволанкових кривих 1 та 2 знаки кривини змінюються тільки в одній точці (точка перегину), що доводить їхню S-подібність. Для кривої 3 знак кривини змінюється у двох точках (відмічені на рис. 5, б), тому вона не є S-подібною. Зауважимо, що із графіків кривих такий висновок зробити не можна, оскільки усі три криві виглядають як S-подібні.

Другий експеримент пов'язаний з побудовою двох варіантів кривих для дозвукової та надзвукової частин зовнішнього контуру сопла за трьома заданими реперними точками: в точці $A(x_A = 0, y_A = 295)$ починається дозвукова частина, точка

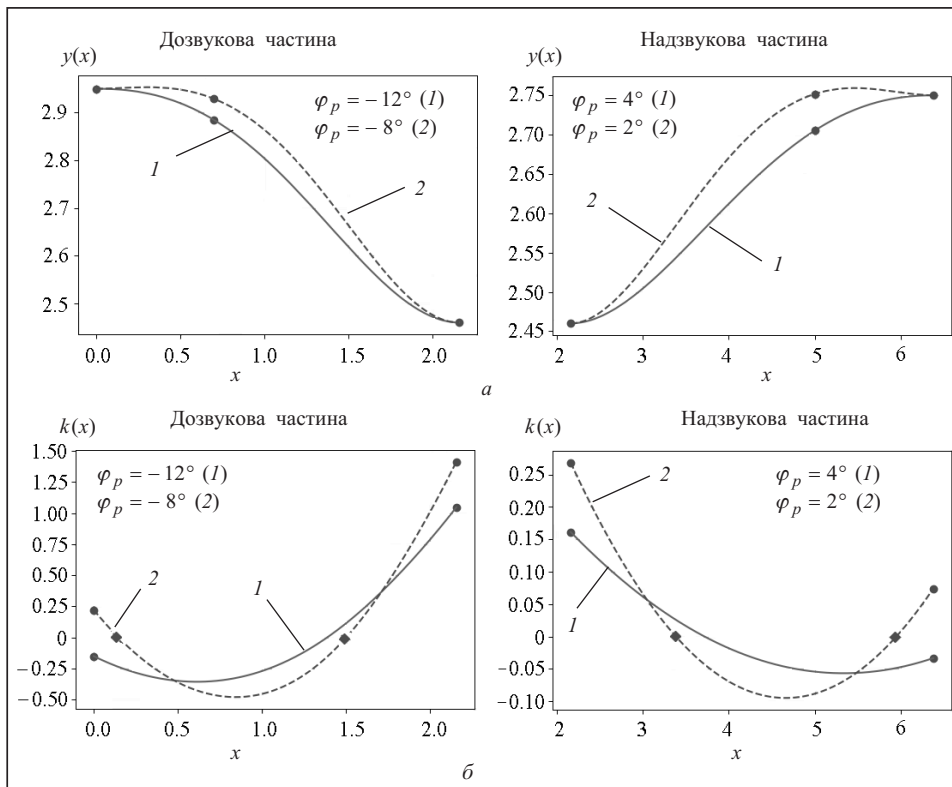


Рис. 6. Графіки кривих (а) та кривин (б) для розв'язків з табл. 6

$B(x_B = 216, y_B = 246)$ є точкою критичного перерізу (число Маха $M = 1$), у точці $C(x_C = 638, y_C = 275)$ закінчується надзвукова частина. У табл. 6 наведено точки глобальних мінімумів для задач (16)–(19) з вихідними даними, де координати точок зменшувалися в $\mu = 100$ раз. Розглянуто два варіанти кутів φ_p при абсцисі x_p , яка для дозвукової частини вибиралася ближчою до абсциси точки A , а для надзвукової частини — ближчою до абсциси точки C .

Графічну ілюстрацію розв'язків наведено на рис. 6, де представлено графіки кривих для дозвукового та надзвукового фрагментів контуру (рис. 6, а), а також графіки кривин, які відповідають цим кривим (рис. 6, б). Криві 1 для обох частин контуру є S-подібними, для них кривини змінюють знак тільки в одній точці. Криві 2 не є S-подібними, для них кривина змінює знак в двох точках (рис. 6, б).

Проведені обчислювальні експерименти для проектування фрагментів дозвукової та надзвукової частин зовнішнього контуру сопла Франкля показали ефективність розробленого алгоритму для побудови дволанкових S-подібних кривих.

ВИСНОВКИ

Розроблено математичну модель, алгоритм та програмне забезпечення для задачі побудови S-подібної кривої в натуральній параметризації, яка проходить через дві задані точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної в точці із заданою абсцисою. Наведено систему нелінійних інтегральних рівнянь для квадратичної кривини, досліджено її властивості, описано відповідну задачу мінімізації негладкої функції та алгоритм її розв'язання. Алгоритм ґрунтується на модифікації методу з розтягом простору в напрямі різниці двох послідовних узагальнених градієнтів. Проведено обчислювальні експерименти, які показали ефективність розробленого методу та алгоритму для проектування фрагментів дозвукової та надзвукової частин зовнішнього контуру сопла Франкля.

Розроблений алгоритм побудови зовнішнього контуру сопла за допомогою S-подібних кривих з використанням натуральної параметризації надає змогу керувати формою контуру за допомогою мінімальної кількості параметрів (кути нахилу дотичних в точках з відомими абсцисами у дозвуковій та надзвуковій частинах). При цьому кривина контуру змінюється плавно, забезпечуючи тим самим, зокрема, необхідні геометричні та газодинамічні властивості контуру. Обчислювальні експерименти підтверджують стійку роботу алгоритму для добре масштабованих вихідних даних контуру, який проектується. Використовуючи отриманий розв'язок за формулами (10), легко знайти розв'язки з необхідною точністю для погано масштабованих вихідних даних.

Запропонований підхід до побудови S-подібного контуру передбачається використати для розроблення геометричної моделі побудови зовнішнього та внутрішнього контурів сопла з центральним тілом. Проектування сопла з центральним тілом є однією з актуальних задач для підвищення експлуатаційних властивостей сучасних авіаційних двигунів, а саме для підвищення тягових та енергетичних характеристик двигунів за заданих обмежень на габарити та масу сопла [17]. Для забезпечення заданих режимів роботи двигуна, що пов'язані з характеристиками горла сопла, актуальною є задача керування переміщенням центрального тіла, яка зумовлює потребу в розв'язанні обернених задач для еліптичних (у дозвуковій області) та гіперболічних (у надзвуковій області) систем у частинних похідних. Для розв'язання обернених задач можна скористатися градієнтними процедурами Сергієнка–Дейнеки [18], які пов'язані з реалізацією градієнтних методів Аліфанова за допомогою прямих та спряжених задач [19, 20]. Якщо при цьому градієнтні методи Аліфанова замінити на градієнтні методи Шора з перетворенням простору [21, 14], то збіжність процедур Сергієнка–Дейнеки можна пришвидшити.

Розроблені математична модель, алгоритм та програмне забезпечення можуть бути використані для профілювання фрагментів сопел та перехідних каналів реактивних двигунів [22]. Поряд з методом Безье–Бернштейна розроблений алгоритм можна застосовувати для побудови фрагментів профілів перехідних каналів змінного перерізу з необхідними геометричними властивостями. Так, наприклад, за його допомогою можна моделювати фрагменти профілів, які представляються опуклими (увігнутими) функціями, як монотонно зростаючими, так і монотонно спадними. Вибір абсциси x_p та кута φ_p надає змогу керувати формою кривої у такий спосіб, щоб у базисних (реперних) точках характеристики кривої відповідали заданим характеристикам профілю, що проєктується.

Автори вдячні співробітникам ДП «Івченко-Прогрес» Різнику С.Б., Піці О.Л., Карпенку А.М. за увагу до роботи та корисні поради.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алемасов В.Е., Дрегалін А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей. Москва: Машиностроение, 1989. 464 с.
2. Мельников Д.А., Пирумов У.Г., Сергиенко А.А. Сопла реактивных двигателей. *Аэромеханика и газовая динамика*. Москва: Наука, 1976. С. 57–75.
3. Франкль Ф.И. К теории сопел Лавалья. *Изв. АН СССР. Сер. Матем.* 1945. Т. 9, № 5. С. 387–422.
4. Сергиенко А.А., Семенов В.В., Собачкин А.А. Выбор оптимальных размеров и контура круглого сопла. Москва: Изд-во МАИ, 2004. 60 с.
5. Михайленко В., Устенко С. Роль прикладной геометрии в повышении эффективных показателей турбомашин. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 1. С. 82–86.
6. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Москва: Гостехиздат, 1956. 420 с.
7. Мищенко А.С. Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. Москва: Физматлит, 2004. 304 с.
8. Борисенко В., Агарков О., Палько К., Палько М. Моделирование плоских кривых у натуральной параметризации. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 1. С. 21–27.
9. Borisenko V., Ustenko S., Ustenko I., Kuzma K. Development of a method for geometrical modeling of the airfoil profile of an axial turbomachine blade. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol 5, N 1 (101). P. 29–38. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180915>.
10. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Устенко І.В. Геометричне моделювання s-подібних скелетних ліній профілів лопаток осевих компресорів. *Вестник двигателестроения*. 2018. № 1. С. 45–52. <https://doi.org/10.15588/1727-0219-2018-1-7>.
11. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. Москва: Из-во физико-математической литературы, 2002. 472 с.
12. Стецюк П.І., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. До побудови зовнішнього контура сопла Франкля за квадратичною кривиною. *Кибернетика та комп'ютерні технології*. 2020. № 1. С. 23–31.
13. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. Т. 33, № 4. С. 28–49.
14. Stetsyuk P.I. Shor's r -algorithms: Theory and practice. In: *Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko*. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds.). Springer, 2017. P. 495–520.
15. Стецюк П.И. Теория и программные реализации r -алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
16. Стецюк П.І. Комп'ютерна програма «Octave-програма galgb5a: $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним кроком». Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 85010. Україна. Міністерство економічного розвитку і торгівлі. Державний департамент інтелектуальної власності. Дата реєстрації 29.01.2019.
17. Heath C.M., Gray J.S., Park M.A., Nielsen E.J., Carlson J-R. Aerodynamic shape optimization of a dual-stream supersonic plug nozzle. *Proc. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting (5–9 January 2015, Kissimmee, Florida, USA)*. Kissimmee, Florida, USA, 2015. 15 p. <https://doi.org/10.2514/6.2015-1047>.
18. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. Shor N.Z. (Ed.). New York: Kluwer Akad. Publ., 2005. 400 p.

19. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. Т. 43, № 4. С. 49–72.
20. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. Т. 43, № 5. С. 48–71.
21. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 1. С. 4–22.
22. Крайко А.А. Профилирование сопел и переходных каналов реактивных двигателей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Москва, 2014. 151 с.

Надійшла до редакції 16.06.2020

П.И. Стецюк, А.В. Ткаченко, О.Н. Хомяк, О.Л. Грицай

ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕГО КОНТУРА СОПЛА ФРАНКЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ S-ОБРАЗНЫХ КРИВЫХ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВИЗНЫ

Аннотация. Разработаны математическая модель, алгоритм и программное обеспечение для задачи построения S-образной кривой, проходящей через две заданные точки с заданными углами наклона касательных в них и обеспечивающей заданный угол наклона касательной в точке с заданной абсциссой. Для управления точкой перегиба S-образной кривой с квадратичным законом распределения кривизны в натуральной параметризации используется угол наклона касательной в точке с заданной абсциссой. Алгоритм основан на модификации метода с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов. Вычислительные эксперименты показали эффективность разработанного алгоритма для проектирования внешнего контура сопла Франкля.

Ключевые слова: внешний контур сопла, S-образная кривая, натуральная параметризация, квадратичная кривизна, негладкая оптимизация, *r*-алгоритм.

P.I. Stetsyuk, O.V. Tkachenko, O.M. Khomyak, O.L. Gritsay

CONSTRUCTING THE EXTERNAL CONTOUR OF THE FRANKL NOZZLE USING S-SHAPED CURVES WITH QUADRATIC DISTRIBUTION OF THE CURVATURE

Abstract. A mathematical model, algorithm, and software are developed for the problem of constructing an S-shaped curve, which passes through two given points with given tangent inclination angles at them and provides a given tangent inclination angle at a point with a given abscissa. To control the inflection point of the S-shaped curve with quadratic distribution of curvature in natural parameterization, the tangent inclination angle at the point with the known abscissa is used. The algorithm is based on a modification of the method with space dilation in the direction of the difference of two successive generalized gradients. Computational experiments have shown the efficiency of the developed algorithm for constructing the external contour of a Frankl-type nozzle.

Keywords: external nozzle contour, S-shaped curve, natural parameterization, quadratic curvature, nonsmooth optimization, *r*-algorithm.

Стецюк Петро Іванович,

доктор фіз.-мат. наук, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: stetsyukp@gmail.com.

Ткаченко Олександр Володимирович,

кандидат фіз.-мат. наук, начальник відділу ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя, e-mail: avt2007@outlook.com.

Хом'як Ольга Миколаївна,

кандидат фіз.-мат. наук, науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: khomiak.olha@gmail.com.

Грицай Ольга Лук'янівна,

інженер-програміст ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя, e-mail: grlleya@gmail.com.